# Explorando la ciencia con...

"Las películas tienen su lugar durante un determinado periodo de tiempo. La tecnología es para siempre."

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

CASIO EDUCACIÓN

**Número 3: EXPLORANDO LA CIENCIA CON HEDY LAMARR (Mayo 2025)**

ISSN Versión Impresa: 2938-849X
ISSN Versión Digital: 2938-8503
Depósito legal: B -13538-2024

## AUTORES

Fernando Algaba García
Lluís Bonet Juan
Ricardo V. Carrascosa Rubio
Antonio Salvador Cotes Giménez
Miguel García Pardillos
Ángel Manuel Gónzalez Guillen
Claudia Lázaro del Pozo
Yolanda Márquez Moreno
Mª Jesús Ruíz Maestro
Patricia Salvador Selma

## EDITADO POR

**CASIO ESPAÑA División Educativa**
C/Josep Pla. 2 Torre B2 Planta 12
08019 Barcelona
info-calculadoras@casio.es
www.edu-casio.es

**Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)**
C/ Hermanos Carvajal, 5
23740 Andujar, Jaén
fespm@fespm.es
www.fespm.es

**Comité Editorial**
Lluís Bonet Juan
Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Elena Virseda Marín

Ilustración de portada: Ana Juan

La ilustración de Hedy Lamarr (1914–2000) forma parte de la iniciativa educativa “Women Do Science”. Se presenta con fines exclusivamente educativos para reconocer sus contribuciones a la tecnología de las comunicaciones. Esta imagen no implica patrocinio ni respaldo por parte de sus herederos o representantes legales.

# Orientaciones para utilizar este cuaderno

El objetivo del cuaderno es promover un trabajo competencial en el aula, destacando los avances en comunicación que se han logrado gracias a las investigaciones de la científica Hedy Lamarr. La educación de calidad (ODS 4) promueve el uso de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC), importantes para conseguir aprendizajes más significativos y esenciales para alcanzar otros objetivos de desarrollo sostenible. Avanzar en la igualdad de género (ODS 5) es fundamental para promover la educación científica entre las jóvenes estudiantes y garantizar una sociedad más equitativa.

Este cuaderno está orientado para las etapas de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Las actividades planteadas y relacionadas con episodios de la vida de Hedy Lamarr están señaladas con el símbolo . La tabla adjunta presenta las actividades de este cuaderno y el curso al que están dirigidas. Las actividades indicadas para los niveles académicos inferiores, se pueden trabajar como conocimientos previos vinculados al objeto de aprendizaje en los niveles superiores.

| Actividad | Nivel | Material | |
|---|---|---|---|
| | | fx-82/85SP CW | fx-570/991SP CW |
| (1) Las películas más taquilleras | 4º ESO | ✓ | ✓ |
| (2) ¿Compartirías una imagen comprometida? | 3º ESO | ✓ | ✓ |
| (3) Seguridad en los pagos con tarjeta | 4º ESO | ✓ | ✓ |
| (4) Comunicaciones inalámbricas seguras | 4º ESO: Apdo. 1 | | ✓ |
| | 4º ESO: Apdo. 2 | ✓ | ✓ |
| (5) Submarinos, ¡un ataque inminente! | 4ºESO y Bachillerato | | ✓ |

Las propuestas son independientes entre sí (las respuestas no están vinculadas) y la realización de una actividad no implica tener que hacer otras.

## Material

Calculadoras científicas CASIO

fx-82SP CW (Pila)
fx-85SP CW (Solar)

fx-991SP CW (Solar)
fx-570SP CW (Pila)

# Hedy Lamarr

**Hedwig Eva Maria Kiesler** nació en Viena el 9 de noviembre de 1914. Hija única de un matrimonio judío, destacó desde pequeña por su brillantez. A los 11 años dominaba el piano, la danza y hablaba cuatro idiomas. Comenzó los estudios de ingeniería, pero los abandonó decidida a cumplir su sueño de ser actriz.

Sus primeros papeles fueron pequeñas intervenciones en películas checas y alemanas. En 1933 saltó a la fama **con la exitosa y a la vez polémica película "Éxtasis"** (1), cuya proyección se prohibió debido a la desaprobación del público y a la censura. Los padres de Hedwig, velando por su hija e ignorando su voluntad de continuar con su carrera de actriz, accedieron a que se casara con Fritz Mandl.

*Fritz Mandl era fabricante de armamento y uno de los hombres más ricos e influyentes de Europa. Antes de la Segunda Guerra Mundial, abasteció los arsenales de Hitler y Mussolini.*

Tras su matrimonio, la vida de Hedwig cambió drásticamente. Por un lado, retomó sus estudios de ingeniería y, por otra parte, su vida pasó a estar controlada constantemente por su marido. Fritz, debido a sus celos y a su carácter posesivo, quiso recopilar todas las copias de la película "Éxtasis" **intentando frenar su difusión** (2), pero no logró su objetivo.

*La actriz fue considerada una de las mujeres más bellas de la historia del cine.*

El estilo de vida al que estaba sometida en Salzburgo le obligó a escapar a Estados Unidos. Aquí conoció al presidente de la compañía cinematográfica Metro-Goldwyn-Mayer y retomó su trabajo como actriz con el nombre artístico de "Hedy Lamarr".

*Hedwig escogió el nombre de "Hedy Lamarr" en memoria de la actriz del cine mudo Bárbara La Marr.*

Durante la segunda Guerra Mundial, a raíz del hundimiento de un barco de refugiados por un submarino alemán, Hedy se interesó por la defensa nacional y quiso ayudar al ejército aliado. **El National Inventors Council** rechazó sus conocimientos de ingeniería y la información que poseía sobre armamento alemán por su pasada relación. Se interesó entonces en cómo mejorar las comunicaciones, esenciales durante la guerra, y en los sistemas de armas por control remoto, para intentar resolver dos problemas: el envío de mensajes y la inseguridad en la recepción de las señales de radio.

**1914**
Nace Hedwig Eva Maria Kiesler.

**1933**
Salta a la fama con la película "Éxtasis". Se casa con Fritz Mandl.

**1937**
Inicia su carrera como actriz en Hollywood.

**1940**
Conoce al compositor George Antheil.

**1942**
Antheil y Hedy obtienen la patente por "Sistema Secreto de Comunicación".

Hedy ideó **fraccionar los mensajes en pequeñas partes** (3) para enviarlos de manera secuencial cambiando la frecuencia con un patrón pseudoaleatorio. Este método dificultaba al enemigo recomponer el mensaje enviado. Los problemas de sincronización existentes entre el transmisor y el receptor los resolvió con la ayuda del **compositor y pianista George Antheil** (4). Ambos desarrollaron un método para cambiar rápidamente entre las frecuencias sincronizadas al azar y patentaron el "Sistema Secreto de Comunicación".

*El sistema de transmisión inventado por Hedy se conoce en la actualidad como "transmisión en espectro ensanchado por salto de frecuencia".*

*El documento "Sistema Secreto de Comunicación", hace referencia al control remoto del timón de un torpedo y a la detección de torpedos teledirigidos.*

El proyecto de Lamarr y Antheil no interesó a la marina de los Estados Unidos. Se argumentó que era inadecuado, complicado, y no apto para ser colocado en los torpedos. Más tarde, en 1957, se desarrolló el sistema, y en 1962 se implementó por primera vez durante la crisis de los misiles de Cuba, **interceptando las comunicaciones y controlando los torpedos** (5).

El trabajo en innovación tecnológica de Hedy Lamarr fue reconocido en 1997 con el premio **"Pioneer Awards"** de la EFF y en el año 2014, fue incluida en el "National Inventors Hall of Fame" por sus aportaciones en el campo de las comunicaciones. Fue pionera en lo que actualmente constituye la base de la comunicación inalámbrica, esencial en el GPS, la telefonía móvil o el wifi.

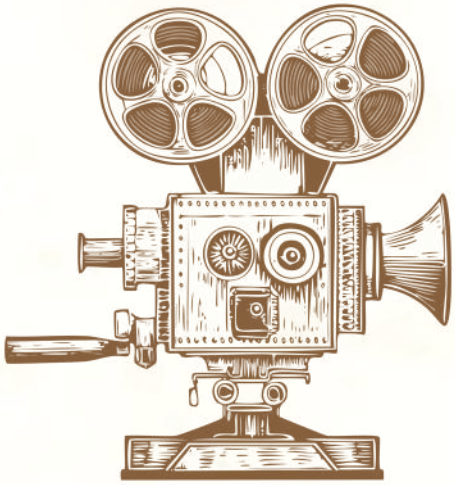
**1962**
Se implementa por primera vez el sistema de trasmisión inventado por Hedy.

**Década de los 90**
Su trabajo científico empieza a ser reconocido.

**1997**
La "Electronic Frontier Foundation" le otorga el "Pioneer Award".

**2000**
Hedy fallece en Casselberry (Florida, EEUU).

**2014**
Se incluye a Hedy en el "National Inventors Hall of Fame" por su sistema de transmisión de "salto de frecuencia".



# Las películas más taquilleras

**Hedy Lamarr cumplió su sueño de ser actriz y a lo largo de su carrera protagonizó muchas películas. En 1949 la película "Sansón y Dalila" fue la más taquillera con una recaudación aproximada de 29 millones de dólares.**

1. Las siguientes tablas muestran la recaudación de las películas más taquilleras en EEUU en los últimos 60 años. Se observa que faltan algunos datos:

| Año | m.$ | Título |
|---|---|---|
| 1965 | **163** | Sonrisas y lagrimas |
| 1966 | **35** | La Biblia |
| 1967 | **142** | El libro de la jungla |
| 1968 | **59** | Funny girl |
| 1969 | **102** | 2 hombres y 1 destino |
| 1970 | **106** | Love story |
| 1971 | **98** | Billy Jack |
| 1972 | **136** | El padrino |
| 1973 | **233** | El exorcista |
| 1974 | **120** | Locura en el oeste |
| 1975 | **272** | Tiburón |
| 1976 | **117** | Rocky |
| 1977 | **461** | Star Wars |
| 1978 | **189** | Grease |
| 1979 | **106** | Kramer vs Kramer |
| 1980 | **291** | Star Wars |
| 1981 | **248** | Indiana Jones |
| 1982 | **439** | E.T. |
| 1983 | **317** | Star Wars |
| 1984 | **238** | Cazafantasmas |

| Año | m.$ | Título |
|---|---|---|
| 1985 | **211** | Regreso al futuro |
| 1986 | | Top Gun |
| 1987 | **168** | 3 hombres y 1 bebé |
| 1988 | **173** | Rain Man |
| 1989 | **251** | Batman |
| 1990 | **286** | Sólo en casa |
| 1991 | **219** | La Bella y la bestia |
| 1992 | **217** | Aladdín |
| 1993 | **415** | Jurassic Park |
| 1994 | **423** | El rey león |
| 1995 | **192** | Toy Story |
| 1996 | **306** | Independence Day |
| 1997 | **674** | Titanic |
| 1998 | **217** | Salvar al soldado Ryan |
| 1999 | | Star Wars - La Amenaza |
| 2000 | **260** | El Grinch |
| 2001 | **319** | El Señor de los Anillos |
| 2002 | **404** | Spiderman |
| 2003 | **382** | El Señor de los Anillos |
| 2004 | **442** | Shrek 2 |

| Año | m.$ | Título |
|---|---|---|
| 2005 | **380** | Star Wars |
| 2006 | **423** | Piratas del Caribe |
| 2007 | **338** | Spiderman |
| 2008 | **535** | Batman |
| 2009 | **785** | Avatar |
| 2010 | **415** | Toy Story 3 |
| 2011 | **381** | Harry Potter |
| 2012 | **623** | Los vengadores |
| 2013 | **425** | Juegos del hambre |
| 2014 | **350** | El Francotirador |
| 2015 | **937** | Star Wars |
| 2016 | **533** | Rogue One |
| 2017 | **620** | Star Wars |
| 2018 | **700** | Pantera Negra |
| 2019 | **858** | Los Vengadores |
| 2020 | **204** | Bad boys for life |
| 2021 | **815** | Spiderman |
| 2022 | **719** | Top Gun |
| 2023 | **636** | Barbie |
| 2024 | **653** | Inside Out |

**a) ¿Puedes estimar la recaudación de las películas "Top Gun" y "Star Wars-La Amenaza Fantasma"?**

**b) Representa la nube de puntos con los datos de recaudación de la segunda columna (1985- 2004). ¿Piensas que la recta de regresión puede ser un buen modelo de ajuste? ¿Por qué? ¿Piensas que hay otro modelo de ajuste mejor?**

2. Las siguientes tablas muestran la suma de las recaudaciones de las 25 películas más taquilleras de cada año:

**Recaudación de las 25 películas más taquilleras de cada año en EEUU**

| Año | m.$ |
|---|---|
| 1985 | **1665** |
| 1986 | **1800** |
| 1987 | **1802** |
| 1988 | **1907** |
| 1989 | **2466** |
| 1990 | **2535** |
| 1991 | **2407** |
| 1992 | **2527** |
| 1993 | **2563** |
| 1994 | **2820** |

| Año | m.$ |
|---|---|
| 1995 | **2458** |
| 1996 | **2895** |
| 1997 | **3404** |
| 1998 | **3155** |
| 1999 | **3839** |
| 2000 | **3600** |
| 2001 | **4136** |
| 2002 | **4521** |
| 2003 | **4199** |
| 2004 | **4481** |

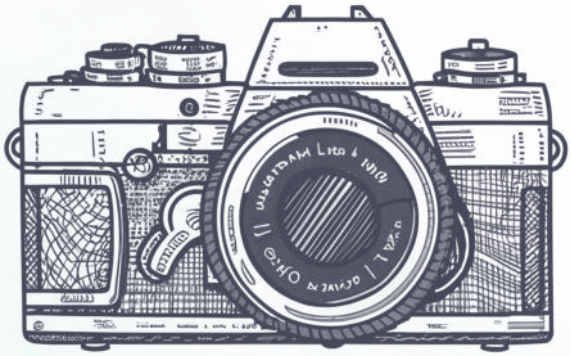
| Año | m.$ |
|---|---|
| 2005 | **4133** |
| 2006 | **4125** |
| 2007 | **4738** |
| 2008 | **4531** |
| 2009 | **5596** |
| 2010 | **4972** |
| 2011 | **4687** |
| 2012 | **5655** |
| 2013 | **5511** |
| 2014 | **5215** |

| Año | m.$ |
|---|---|
| 2015 | **6428** |
| 2016 | **6419** |
| 2017 | **6559** |
| 2018 | **2589** |
| 2019 | |
| 2020 | |
| 2021 | |
| 2022 | **5734** |
| 2023 | **5701** |
| 2024 | **6037** |

**a) Representa la nube de puntos con los datos de recaudación del periodo 2005-2018. ¿Puedes dar algún modelo que explique el comportamiento de estos datos?**

**b) Escogido un modelo, estima la recaudación de los años 2019, 2020 y 2021.**

**c) Contrasta los resultados obtenidos con los datos reales accediendo a la web https://www.worldwideboxoffice.com/¿Qué piensas? Justifica tus respuestas.**



# ¿Compartirías una imagen comprometida?

**Hedy Lamarr protagonizó la controvertida película Éxtasis en la que aparecía desnuda en una escena. Poco después del rodaje, contrajo matrimonio con el magnate Fritz Mandl, que según las crónicas, empeñó parte de su fortuna en comprar todas las copias de la película, hecho que acabó incrementando el interés por la misma.**

**En la actualidad existen muchas noticias sobre la difusión de fotografías comprometidas y sin consentimiento en las redes sociales. Su propagación rápida y sin control, vulnera los derechos al honor, la intimidad o a la propia imagen con las correspondientes consecuencias legales que ello supone.**

En una red social como WhatsApp se difunden con gran rapidez mensajes e imágenes.

Estudios recientes indican que los adolescentes reenvían información comprometida solo a las amistades de plena confianza, que son el 1% de sus contactos, y que el tiempo medio de propagación es de 10 minutos una vez recibida la información.

**¿Cuántos contactos tienes en tu agenda? Calcula el número de amistades de plena confianza según los resultados del estudio.**

**1. ¿Cuántas personas podrían recibir una imagen comprometida en sus dispositivos móviles pasada 1 hora desde el primer envío? ¿Y después de 1 hora y media? ¿Y después de 2 horas? (se supone que ninguna persona recibe la imagen más de una vez).**

**2. Tus contactos, normalmente, están en tu ciudad y en un rango de edad similar al tuyo, ¿cuánto tiempo tardaría en difundirse una imagen comprometida entre los jóvenes de tu ciudad con edades comprendidas entre los 12 y 19 años?**

Se puede encontrar la información en la página web del Instituto Nacional de Estadística (www.ine.es), en el apartado del censo anual de población: https://www.ine.es/jaxiT3/Tabla.htm?t=68543&L=0

**3. Las campañas de información, prevención y concienciación pretenden disminuir hasta un 8% la difusión de imágenes sin consentimiento. Realiza una tabla comparativa de cómo se difunde la información cuando se ponen en marcha campañas preventivas y cuando no se aplican este tipo de acciones. Reflexiona sobre los resultados que se obtienen, ¿crees que las medidas de esta campaña son suficientes y cumplen con las expectativas?**

Da respuesta a estas cuestiones para dos supuestos distintos, si tienes más de 100 contactos o menos de 100 contactos y compara los resultados que se obtienen.

**4. Después del estudio llevado a cabo, ¿compartirías una imagen comprometida con alguno de tus contactos? ¿Te plantearías reducir tu número de contactos de confianza?**

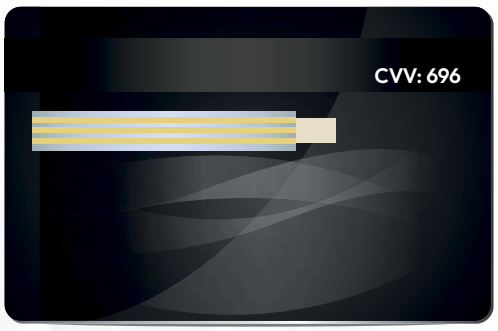
# Seguridad en los pagos con tarjeta

**Hedy Lamarr fue más que un icono de glamour y junto a George Antheil inventó el sistema secreto de comunicaciones, conocido actualmente como "transmisión en espectro ensanchado por salto de frecuencia" . En una transmisión de radio, este sistema cambia repetidamente de frecuencia para minimizar interferencias o la intercepción no autorizada. En la actualidad, este método forma parte de un grupo de soluciones que se utilizan en las comunicaciones inalámbricas, en las redes WIFI y en las comunicaciones con móvil.**

Cuando se hace una compra y se paga con tarjeta, existe una comunicación con el banco para informar de la operación realizada.

El mensaje que se envía desde el comercio a la entidad bancaria está formado por 30 dígitos estructurados con la siguiente información:

| <número de tarjeta> | <fecha de caducidad> | <código de verificación> | <importe de compra> |
|---|---|---|---|
| 16 dígitos | 4 dígitos | 3 dígitos | 7 dígitos* |




*El importe de la compra siempre se expresa con dos dígitos decimales y si el pago realizado es una cantidad con menos dígitos, se completa con ceros por la izquierda.

Para codificar el código numérico, se divide en cinco bloques de seis dígitos cada uno.

**1. Con las condiciones descritas, ¿cuál es el código que envía el comercio al banco si se paga el importe máximo con la tarjeta anterior? Si se realiza una compra de 113,35 €, ¿cuál es ahora el código que se envía?**

2. Para proteger la información que se envía a la entidad bancaria de los ciberdelincuentes hay que proteger la transmisión del código. El sistema de cifrado César suma 3 unidades a cada dígito y si la suma es superior a 9, se añade una unidad a la siguiente cifra.

Observa cómo se codifica este código de 6 dígitos: 906835

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Código inicial** | | 9 | 0 | 6 | 8 | 3 | 5 |
| **Cifrado César** | | +3 | +3 | +3 | +3 | +3 | +3 |
| **Llevada** | | | 1 | 1 | | | |
| **Código cifrado** | 1* | **2** | **4** | **①0** | **①1** | **6** | **8** |

El código cifrado es 240168. Hay que tener en cuenta que, en este ejemplo, hay una unidad de llevada que se acumulará en el bloque de la izquierda.

**Codifica con el código César el mensaje que se envía desde el comercio a la entidad bancaria por la compra realizada anteriormente.**

**¿Se puede diseñar este proceso de codificación con la calculadora?**

**¿Cómo decodifica el banco la información recibida? ¿Se puede automatizar este procedimiento con la calculadora?**

**3. ¿Qué piensas de este método de codificación? ¿Qué harías para proteger de un uso fraudulento una tarjeta extraviada o sustraída?**

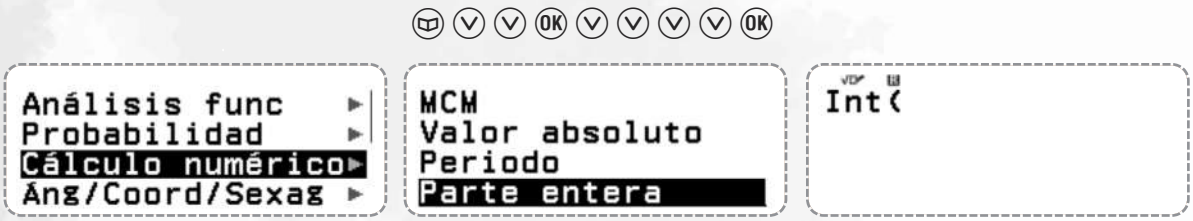
**4. El sistema de salto de frecuencia que diseñó Hedy Lamarr es más seguro que el sistema de codificación César del apartado anterior porque, entre otros aspectos, el comercio y la entidad bancaria intercambian un PIN secreto.**

**Se propone como tarea adicional codificar la transacción bancaria anterior con un código de cifrado de tres dígitos (código PIN secreto entre el comercio y el banco) diferente del cifrado César.**

**Observación para el profesorado**
**Antes de realizar esta actividad se sugiere trabajar las siguientes "Rutinas para la reflexión: aprendizaje e implementación".**

**Rutinas para la reflexión: aprendizaje e implementación.**

La calculadora dispone de las funciones Int(número) e Intg(número) y se puede acceder a ellas en el menú Calcular desde la tecla "Catálogo" en el apartado "Cálculo numérico":



a) Practica con ambos comandos para completar esta tabla observando el resultado que ofrece la calculadora:

| **Número** | 3,1 | 5 | -2,75 | 0 | $\frac{5}{3}$ | -4,86 | -7 | $\sqrt{2}$ | 1,645 | -0,57 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Int(** | | | | | | | | | | |
| **Intg(** | | | | | | | | | | |

¿Qué observas? ¿Qué piensas que hace cada comando? Explícalo con tus propias palabras.

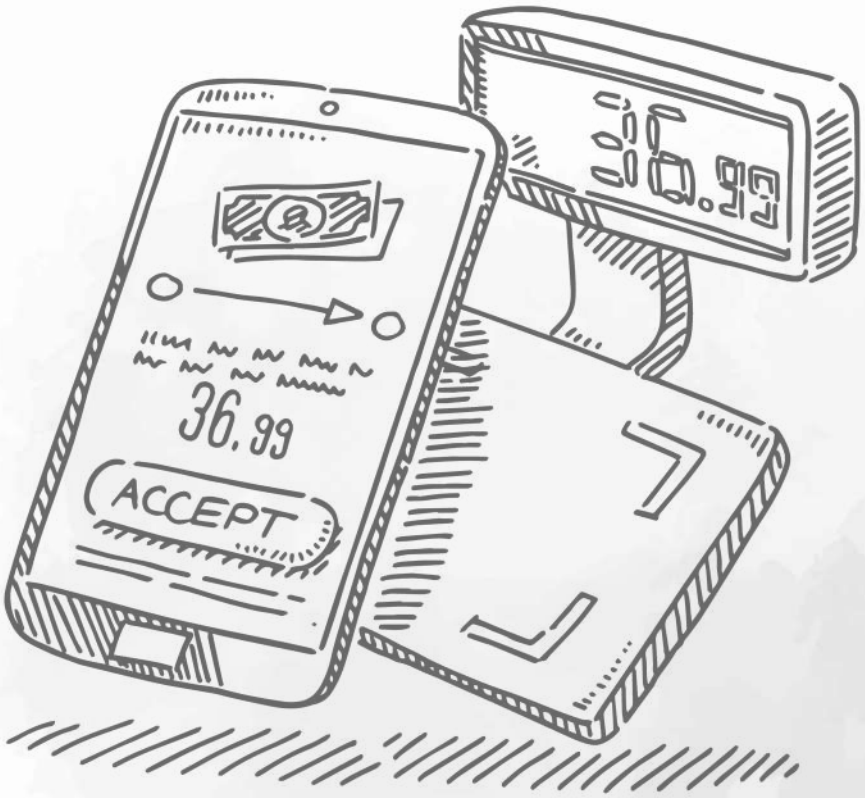
b) Completa ahora la siguiente tabla:

| **A** | 8,65 | -1,5 | $\frac{5}{9}$ | 10 | -7,8 | -5 | $\sqrt{3}$ | 8,3 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **B** | 3,2 | 6 | 2,9 | 4,3 | 4 | -12 | 5 | -6,4 | 1,04 |
| **Intg(A-B)** | | | | | | | | | |

¿Qué observas? ¿Qué conclusiones puedes sacar?

c) Escribe los resultados que esperas obtener en cada celda de las filas 2, 3 y 4. Puedes comprobar los resultados con la calculadora. Explica las conclusiones que obtienes.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 347 | -260 | 1532 | -1354 | 27 421 |
| 2 | A1:1000 | B1:1000 | C1:1000 | D1:1000 | E1:1000 |
| 3 | Int(A2)·1000 | Int(B2)·1000 | Int(C2)·1000 | Int(D2)·1000 | Int(E2)·1000 |
| 4 | Intg(A2)·1000 | Intg(B2)·1000 | Intg(C2)·1000 | Intg(D2)·1000 | Intg(E2)·1000 |



# Comunicaciones inalámbricas seguras

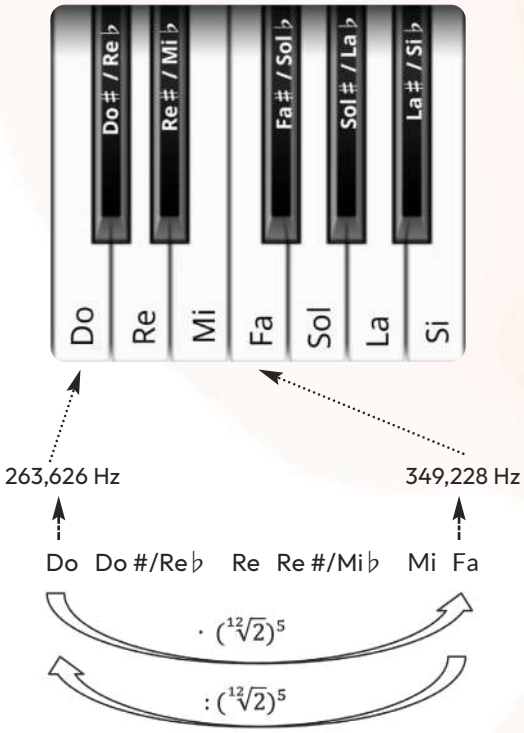
**Hedy Lamarr se había exiliado a Estados Unidos antes del estallido de la Segunda Guerra Mundial en 1939 y allí conoció a George Antheil, compositor y pianista. Ambos fusionaron ciencia y música para crear un sistema revolucionario, inspirado en el funcionamiento de las pianolas, para teledirigir torpedos con ondas de radio. La idea del salto de frecuencia, similar al cambio de notas en una melodía supuso un nuevo capítulo en la historia de la tecnología.**

Se puede analizar la complejidad de una pieza musical considerando la distribución de las notas musicales en el teclado de un piano y su dispersión.

La siguiente imagen muestra un piano de 88 teclas divididas en octavas:

La frecuencia de una nota musical es la cantidad de veces por segundo que oscila su onda y se mide en hercios (Hz). Si la oscilación es lenta, los sonidos de las notas son más graves, si es rápida, los sonidos son más agudos. La razón entre la frecuencia de una nota cualquiera y la siguiente (un semitono más alto) es constante y de valor $r = \sqrt[12]{2}$ .

Por ejemplo, desde la frecuencia de la nota Do de la Octava 4, para obtener la frecuencia de la nota Fa en esa octava, se multiplica por $(\sqrt[12]{2})^5$. En cambio, para obtener la frecuencia de la nota Do a partir de la frecuencia de la nota Fa, se divide entre $(\sqrt[12]{2})^5$.




**1. Se muestran a continuación las tablas con las notas musicales de cada octava. En cada una e ellas aparece la frecuencia de una nota. Completa las tablas con las frecuencias de las notas restantes en hercios. Justifica el proceso utilizado para obtener los resultados.**

Para realizar esta actividad se sugiere organizar el aula en pequeños grupos de trabajo y distribuir a cada uno de ellos una octava.

**2. Transforma las frecuencias obtenidas calculando el logaritmo en base 2 de los valores anteriores. Calcula la diferencia entre el resultado de cada nota y el resultado de la nota anterior ¿Qué observas?**

**Aproxima todos los resultados por redondeo a las centésimas.**

| Octava 0 | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **Hercios** | **$\log_2$** |
| Do | | |
| Do#/Re♭ | | |
| Re | | |
| Re#/Mi♭ | | |
| Mi | | |
| Fa | | |
| Fa#/Sol♭ | | |
| Sol | | |
| Sol#/La♭ | | |
| La | 27,50 | |
| La#/Si♭ | | |
| Si | | |

| Octava 1 | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **Hercios** | **$\log_2$** |
| Do | | |
| Do#/Re♭ | | |
| Re | | |
| Re#/Mi♭ | | |
| Mi | | |
| Fa | | |
| Fa#/Sol♭ | | |
| Sol | | |
| Sol#/La♭ | | |
| La | 55,00 | |
| La#/Si♭ | | |
| Si | | |

| Octava 2 | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **Hercios** | **$\log_2$** |
| Do | | |
| Do#/Re♭ | | |
| Re | | |
| Re#/Mi♭ | | |
| Mi | | |
| Fa | | |
| Fa#/Sol♭ | | |
| Sol | | |
| Sol#/La♭ | | |
| La | 110,00 | |
| La#/Si♭ | | |
| Si | | |

| Octava 3 | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **Hercios** | **$\log_2$** |
| Do | | |
| Do#/Re♭ | | |
| Re | | |
| Re#/Mi♭ | | |
| Mi | | |
| Fa | | |
| Fa#/Sol♭ | | |
| Sol | | |
| Sol#/La♭ | | |
| La | 220,00 | |
| La#/Si♭ | | |
| Si | | |

| Octava 4 | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **Hercios** | **$\log_2$** |
| Do | | |
| Do#/Re♭ | | |
| Re | | |
| Re#/Mi♭ | | |
| Mi | | |
| Fa | | |
| Fa#/Sol♭ | | |
| Sol | | |
| Sol#/La♭ | | |
| La | 440,00 | |
| La#/Si♭ | | |
| Si | | |

| Octava 5 | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **Hercios** | **$\log_2$** |
| Do | | |
| Do#/Re♭ | | |
| Re | | |
| Re#/Mi♭ | | |
| Mi | | |
| Fa | | |
| Fa#/Sol♭ | | |
| Sol | | |
| Sol#/La♭ | | |
| La | 880,00 | |
| La#/Si♭ | | |
| Si | | |

| Octava 6 | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **Hercios** | **$\log_2$** |
| Do | | |
| Do#/Re♭ | | |
| Re | | |
| Re#/Mi♭ | | |
| Mi | | |
| Fa | | |
| Fa#/Sol♭ | | |
| Sol | | |
| Sol#/La♭ | | |
| La | 1760,0 | |
| La#/Si♭ | | |
| Si | | |

| Octava 7 | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **Hercios** | **$\log_2$** |
| Do | | |
| Do#/Re♭ | | |
| Re | | |
| Re#/Mi♭ | | |
| Mi | | |
| Fa | | |
| Fa#/Sol♭ | | |
| Sol | | |
| Sol#/La♭ | | |
| La | 3520,0 | |
| La#/Si♭ | | |
| Si | | |

| Octava 8 | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **Hercios** | **$\log_2$** |
| Do | | |
| Do#/Re♭ | | |
| Re | | |
| Re#/Mi♭ | | |
| Mi | | |
| Fa | | |
| Fa#/Sol♭ | | |
| Sol | | |
| Sol#/La♭ | | |
| La | 7040,0 | |
| La#/Si♭ | | |
| Si | | |

**3. Se muestran a continuación las tablas de frecuencias absolutas $f_i$ de las notas musicales que aparecen en dos partituras:**

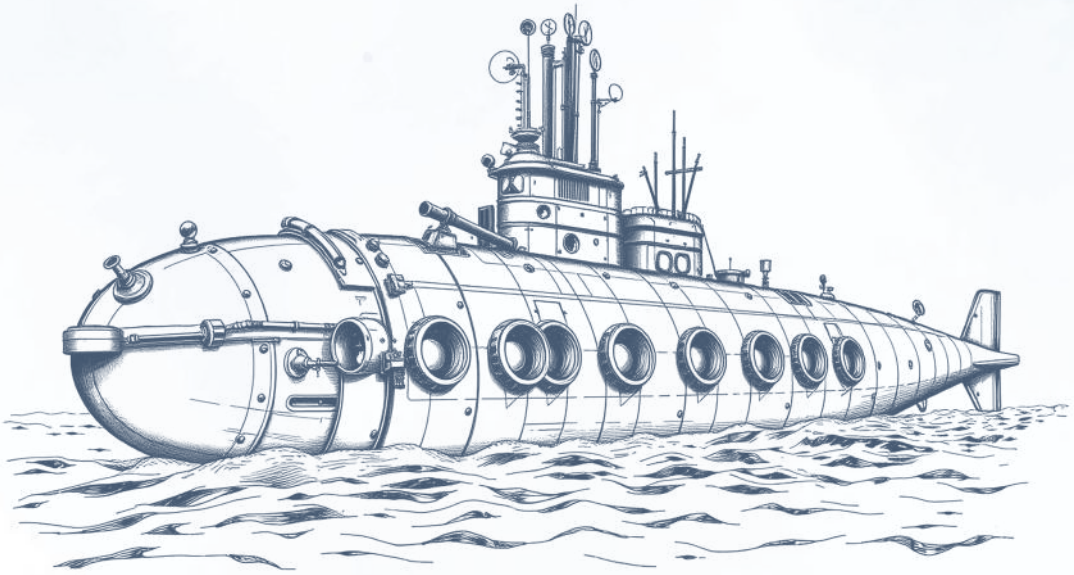
| Partitura 1 | |
|---|---|
| **Notas** | $f_i$ |
| Do - Octava 4 | 3 |
| Do #/ Re ♭ - Octava 4 | 4 |
| Re - Octava 4 | 12 |
| Re #/ Mi ♭ - Octava 5 | 3 |
| Re #/ Mi ♭ - Octava 6 | 2 |
| Re #/ Mi ♭ - Octava 6 | 1 |
| Fa #/ Sol ♭ - Octava 4 | 2 |
| Fa #/ Sol ♭ - Octava 5 | 1 |
| Sol - Octava 4 | 5 |
| Sol #/ La ♭ - Octava 4 | 2 |
| La – Octava 5 | 5 |
| La #/ Si ♭ - Octava 5 | 3 |
| La #/ Si ♭ - Octava 6 | 1 |

| Partitura 2 | |
|---|---|
| **Notas** | $f_i$ |
| Do - Octava 2 | 1 |
| Do # / Re ♭ - Octava 2 | 3 |
| Re - Octava 2 | 5 |
| Re # / Mi ♭ - Octava 3 | 1 |
| Mi - Octava 2 | 2 |
| Fa - Octava 2 | 2 |
| Sol - Octava 2 | 5 |
| Sol - Octava 3 | 2 |
| Sol # / La ♭ - Octava 2 | 7 |
| La - Octava 2 | 6 |
| La - Octava 3 | 2 |
| La # / Si ♭ - Octava 2 | 3 |
| Si - Octava 2 | 3 |
| Si - Octava 3 | 1 |

**a) Si se considera como nivel de dificultad en la ejecución de una pieza musical la dispersión de las notas de la partitura en el teclado (a mayor dispersión, mayor dificultad). ¿Cuál de las dos partituras presenta una mayor dificultad de ejecución?**

**b) Si se añaden las tres nuevas notas que aparecen a continuación al final de la partitura 2 ¿Crees que afectará a la dificultad de ejecución? Justifica tu respuesta y compara de nuevo la dificultad de las piezas musicales.**

| Partitura 2 - Extra | |
|---|---|
| **Notas** | $f_i$ |
| La ♯ / Si ♭ - Octava 7 | 1 |
| Si - Octava 7 | 1 |
| Do - Octava 8 | 1 |



# Submarinos, ¡un ataque inminente!

En la Segunda Guerra Mundial, la batalla naval jugó un papel determinante. Los aliados europeos necesitaban muchos recursos que eran suministrados por los EEUU a través de flotas que cruzaban el Atlántico. Los submarinos alemanes ponían en jaque a la flota aliada.

Cuando se detectaba un submarino enemigo, se lanzaban una gran cantidad de torpedos que no alcanzaban su objetivo. La señal de radiocontrol que dirigía los torpedos hacia el submarino era fácil de interceptar.

Hedy Lamarr y George Antheil desarrollaron un sistema para proteger esta señal de radiocontrol de las interferencias enemigas, consiguiendo aumentar la posibilidad de impacto de los torpedos con los submarinos alemanes.

**Los resultados han de expresarse redondeados a las centésimas.**

# 1. A LA CAZA DEL SUBMARINO

## 1.1 Submarino a la vista

En el sistema de coordenadas cartesiano (Figura 1), cada unidad representa 1000 yardas. Un buque americano situado en el punto $B$ avista en la superficie a un submarino enemigo en el punto $S_1$.

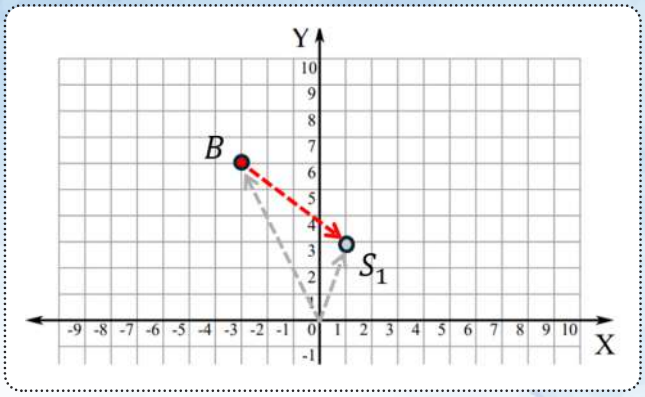



**Figura 1.**

**¿Qué distancia hay entre el buque y el submarino? Expresa el resultado en metros.**

## 1.2 ¡Apunten! ¡Fuego!

Pasados 6 min 40 s, el submarino alcanza la posición $S_2$ navegando a velocidad máxima (Figura 2).

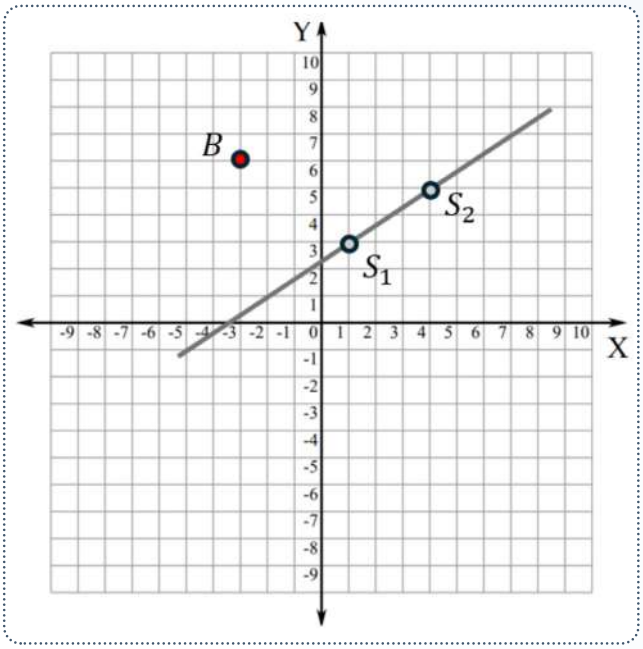



**Figura 2: Nueva ubicación del submarino.**

**a) ¿Cuál es la trayectoria del submarino? ¿A qué velocidad en nudos se desplaza?**

**b) Los americanos, que conocen la trayectoria del submarino, lanzan un torpedo que sigue una trayectoria rectilínea de vector dirección $\vec{d}$ = (13, 3), ¿en qué punto de la trayectoria se produciría el impacto?¿A qué velocidad en nudos debe lanzarse el torpedo para conseguir hundir al submarino?**

### 1.3 Rumbo en zig-zag evasivo

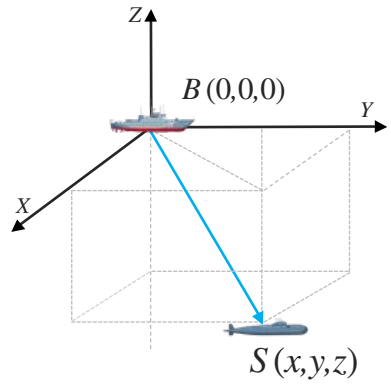
El submarino al detectar un ataque enemigo realiza una maniobra de evasión, cambiando su trayectoria desde el punto $S_2$ hacia el punto $S_3$ = (6, 1). Representa sobre el gráfico la maniobra efectuada por el submarino y calcula el ángulo de giro.

## 2. BAJO EL MAR

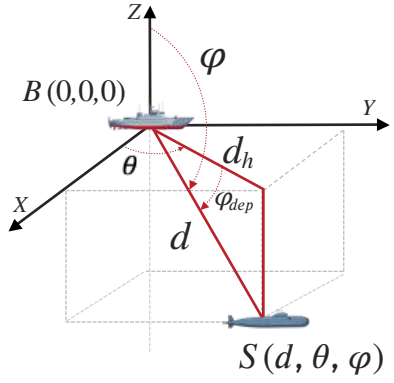
### 2.1 ¡Shhh! Submarino a la escucha

El sonar es el dispositivo de detección que empleaban los buques escolta para localizar a los submarinos. Este sistema emite una señal sonora y analiza los ecos que rebotan de los objetos bajo el mar, determinando así las coordenadas de su posición.

Un buque americano $B$, situado en el origen de coordenadas, intercepta en su sonar a un submarino enemigo $S$. La posición del submarino está en coordenadas rectangulares $S\,(x,\,y,\,z)$ (Figura3.a) y en coordenadas esféricas $S\,(d,\,\theta,\,\varphi)$ (Figura 3.b), ($d$ es la distancia al origen de coordenadas, $\theta$ es el ángulo respecto al eje $X$ y $\varphi$ es el ángulo respecto al eje $Z$).




3.a Coordenadas rectangulares: $(x,\,y,\,z)$



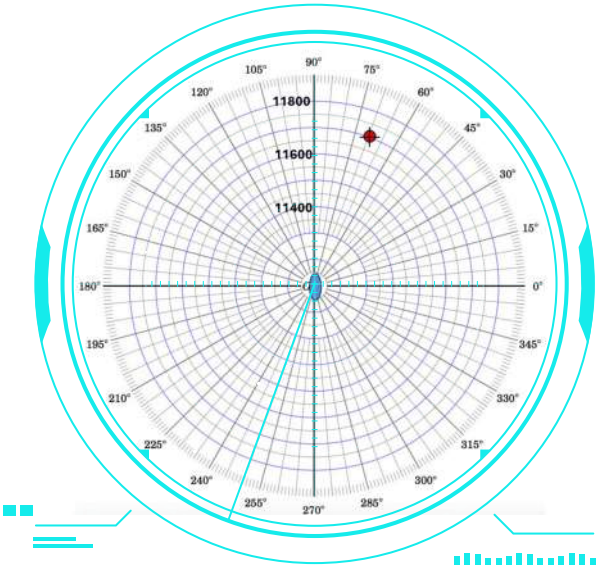

3.b Coordenadas esféricas: $(d,\,\theta,\,\varphi)$

**Figura 3: Detección del submarino sumergido.**

Como se muestra en la figura 3, la distancia horizontal $d_h$ es la proyección del vector de posición del submarino $\overrightarrow{BS}$ sobre el plano $XY$. El ángulo de depresión $\varphi_{dep}$ es el ángulo formado entre el plano $XY$ y el vector de posición del submarino.

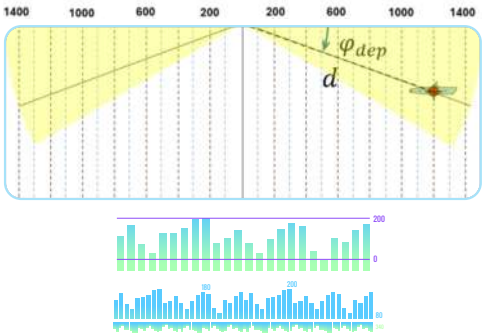
En el sistema de coordenadas del modo de exploración horizontal del sonar se visualiza la ubicación del submarino (punto rojo). El ángulo de depresión $\varphi_{dep}$, se observa en el modo de exploración vertical. (Figura 4)

**Modo de exploración horizontal**




$d_h = 11\,700$ yd
$\theta = 70°$

**Modo de exploración vertical**




$\varphi_{dep} = 23{,}13°$

**Figura 4: Modos de exploración horizontal y vertical en la pantalla del sonar.**

La información del sonar proporciona al buque escolta las coordenadas rectangulares y las coordenadas esféricas de la posición del submarino, ¿cuáles son estas coordenadas?

## 2.2. El submarino se aproxima

A través del sónar se realiza el seguimiento del submarino. $S_1$ son las coordenadas cartesianas de su posición en un primer instante y $S_2$ sus coordenadas en un instante posterior. Los valores de las coordenadas se expresan en miles de yardas (Figura 5):

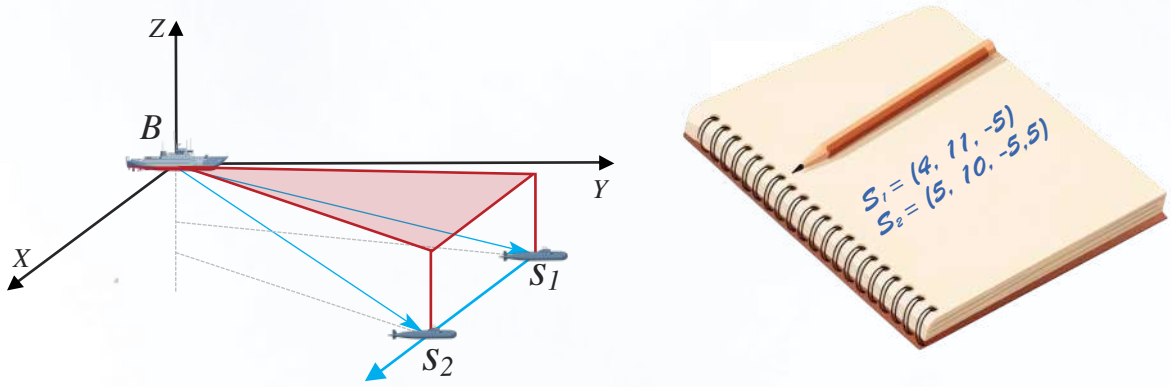



**Figura 5.**

**a) Si el submarino sigue la trayectoria rectilínea definida por los puntos anteriores y los torpedos que se lanzan desde el buque B tienen un alcance de 12 500 yardas, justifica si existe posibilidad de impacto.**

**b) Si existe posibilidad de impacto, ¿cuál es la dirección que ha de seguir el torpedo para alcanzar al submarino cuando se encuentra a la mínima distancia del buque?**

# Notas

# SOLUCIONARIO

# Las películas más taquilleras

1. Las siguientes tablas muestran la recaudación de las películas más taquilleras en EEUU en los últimos 60 años. Se observa que faltan algunos datos:

| Año | m.$ | Título |
|---|---|---|
| 1965 | **163** | Sonrisas y lagrimas |
| 1966 | **35** | La Biblia |
| 1967 | **142** | El libro de la jungla |
| 1968 | **59** | Funny girl |
| 1969 | **102** | 2 hombres y 1 destino |
| 1970 | **106** | Love story |
| 1971 | **98** | Billy Jack |
| 1972 | **136** | El padrino |
| 1973 | **233** | El exorcista |
| 1974 | **120** | Locura en el oeste |
| 1975 | **272** | Tiburón |
| 1976 | **117** | Rocky |
| 1977 | **461** | Star Wars |
| 1978 | **189** | Grease |
| 1979 | **106** | Kramer vs Kramer |
| 1980 | **291** | Star Wars |
| 1981 | **248** | Indiana Jones |
| 1982 | **439** | E.T. |
| 1983 | **317** | Star Wars |
| 1984 | **238** | Cazafantasmas |

| Año | m.$ | Título |
|---|---|---|
| 1985 | **211** | Regreso al futuro |
| 1986 | | Top Gun |
| 1987 | **168** | 3 hombres y 1 bebé |
| 1988 | **173** | Rain Man |
| 1989 | **251** | Batman |
| 1990 | **286** | Sólo en casa |
| 1991 | **219** | La Bella y la bestia |
| 1992 | **217** | Aladdín |
| 1993 | **415** | Jurassic Park |
| 1994 | **423** | El rey león |
| 1995 | **192** | Toy Story |
| 1996 | **306** | Independence Day |
| 1997 | **674** | Titanic |
| 1998 | **217** | Salvar al soldado Ryan |
| 1999 | | Star Wars - La Amenaza |
| 2000 | **260** | El Grinch |
| 2001 | **319** | El Señor de los Anillos |
| 2002 | **404** | Spiderman |
| 2003 | **382** | El Señor de los Anillos |
| 2004 | **442** | Shrek 2 |

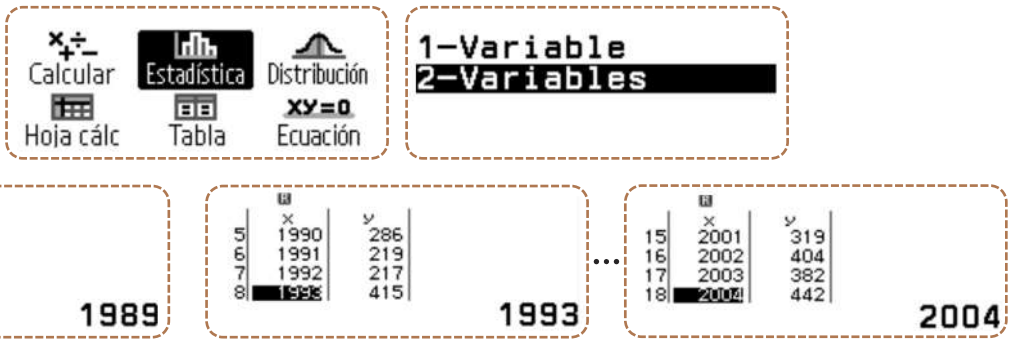
| Año | m.$ | Título |
|---|---|---|
| 2005 | **380** | Star Wars |
| 2006 | **423** | Piratas del Caribe |
| 2007 | **338** | Spiderman |
| 2008 | **535** | Batman |
| 2009 | **785** | Avatar |
| 2010 | **415** | Toy Story 3 |
| 2011 | **381** | Harry Potter |
| 2012 | **623** | Los vengadores |
| 2013 | **425** | Juegos del hambre |
| 2014 | **350** | El Francotirador |
| 2015 | **937** | Star Wars |
| 2016 | **533** | Rogue One |
| 2017 | **620** | Star Wars |
| 2018 | **700** | Pantera Negra |
| 2019 | **858** | Los Vengadores |
| 2020 | **204** | Bad boys for life |
| 2021 | **815** | Spiderman |
| 2022 | **719** | Top Gun |
| 2023 | **636** | Barbie |
| 2024 | **653** | Inside Out |

**a) ¿Puedes estimar la recaudación de las películas "Top Gun" y "Star Wars-La Amenaza Fantasma"?**

**b) Representa la nube de puntos con los datos de recaudación de la segunda columna (1985- 2004). ¿Piensas que la recta de regresión puede ser un buen modelo de ajuste? ¿Por qué? ¿Piensas que hay otro modelo de ajuste mejor?**

## SOLUCIÓN

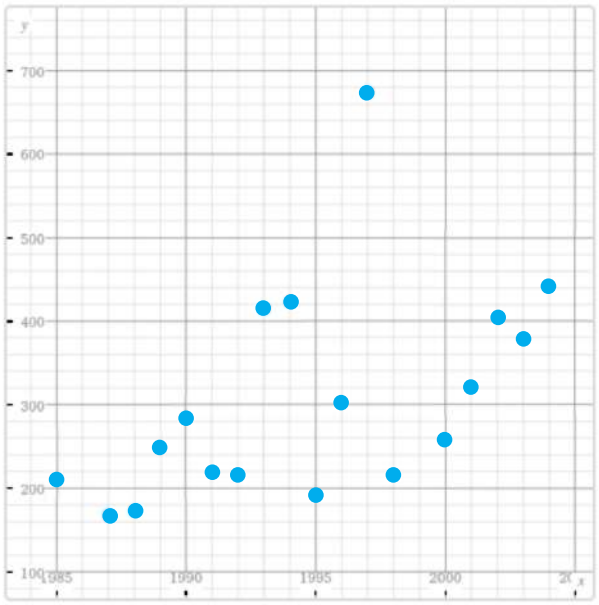
En el menú Estadística, se escoge "2-Variables" y se introducen los años y las recaudaciones conocidas entre 1985 y 2004:




A través del código QR, se observa la gráfica de la nube de puntos:

| Año | m.$ |
|---|---|
| 1985 | **211** |
| 1986 | |
| 1987 | **168** |
| 1988 | **173** |
| 1989 | **251** |
| 1990 | **286** |
| 1991 | **219** |
| 1992 | **217** |
| 1993 | **415** |
| 1994 | **423** |

| Año | m.$ |
|---|---|
| 1995 | **192** |
| 1996 | **306** |
| 1997 | **674** |
| 1998 | **217** |
| 1999 | |
| 2000 | **260** |
| 2001 | **319** |
| 2002 | **404** |
| 2003 | **382** |
| 2004 | **442** |




La nube de puntos sugiere una relación positiva en la recaudación de las películas más taquilleras a lo largo de los años estudiados, pero no parece que exista una función lineal que se ajuste de forma clara a la nube de puntos y que explique su comportamiento. Se observan además algunos puntos muy alejados de la nube que podrían ser analizados de manera particular, como el caso de la película Titánic, que en el año 1997 alcanzó una recaudación récord de 674 millones de dólares.

Se calcula la recta de regresión y el coeficiente de correlación para justificar analíticamente la hipótesis anterior:

EXE ▽ OK OK

Un coeficiente de correlación $r$ = 0,51, indica una correlación moderada por lo que el modelo lineal no es adecuado para realizar estimaciones precisas.

El coeficiente de determinación $r^2$ = 0,26 indica que el modelo explica solo el 26% de la variabilidad de la recaudación dejando el 74% sin explicar. Esto significa que existen otros factores no incluidos en el modelo que influyen significativamente en los resultados y por tanto las predicciones pueden tener errores grandes.

Se podrían considerar otros modelos de regresión alternativos que fuesen más adecuados. En este caso concreto al tratarse de un estudio de los valores de una misma variable en diferentes momentos de tiempo se puede estudiar la autocorrelación, que mide la relación de una variable consigo misma en el tiempo, esencial para hacer predicciones.

**2. Las siguientes tablas muestran la suma de las recaudaciones de las 25 películas más taquilleras de cada año:**

**Recaudación de las 25 películas más taquilleras de cada año en EEUU**

| Año | m.$ |
|---|---|
| 1985 | **1665** |
| 1986 | **1800** |
| 1987 | **1802** |
| 1988 | **1907** |
| 1989 | **2466** |
| 1990 | **2535** |
| 1991 | **2407** |
| 1992 | **2527** |
| 1993 | **2563** |
| 1994 | **2820** |

| Año | m.$ |
|---|---|
| 1995 | **2458** |
| 1996 | **2895** |
| 1997 | **3404** |
| 1998 | **3155** |
| 1999 | **3839** |
| 2000 | **3600** |
| 2001 | **4136** |
| 2002 | **4521** |
| 2003 | **4199** |
| 2004 | **4481** |

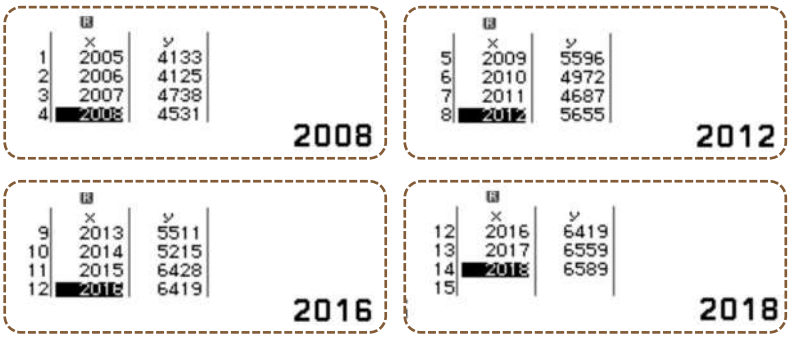
| Año | m.$ |
|---|---|
| 2005 | **4133** |
| 2006 | **4125** |
| 2007 | **4738** |
| 2008 | **4531** |
| 2009 | **5596** |
| 2010 | **4972** |
| 2011 | **4687** |
| 2012 | **5655** |
| 2013 | **5511** |
| 2014 | **5215** |

| Año | m.$ |
|---|---|
| 2015 | **6428** |
| 2016 | **6419** |
| 2017 | **6559** |
| 2018 | **2589** |
| 2019 | |
| 2020 | |
| 2021 | |
| 2022 | **5734** |
| 2023 | **5701** |
| 2024 | **6037** |

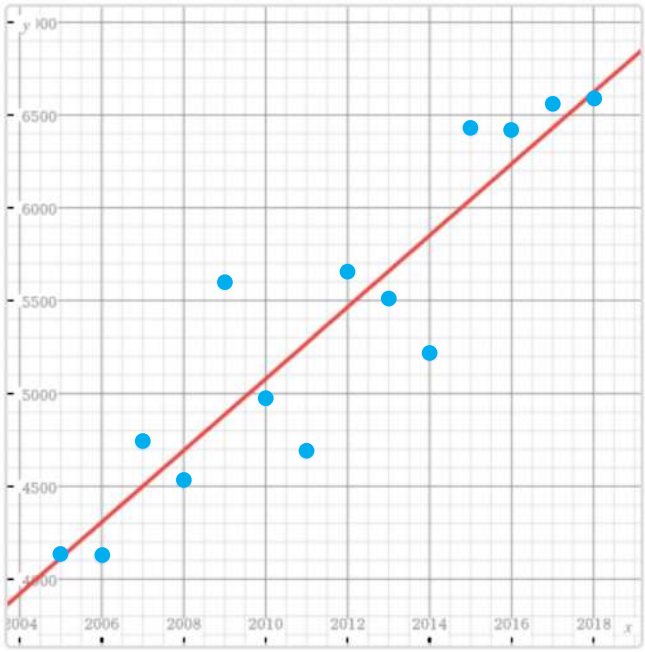
**a) Representa la nube de puntos con los datos de recaudación del periodo 2005-2018. ¿Puedes dar algún modelo que explique el comportamiento de estos datos?**

## SOLUCIÓN

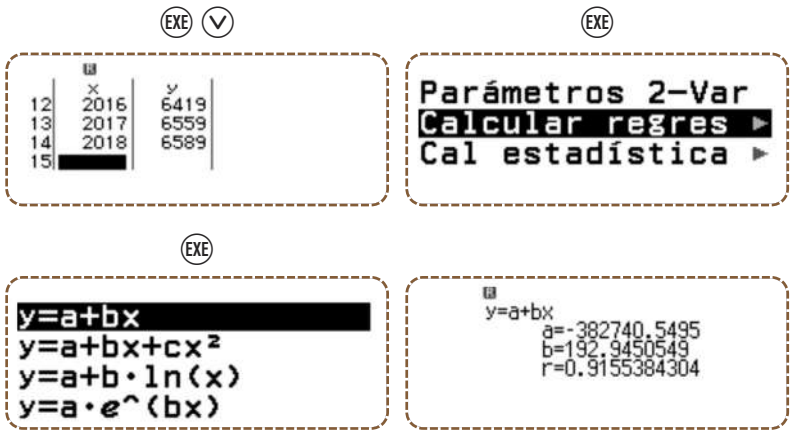
En el menú Estadística de la calculadora, se escoge "2-Variables" y se introducen los datos del periodo 2005-2018:




A través del código QR, se observa la nube de puntos:



El modelo de regresión lineal parece ajustarse a la nube de puntos. Se analiza el coeficiente de correlación lineal para la función obtenida:

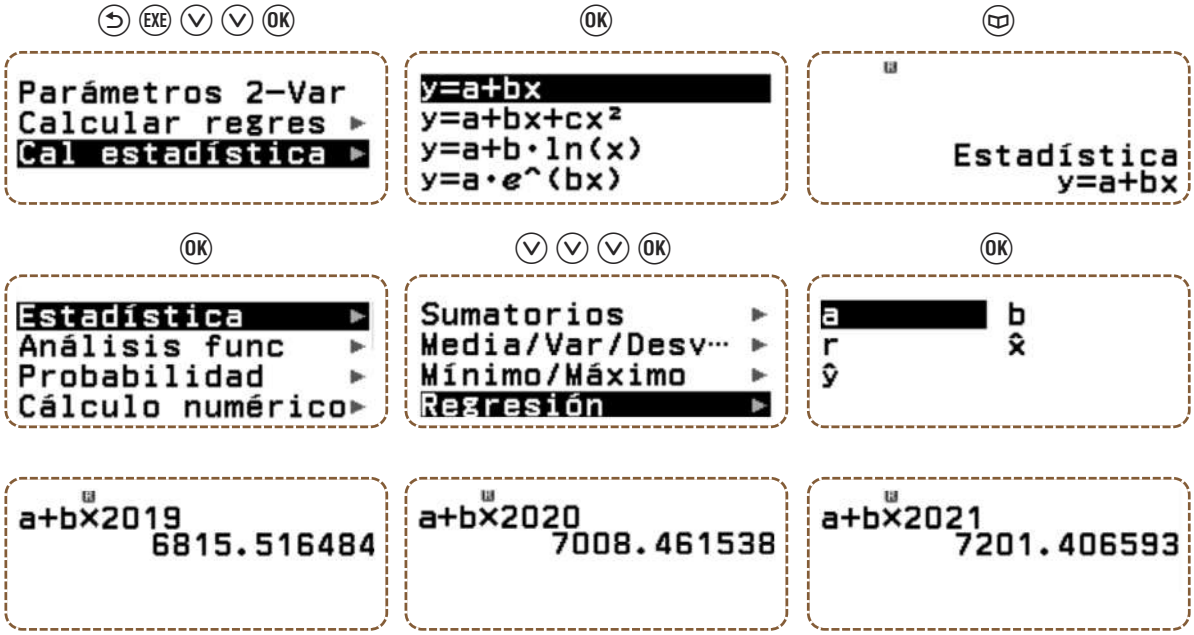



El coeficiente de correlación lineal obtenido, $r$ = 0,92, indica generalmente una dependencia alta de las variables, aunque podría no ser así (puede existir una correlación sin sentido entre las variables que se estudian). Se debe ser crítico con los datos que se están relacionando.

**b) Escogido un modelo, estima la recaudación de los años 2019, 2020 y 2021.**

## SOLUCIÓN

Si se utiliza el modelo de regresión lineal encontrado, se obtienen las siguientes estimaciones:



| Año | Estimación de la recaudación (m.$) |
|---|---|
| 2019 | **6816** |
| 2020 | **7008** |
| 2021 | **7201** |

Se puede utilizar esta otra opción de la calculadora:

**c) Contrasta los resultados obtenidos con los datos reales accediendo a la web https://www.worldwideboxoffice.com/¿Qué piensas? Justifica tus respuestas.**

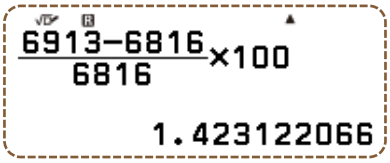
## SOLUCIÓN

Cuanto más lejos se está del periodo estudiado (2005-2018), las estimaciones de las recaudaciones son menos fiables.

En la siguiente tabla se presentan las estimaciones obtenidas con el modelo lineal y las recaudaciones reales de estos años:

| Año | Estimación de la recaudación (m.$) | Recaudación real (m.$) |
|---|---|---|
| 2019 | **6816** | **6913** |
| 2020 | **7008** | **1258** |
| 2021 | **7201** | **3493** |

En el año 2019 la recaudación fue de 6816 m.$ y el dato estimado es cercano al real. El error cometido con el modelo es del 1,4%:




En los años 2020 y 2021, las estimaciones de las recaudaciones que proporciona el modelo están muy alejadas de los datos reales, las recaudaciones se desploman. Esto sugiere que se deben analizar las circunstancias que han podido provocar un cambio tan significativo.

En el año 2020 debido a la pandemia del coronavirus, hubo un confinamiento de la población y cambiaron los hábitos de las personas. En años posteriores se observa como las recaudaciones se van recuperando.

# Notas

# ¿Compartirías una imagen comprometida?

En una red social como WhatsApp se difunden con gran rapidez mensajes e imágenes.

Estudios recientes indican que los adolescentes reenvían información comprometida solo a las amistades de plena confianza, que son el 1% de sus contactos, y que el tiempo medio de propagación es de 10 minutos una vez recibida la información.

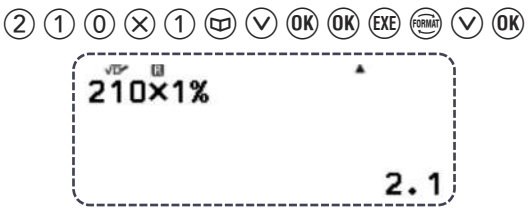
**¿Cuántos contactos tienes en tu agenda? Calcula el número de amistades de plena confianza según los resultados del estudio.**

**CASO 1: Más de 100 contactos**

**SOLUCIÓN**

Se puede hacer la media aritmética del número de contactos del alumnado del grupo. En este primer caso se supone que es mayor que 100, por ejemplo 210.

Las amistades de plena confianza son el 1% de 210:




**1. ¿Cuántas personas podrían recibir una imagen comprometida en sus dispositivos móviles pasada 1 hora desde el primer envío? ¿Y después de 1 hora y media? ¿Y después de 2 horas? (se supone que ninguna persona recibe la imagen más de una vez).**

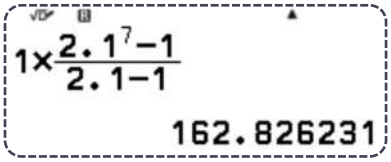
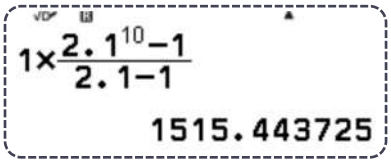
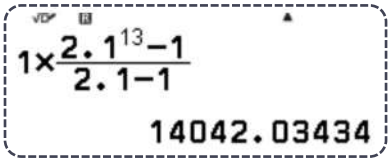
**SOLUCIÓN**

En este caso, a los 10 minutos la imagen llega a 2,1 personas, en 20 minutos llega a $2{,}1^2$, y así sucesivamente cada 10 minutos. La transmisión de la imagen es una progresión geométrica de primer término 1 y razón 2,1:

$$a_n = 1 \cdot 2{,}1^{n-1}$$

Se calcula la suma de todas las personas que han recibido la imagen pasadas 1 hora, 1 hora y media y 2 horas, utilizando la suma de los $n$ términos de una progresión geométrica:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

| **Tiempo que pasa desde el primer envío** | $n = \frac{t}{10} + 1$ ($t$ en minutos) | $a_n$ | $S_n$ |
|---|---|---|---|
| $t$ = 1 hora = 60 minutos | 7 | $a_7 = 1 \cdot 2{,}1^6$ | 162,83   |
| $t$ = 1 hora y media = 90 minutos | 10 | $a_{10} = 1 \cdot 2{,}1^9$ | 1515,44   |
| $t$ = 2 horas = 120 minutos | 13 | $a_{13} = 1 \cdot 2{,}1^{12}$ | 14 042,03   |

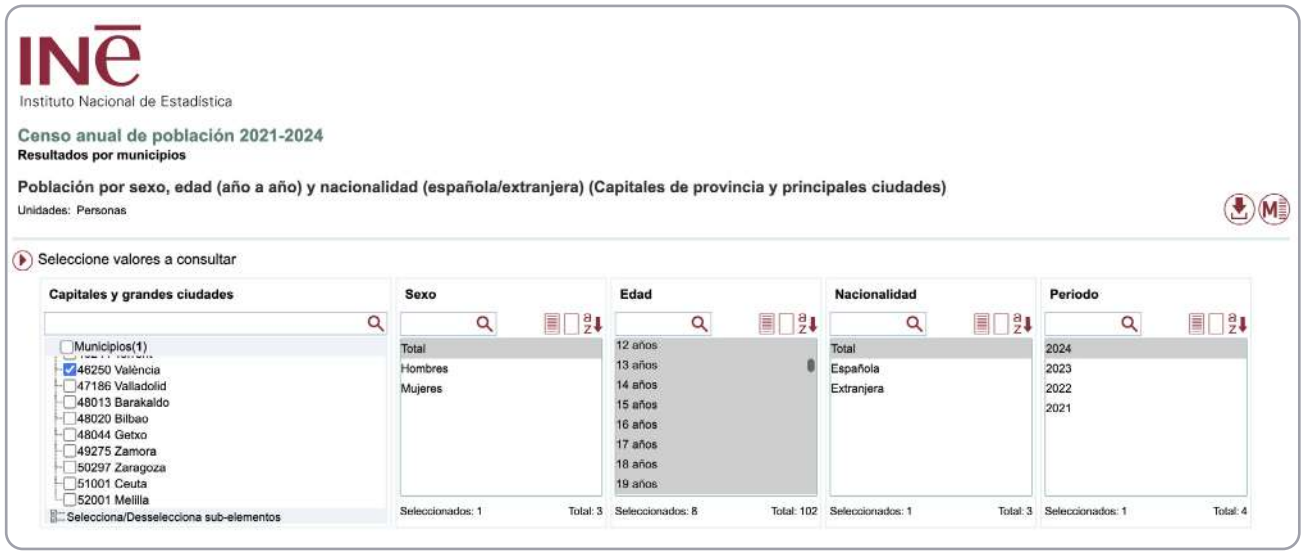
**2. Tus contactos, normalmente, están en tu ciudad y en un rango de edad similar al tuyo, ¿cuánto tiempo tardaría en difundirse una imagen comprometida entre los jóvenes de tu ciudad con edades comprendidas entre los 12 y 19 años?**

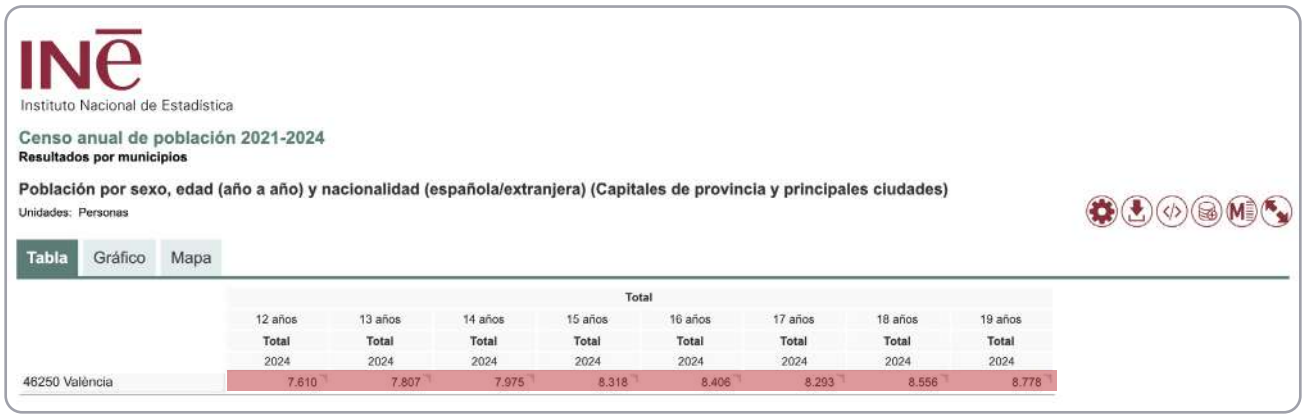
Los datos sobre el número de jóvenes que hay en tu ciudad con edades comprendidas entre los 12 y 19 años, están en la página web del Instituto Nacional de Estadística (www.ine.es), en el apartado del censo anual de población: https://www.ine.es/jaxiT3/Tabla.htm?t=68543&L=0

## SOLUCIÓN

Se puede encontrar la información en la página web del Instituto Nacional de Estadística (www.ine.es), en el apartado del censo anual de población: https://www.ine.es/jaxiT3/Tabla.htm?t=68543&L=0

Se ha supuesto que la ciudad donde se difunde la imagen es Valencia y se ha seleccionado la población por sexo, edad, nacionalidad y periodo como se muestra en la imagen:



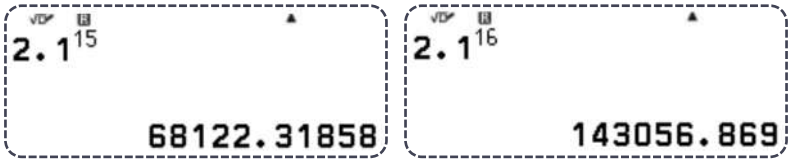

La suma de todos los jóvenes entre 12 y 19 años es 65 743:

Se calcula el tiempo que tarda en difundirse la imagen:

$$65\,743 = 1 \cdot \frac{2{,}1^n - 1}{2{,}1 - 1}$$

$$72\,318{,}3 = 2{,}1^n$$

Se puede calcular el valor de $n$ por tanteo:




Se observa que el resultado de $n$ buscado está entre 15 y 16.

La imagen tardará entre 140 min y 150 min en llegar a todos los jóvenes entre 12 y 19 años de Valencia, es decir, entre 2 h 20 min y 2 h 30 min.

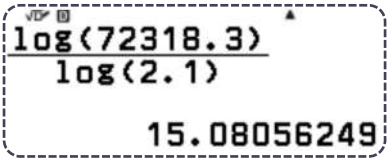
También se puede resolver la ecuación exponencial utilizando logaritmos:

$$72\,318{,}3 = 2{,}1^n$$

$$\log 72\,318{,}3 = \log 2{,}1^n$$

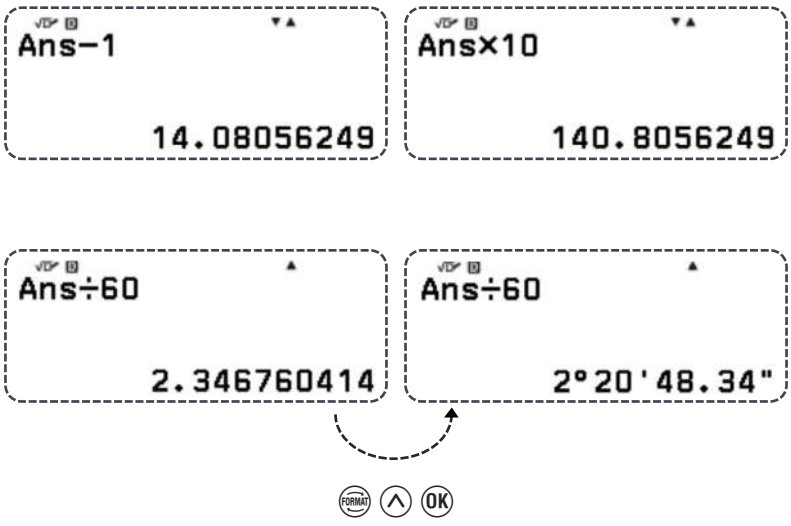
$$\frac{\log 72\,318{,}3}{\log 2{,}1} = n$$

$$15{,}08 = n$$




* Se puede resolver desde el menú Ecuación.

Se puede expresar en forma sexagesimal el tiempo que tarda en hacerse viral la imagen, 2h 20’ 48’’:



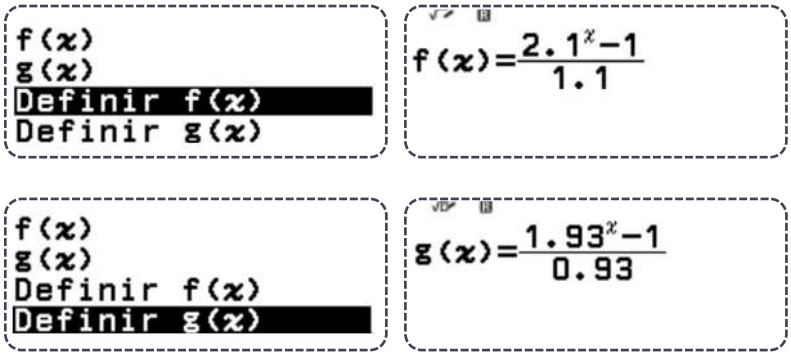
**3. Las campañas de información, prevención y concienciación pretenden disminuir hasta un 8% la difusión de imágenes sin consentimiento. Realiza una tabla comparativa de cómo se difunde la información cuando se ponen en marcha campañas preventivas y cuando no se aplican este tipo de acciones. Reflexiona sobre los resultados que se obtienen ¿crees que las medidas de esta campaña son suficientes y cumplen con las expectativas?**

## SOLUCIÓN

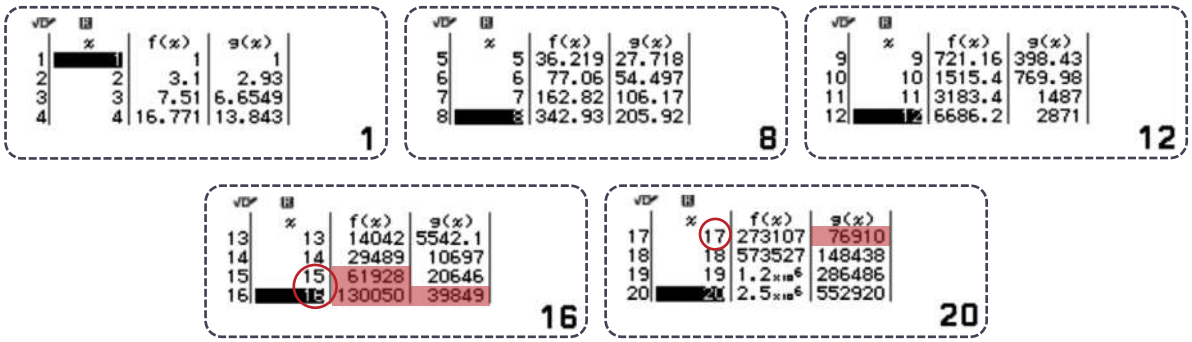
Reducir un 8% los contactos de plena confianza (el 1% de los contactos) con los que compartirías una imagen comprometida, supone enviar esta información al 92% del 1% de 210 = 1,93.

Para comparar la propagación de la imagen en ambos casos, se pueden definir las funciones $f(x)$ (número total de personas que reciben la imagen sin campaña de prevención) y $g(x)$ (número total de personas que reciben la imagen después de aplicar una campaña de prevención).

En el menú Calcular se definen $f(x)$ y $g(x)$ como suma de los $x$ términos de las correspondientes progresiones geométricas:




En el menú Tabla se define el rango para los valores de $x$ entre 1 y 20:




Después de la campaña de concienciación a los jóvenes se consigue ralentizar la difusión de la imagen comprometida, pero con una diferencia de tiempo pequeña. Estas acciones preventivas no son suficientemente efectivas para evitar una propagación masiva de este tipo de contenidos.

**CASO 2: Menos de 100 contactos**

## SOLUCIÓN

Se supone ahora que el número de contactos es menor que 100, por ejemplo 95. Las amistades de plena confianza son el 1% de 95:

**1. ¿Cuántas personas podrían recibir una imagen comprometida en sus dispositivos móviles pasada 1 hora desde el primer envío? ¿Y después de 1 hora y media? ¿Y después de 2 horas? (se supone que ninguna persona recibe la imagen más de una vez).**

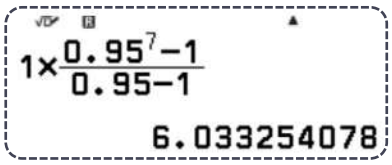
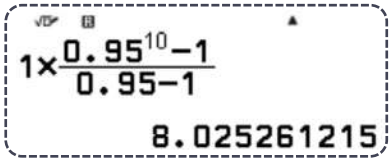
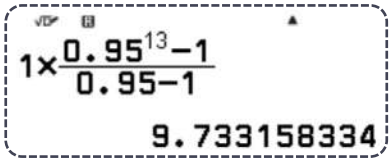
## SOLUCIÓN

En este caso, a los 10 minutos la imagen llega a 0,95 personas, en 20 minutos llega a $0{,}95^2$, y así sucesivamente cada 10 minutos. La transmisión de la imagen es una progresión geométrica de primer término 1 y razón 0,95:

$$a_n = 1 \cdot 0{,}95^{n-1}$$

Se calcula la suma de todas las personas que han recibido la imagen pasadas 1 hora, 1 hora y media y 2 horas, utilizando la suma de los $n$ términos de una progresión geométrica:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

| **Tiempo que pasa desde el primer envío** | $n = \frac{t}{10} + 1$ ($t$ en minutos) | $a_n$ | $S_n$ |
|---|---|---|---|
| $t$ = 1 hora = 60 minutos | 7 | $a_7 = 1 \cdot 0{,}95^6$ | 6,03   |
| $t$ = 1 hora y media = 90 minutos | 10 | $a_{10} = 1 \cdot 0{,}95^9$ | 8,03   |
| $t$ = 2 horas = 120 minutos | 13 | $a_{13} = 1 \cdot 0{,}95^{12}$ | 9,73   |

**2. Tus contactos, normalmente, están en un rango de edad similar al tuyo, ¿cuánto tiempo tardaría en difundirse una imagen comprometida entre los jóvenes de tu ciudad con edades comprendidas entre los 12 y 19 años?**

## SOLUCIÓN

Igual que en el apartado anterior, se ha supuesto que la ciudad donde se difunde la imagen es Valencia, la suma de todos los jóvenes entre 12 y 19 años es 65 743. Se calcula el tiempo que tarda en difundirse la imagen:

$$65\,743 = 1 \cdot \frac{0{,}95^n - 1}{0{,}95 - 1}$$

$$-3286{,}15 = 0{,}95^n$$

La ecuación no tiene solución, una potencia de base positiva elevada a $n$ nunca será un número negativo. Esto quiere decir que la imagen no llegará a difundirse a este número de personas.

Al tratarse de una progresión geométrica con $|r| < 1$ se puede calcular la suma de todos sus términos con la expresión:

$$S = \frac{a_1}{(1-r)}$$

$$S = \frac{1}{(1-0{,}95)} = 20$$

En este caso, la imagen comprometida, solo llegaría a 20 personas.

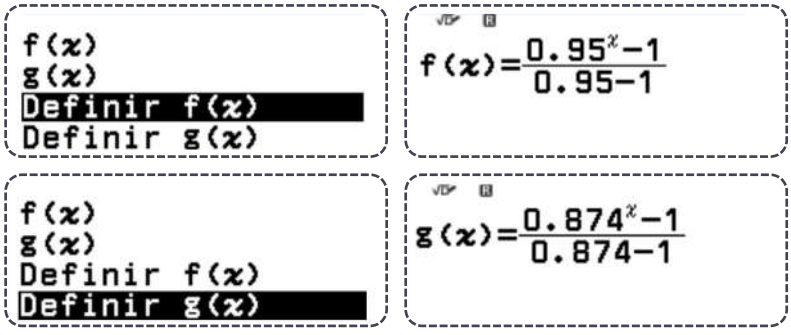
**3. Las campañas de información, prevención y concienciación pretenden disminuir hasta un 8% la difusión de imágenes sin consentimiento. Realiza una tabla comparativa de cómo se difunde la información cuando se ponen en marcha campañas preventivas y cuando no se aplican este tipo de acciones. Reflexiona sobre los resultados que se obtienen, ¿crees que las medidas de esta campaña son suficientes y cumplen con las expectativas?**

## SOLUCIÓN

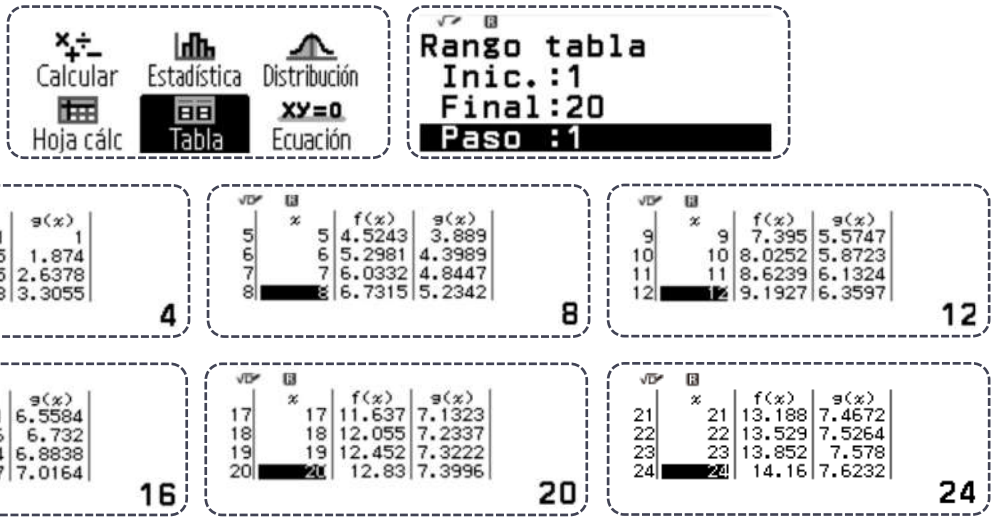
Reducir un 8% los contactos de plena confianza (el 1% de los contactos) con los que compartirías una imagen comprometida, supone enviar esta información al 92% del 1% de 95 = 0,874.

Para comparar la propagación de la imagen en ambos casos, se pueden definir las funciones $f(x)$ (número total de personas que reciben la imagen sin campaña de prevención) y $g(x)$ (número total de personas que reciben la imagen después de aplicar una campaña de prevención).

En el menú Calcular se definen $f(x)$ y $g(x)$ como suma de los $x$ términos de las correspondientes progresiones geométricas:



En el menú Tabla se define el rango para los valores de $x$ entre 1 y 24:

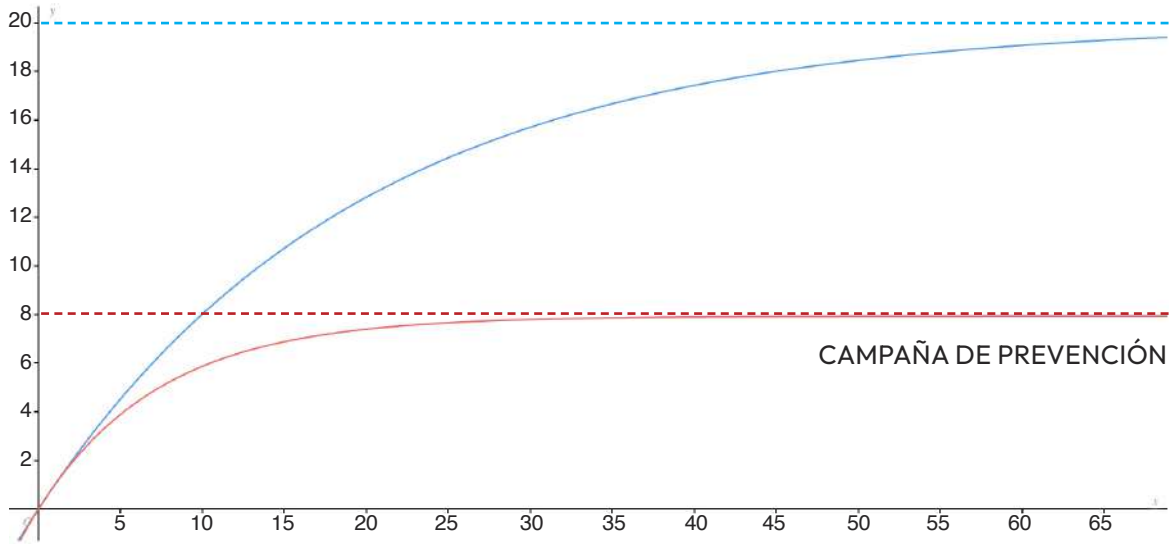



En primer lugar, se observa que cuando el número de contactos es inferior a 100, el número de personas que reciben la imagen disminuye significativamente en comparación con el caso anterior.

Al tratarse de progresiones geométricas con $0<r<1$, la suma de sus términos se estabiliza hacia un número. En el primer caso, cuando no se aplican acciones preventivas la imagen llega a un máximo de 20 personas. Después de la campaña preventiva, la imagen solo llega a un máximo de 8 personas:

$$S = \frac{1}{(1-0{,}874)} = 7{,}93 \cong 8$$

Si se genera el código QR ( ⬆ ⓧ ) se pueden ver las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$:



**4. Después del estudio llevado a cabo, ¿compartirías una imagen comprometida con alguno de tus contactos? ¿Te plantearías reducir tu número de contactos de confianza?**

**Publicar y compartir imágenes de una persona sin su consentimiento es un delito, ya que esto puede atentar contra el derecho al honor, a la intimidad personal y familiar, a la propia imagen de una persona y a la protección de datos. Si las imágenes se utilizan para difamar, acosar, extorsionar o pornografía no consentida, las leyes son estrictas y condenan estas acciones.**

**Para que se pueda usar una imagen personal y difundirla públicamente, es necesario el consentimiento expreso de la persona.**

# Seguridad en los pagos con tarjeta

**1. Con las condiciones descritas, ¿cuál es el código que envía el comercio al banco si se paga el importe máximo con la tarjeta anterior? Si se realiza una compra de 113,35 €, ¿cuál es ahora el código que se envía?**

## SOLUCIÓN

La cantidad máxima que se puede pagar con la tarjeta es de 99 999,99 €.
El código que se envía es:

**108333 930018 081310 276969 999999**

Si el importe de la compra es de 113,35 €, el código que se envía es:

**108333 930018 081310 276960 011335**

**2. Codifica con el código César el mensaje que se envía desde el comercio a la entidad bancaria por la compra realizada anteriormente.**

## SOLUCIÓN

Si se realiza la suma manualmente:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Código inicial** | 1 0 8 3 3 3 | 9 3 0 0 1 8 | 0 8 1 3 1 0 | 2 7 6 9 6 0 | 0 1 1 3 3 5 |
| **Cifrado César** | 3 3 3 3 3 3 | 3 3 3 3 3 3 | 3 3 3 3 3 3 | 3 3 3 3 3 3 | 3 3 3 3 3 3 |
| **Llevada** | 0 1 0 0 0 1 | 0 0 0 0 1 0 | 1 0 0 0 0 0 | 1 1 1 0 0 0 | 0 0 0 0 0 0 |
| **Código cifrado** | 4 4 1 6 6 7 | 2 6 3 3 5 1 | 4 1 4 6 4 3 | 6 1 0 2 9 3 | 3 4 4 6 6 8 |

El mensaje codificado es:

**441667 263351 414643 610293 344668**

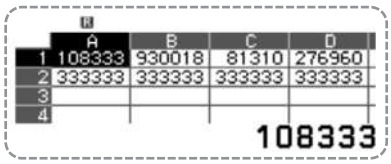
**¿Se puede diseñar este proceso de codificación con la calculadora?**

## SOLUCIÓN

Se introduce el mensaje sin cifrar en la hoja de cálculo. Cada uno de los cinco bloques de seis dígitos se coloca en las respectivas celdas de la fila 1:

*Si la primera cifra de un bloque es cero, este dígito no aparece en la hoja de cálculo.

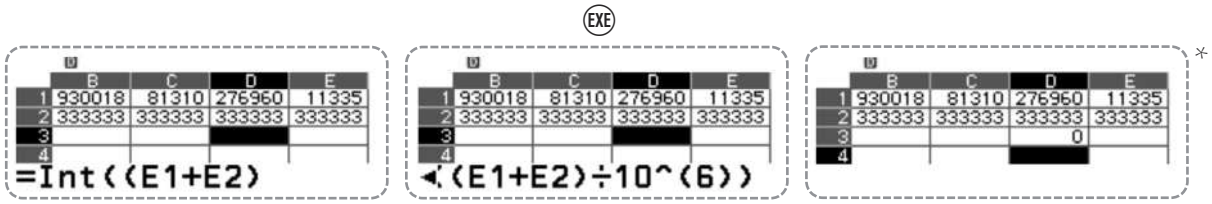
En la fila 2 se escriben los cinco bloques “333333” para el cifrado César:



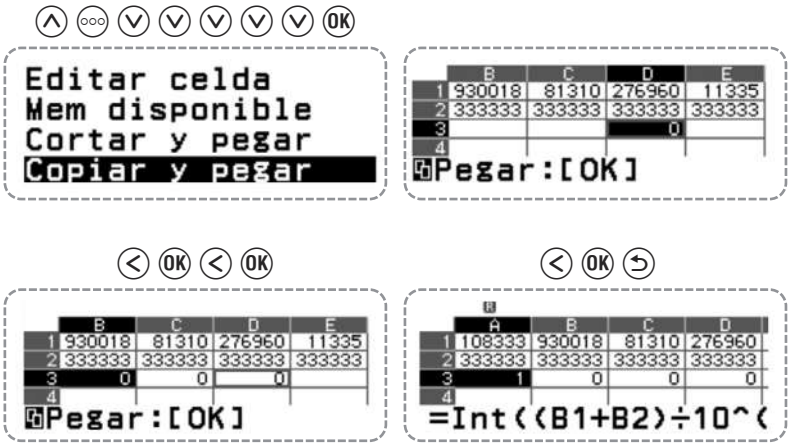

En la fila 3 hay que tener en cuenta las llevadas del bloque de la derecha. Se puede proceder de la siguiente manera:

- Sumar las dos filas del bloque.
- Dividir el resultado entre $10^6$.
- Aplicar la función “Int” al resultado obtenido:
  - Si no hay llevada el resultado es cero.
  - Si hay llevada el resultado es uno.

**Int ( (CELDA FILA 1 + CELDA FILA 2) : $10^6$)**




*La fórmula de la celda D3 se puede copiar y pegar en el resto de las celdas de la fila 3:

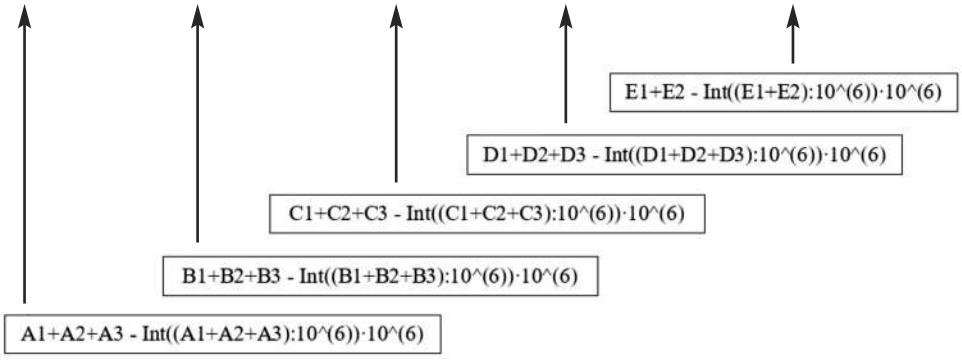



Si se desea ver el valor de las celdas de la fila 3 cuando se desplaza el cursor entre ellas hay que acceder a TOOLS:

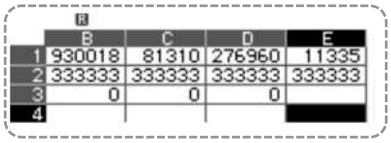
En la fila 4 se suman los números de las 3 filas anteriores. En cada celda debe haber 6 dígitos, cuando hay más, la calculadora muestra el resultado en notación científica. Se puede corregir esta situación con la siguiente expresión:

**CELDA FILA 1+ CELDA FILA 2+ CELDA FILA 3 - Int ( (CELDA FILA 1 + CELDA FILA 2+ CELDA FILA 3) : $10^6$) · $10^6$**

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 108333 | 930018 | 081310 | 276960 | 011335 |
| 2 | 333333 | 333333 | 333333 | 333333 | 333333 |
| 3 | Int((B1+B2): $10^6$) | Int((C1+C2): $10^6$) | Int((D1+D2): $10^6$) | Int((E1+E2): $10^6$) | |
| 4 | 441667 | 263351 | 414643 | 610293 | 344668 |

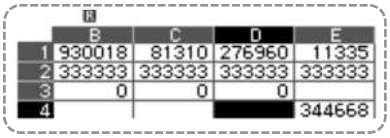



Para la celda E4:




=E1+E2−Int((E1+E2)÷10^(6))×10^(6)

Para el resto de celdas de la fila 4, se escribe la fórmula en D4 y se utiliza de nuevo la función “copiar y pegar” de TOOLS:




=D1+D2+D3−Int((D1+D2+D3)÷10^(6))×10^(6)

**¿Cómo decodifica el banco la información recibida? ¿Se puede automatizar este procedimiento con la calculadora?**

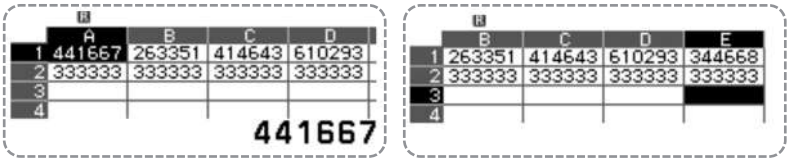
## SOLUCIÓN

Para que el banco pueda decodificar la información debe saber que el código de cifrado es 333333.

Se resta esta cantidad a cada bloque de números:

En la fila 1 se coloca el mensaje cifrado (6 dígitos en cada celda).

En la fila 2 se escriben los cinco bloques “333333” del cifrado César.



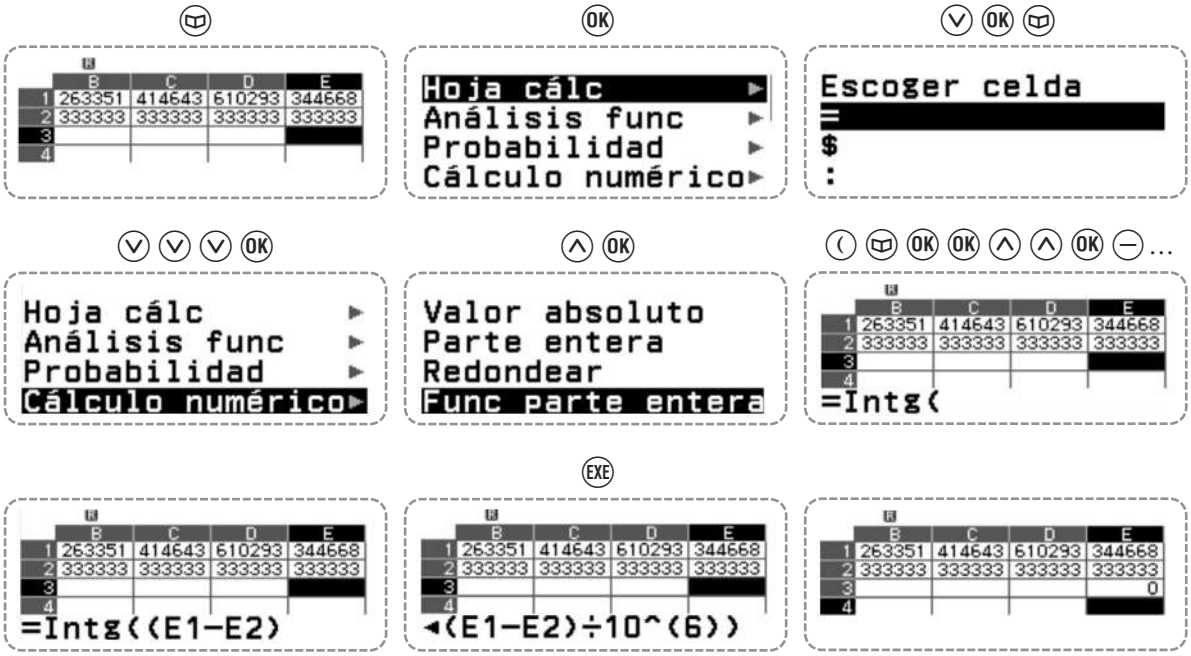

En la fila 3 hay que tener en cuenta las llevadas del bloque de la derecha. Se puede proceder de la siguiente manera:

- Restar a la celda de la fila 1 la celda de la fila 2.
- Dividir el resultado entre $10^6$.
- Aplicar la función “Intg” al resultado obtenido para detectar si ha habido llevadas entre bloques consecutivos:

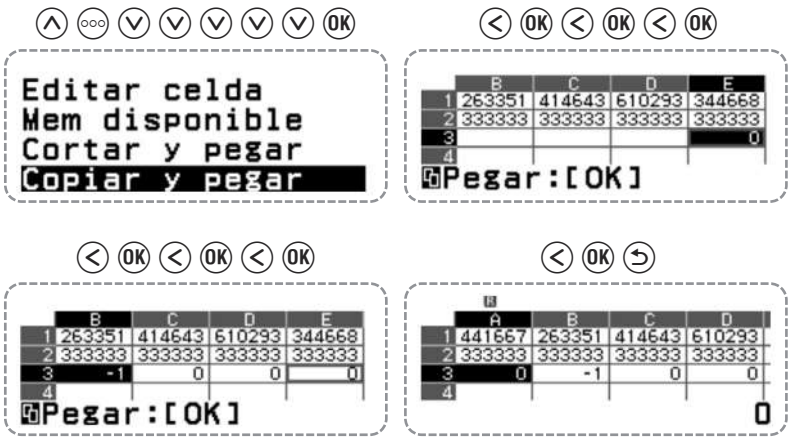
  -Si no había llevada el resultado es 0.

  -Si había llevada el resultado es -1.

**Intg ( (CELDA FILA 1 - CELDA FILA 2) : 10^(6) )**



*La fórmula de la celda E3 se puede copiar y pegar en el resto de las celdas de la fila 3:




En la fila 4 para conseguir el código original hay que tener en cuenta como se consigue la codificación y a partir de ese proceso llevar a cabo la decodificación.

Cada bloque de 6 dígitos que se transmitió al banco sigue esta codificación:

código final = código inicial + 333333 – desborde ($10^6$) + llevada grupo de la derecha

Para encontrar el código inicial se despeja de la expresión anterior:

código inicial = código final – 333333 + desborde ($10^6$) – llevada grupo de la derecha

Hay que tener en cuenta que los valores de la fila 3 (llevadas) son 0 o -1. En la fórmula de la fila 4 para calcular el código inicial se cambia el signo cuando aparece la celda de la fila 3:

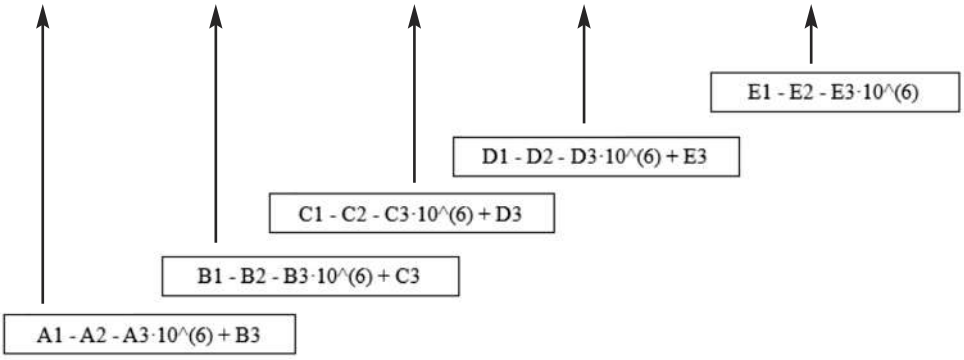
celda A4= celda A1 – 333333 – celda A3 · $10^6$ + celda B3

Recuerda que la llevada 0 o 1, está en la fila 3 de la columna de la derecha cambiada de signo.

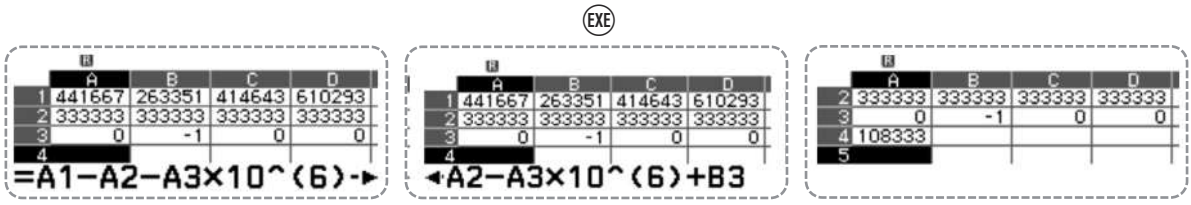
El número decodificado por bloques que aparece en la fila 4 es:

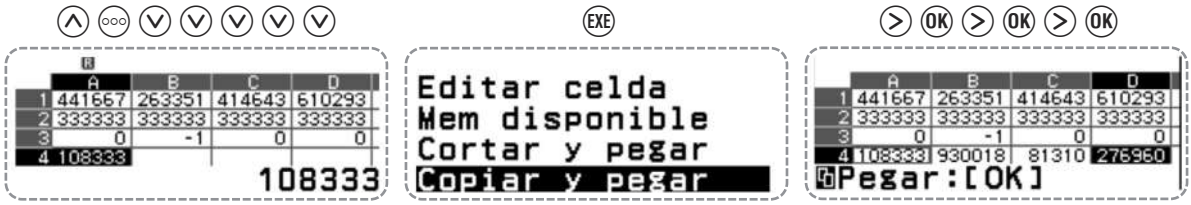
**108333 930018 081310 276960 011335**

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 441667 | 263351 | 414643 | 610293 | 344668 |
| 2 | 333333 | 333333 | 333333 | 333333 | 333333 |
| 3 | Intg((A1 - A2 ):10^(6)) | Intg((B1 - B2):10^(6)) | Intg((C1 - C2):10^(6)) | Intg((D1 - D2):10^(6)) | Intg((E1 - E2):10^(6)) |
| 4 | 108333 | 930018 | 081310 | 276960 | 011335 |

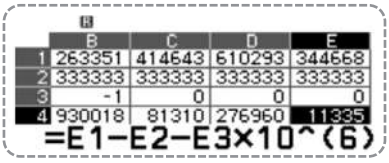



Para las celdas de la fila 4, se escribe la fórmula en A4 y se utiliza la función “copiar y pegar” de TOOLS hasta la celda D4:




Para la celda E4:



**3. ¿Qué piensas de este método de codificación? ¿Qué harías para proteger de un uso fraudulento una tarjeta extraviada o sustraída?**

El método de codificación César es sencillo y a la vez vulnerable. Se puede descifrar de manera relativamente sencilla ya que se conoce el código de cifrado.

Las tarjetas utilizan un PIN para dificultar su uso fraudulento. Actualmente existe la autentificación multifactor que consiste en combinar el PIN con otra contraseña que se recibe en el dispositivo móvil.

La entidad bancaria notifica al usuario de la tarjeta cualquier movimiento de su cuenta pudiendo de esta manera detectar actuaciones fraudulentas. En caso de pérdida o sustracción de la tarjeta hay que avisar cuanto antes a la entidad bancaria para bloquearla. También se recomienda acotar el importe máximo disponible de la tarjeta para que, en caso de fraude, la cantidad sustraída no sea elevada.

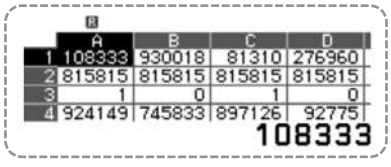
**4. El sistema de salto de frecuencia que diseñó Hedy Lamarr es más seguro que el sistema de codificación César del apartado anterior porque, entre otros aspectos, el comercio y la entidad bancaria intercambian un PIN secreto.**

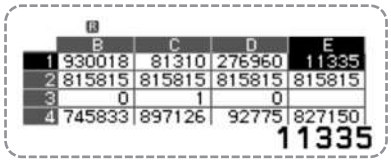
**Se propone como tarea adicional codificar la transacción bancaria anterior con un código de cifrado de tres dígitos (código PIN secreto entre el comercio y el banco) diferente del cifrado César.**

## SOLUCIÓN

Se automatiza el proceso con la hoja de cálculo, se escoge como PIN secreto entre el comercio y la entidad bancaria, por ejemplo, el número 815 y se sigue el proceso de codificación anterior:

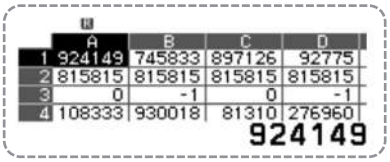
| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 108333 | 930018 | 081310 | 276960 | 011335 |
| **2** | 815815 | 815815 | 815815 | 815815 | 815815 |
| **3** | Int((B1+B2): $10^6$) | Int((C1+C2): $10^6$) | Int((D1+D2): $10^6$) | Int((E1+E2): $10^6$) | |
| **4** | 924149 | 745833 | 897126 | 92775 | 827150 |

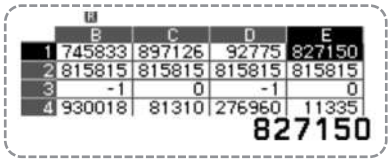


Para la decodificación se sigue el mismo proceso utilizado con el código César:

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 924149 | 745833 | 897126 | 92775 | 827150 |
| **2** | 815815 | 815815 | 815815 | 815815 | 815815 |
| **3** | Intg((A1 - A2 ):10^(6)) | Intg((B1 - B2):10^(6)) | Intg((C1 - C2):10^(6)) | Intg((D1 - D2):10^(6)) | Intg((E1 - E2):10^(6)) |
| **4** | 108333 | 930018 | 081310 | 276960 | 011335 |




**Rutinas para la reflexión: aprendizaje e implementación.**

a) Practica con ambos comandos para completar esta tabla observando el resultado que ofrece la calculadora:

| **Número** | 3,1 | 5 | -2,75 | 0 | $\frac{5}{3}$ | -4,86 | -7 | $\sqrt{2}$ | 1,645 | -0,57 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Int(** | 3 | 5 | -2 | 0 | 1 | -4 | -7 | 1 | 1 | 0 |
| **Intg(** | 3 | 5 | -3 | 0 | 1 | -5 | -8 | 1 | 1 | -1 |

**¿Qué observas? ¿Qué piensas que hace cada comando? Explícalo con tus propias palabras.**

Se observa que las funciones devuelven un número entero. La función **Int** devuelve la parte entera del número y la función **Intg** devuelve el número entero más pequeño que es menor o igual que ese número.

b) Completa ahora la siguiente tabla:

| **A** | 8,65 | -1,5 | $\frac{5}{9}$ | 10 | -7,8 | -5 | $\sqrt{3}$ | 8,3 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **B** | 3,2 | 6 | 2,9 | 4,3 | 4 | -12 | 5 | -6,4 | 1,04 |
| **Intg(A-B)** | 5 | -8 | -3 | 5 | -12 | 7 | -4 | 14 | 7 |

**¿Qué observas? ¿Qué conclusiones puedes sacar?**

Se concluye que con la función **Intg** se puede detectar si un número es más grande que otro:

-Si A es mayor que B, intg(A-B)≥ 0.

-Si A es menor que B, intg(A-B)< 0.

c) Escribe los resultados que esperas obtener en cada celda de las filas 2, 3 y 4. Puedes comprobar los resultados con la calculadora. Explica las conclusiones que obtienes.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 347 | -260 | 1532 | -1354 | 27 421 |
| 2 | A1:1000 | B1:1000 | C1:1000 | D1:1000 | E1:1000 |
| | 0,347 | -0,260 | 1,532 | -1,354 | 27,421 |
| 3 | Int(A2) · 1000 | Int(B2) · 1000 | Int(C2) · 1000 | Int(D2) · 1000 | Int(E2) · 1000 |
| | 0 | 0 | 1000 | -1000 | 27 000 |
| 4 | Intg(A2) · 1000 | Intg(B2) · 1000 | Intg(C2) · 1000 | Intg(D2) · 1000 | Intg(E2) · 1000 |
| | 0 | -1000 | 1000 | -2000 | 27 000 |

# Comunicaciones inalámbricas seguras

**1. Se muestran a continuación las tablas con las notas musicales de cada octava. En cada una de ellas aparece la frecuencia de una nota. Cada grupo debe completar una tabla con las frecuencias de las notas restantes en hercios. Justifica el proceso utilizado para obtener los resultados.**

## SOLUCIÓN

El término general de una progresión geométrica:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Se puede utilizar la frecuencia $a_k$ de la nota dada en cada tabla para obtener el valor de la frecuencia $a_1$ y completar el resto de las frecuencias de la octava a partir del término general de la progresión geométrica.

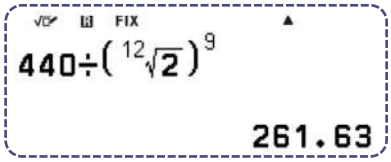
| Octava 4 | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **Hercios** | **$\log_2$** |
| Do | $a_1$ | |
| Do#/Re♭ | | |
| Re | | |
| Re#/Mi♭ | | |
| Mi | | |
| Fa | | |
| Fa#/Sol♭ | | |
| Sol | | |
| Sol#/La♭ | | |
| La | $a_{10} = 440{,}00$ | |
| La#/Si♭ | | |
| Si | | |

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

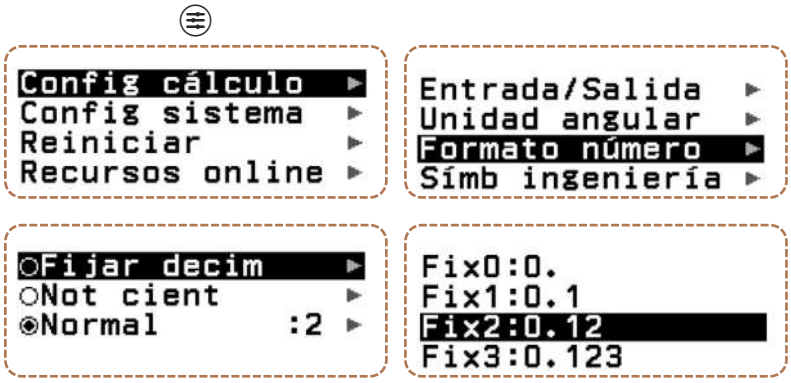
Para $n$ = 10:

$$a_1 = \frac{a_{10}}{r^{10-1}}$$

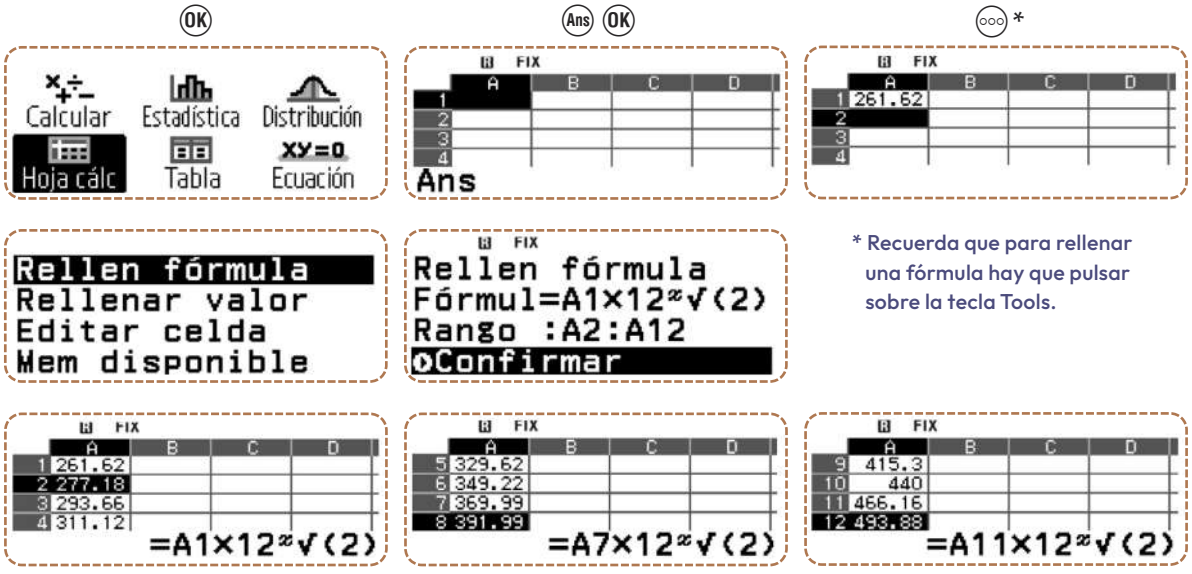
$$a_1 = \frac{440}{(\sqrt[12]{2})^9}$$




Se configura la calculadora con dos cifras decimales (Fix2):




Se calculan las frecuencias $a_n$ hasta completar la octava:




* Recuerda que para rellenar una fórmula hay que pulsar sobre la tecla Tools.

En “Mostrar celda” se escoge “Valor” para que al recorrer la columna aparezcan en las celdas los valores redondeados a las centésimas:

**2. Transforma las frecuencias obtenidas calculando el logaritmo en base 2 de los valores anteriores. Calcula la diferencia entre el resultado de cada nota y el resultado de la nota anterior ¿Qué observas?**

En la columna B se pulsa la tecla Tools para calcular los logaritmos de los valores obtenidos en la columna A:

Los resultados para la octava 4 son:

| Octava 4 | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **Hercios** | **$\log_2$** |
| Do | 261,63 | 8,03 |
| Do#/Re♭ | 277,18 | 8,11 |
| Re | 293,66 | 8,20 |
| Re#/Mi♭ | 311,13 | 8,28 |
| Mi | 329,63 | 8,36 |
| Fa | 349,23 | 8,45 |
| Fa#/Sol♭ | 369,99 | 8,53 |
| Sol | 392,00 | 8,61 |
| Sol#/La♭ | 415,30 | 8,70 |
| La | 440,00 | 8,78 |
| La#/Si♭ | 466,16 | 8,86 |
| Si | 493,88 | 8,95 |

Se observa que en la última columna los valores obtenidos siguen una progresión aritmética de diferencia $d$ = 0,08, con algún error debido a las aproximaciones realizadas.

Se obtienen los siguientes resultados:

| Octava 0 | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **Hercios** | **$\log_2$** |
| Do | 16,35 | 4,03 |
| Do#/Re♭ | 17,32 | 4,11 |
| Re | 18,35 | 4,20 |
| Re#/Mi♭ | 19,45 | 4,28 |
| Mi | 20,60 | 4,36 |
| Fa | 21,83 | 4,45 |
| Fa#/Sol♭ | 23,12 | 4,53 |
| Sol | 24,50 | 4,61 |
| Sol#/La♭ | 25,96 | 4,70 |
| La | 27,50 | 4,78 |
| La#/Si♭ | 29,14 | 4,86 |
| Si | 30,87 | 4,95 |

| Octava 1 | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **Hercios** | **$\log_2$** |
| Do | 32,70 | 5,03 |
| Do#/Re♭ | 34,65 | 5,11 |
| Re | 36,71 | 5,20 |
| Re#/Mi♭ | 38,89 | 5,28 |
| Mi | 41,20 | 5,36 |
| Fa | 43,65 | 5,45 |
| Fa#/Sol♭ | 46,25 | 5,53 |
| Sol | 49,00 | 5,61 |
| Sol#/La♭ | 51,91 | 5,70 |
| La | 55,00 | 5,78 |
| La#/Si♭ | 58,27 | 5,86 |
| Si | 61,74 | 5,95 |

| Octava 2 | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **Hercios** | **$\log_2$** |
| Do | 65,41 | 6,03 |
| Do#/Re♭ | 69,30 | 6,11 |
| Re | 73,42 | 6,20 |
| Re#/Mi♭ | 77,78 | 6,28 |
| Mi | 82,41 | 6,36 |
| Fa | 87,31 | 6,45 |
| Fa#/Sol♭ | 92,50 | 6,53 |
| Sol | 98,00 | 6,61 |
| Sol#/La♭ | 103,83 | 6,70 |
| La | 110,00 | 6,78 |
| La#/Si♭ | 116,54 | 6,86 |
| Si | 123,47 | 6,95 |

| Octava 3 | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **Hercios** | **$\log_2$** |
| Do | 130,81 | 7,03 |
| Do#/Re♭ | 138,59 | 7,11 |
| Re | 146,83 | 7,20 |
| Re#/Mi♭ | 155,56 | 7,28 |
| Mi | 164,81 | 7,36 |
| Fa | 174,61 | 7,45 |
| Fa#/Sol♭ | 185,00 | 7,53 |
| Sol | 196,00 | 7,61 |
| Sol#/La♭ | 207,65 | 7,70 |
| La | 220,00 | 7,78 |
| La#/Si♭ | 233,08 | 7,86 |
| Si | 246,94 | 7,95 |

| Octava 4 | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **Hercios** | **$\log_2$** |
| Do | 261,63 | 8,03 |
| Do#/Re♭ | 277,18 | 8,11 |
| Re | 293,66 | 8,20 |
| Re#/Mi♭ | 311,13 | 8,28 |
| Mi | 329,63 | 8,36 |
| Fa | 349,23 | 8,45 |
| Fa#/Sol♭ | 369,99 | 8,53 |
| Sol | 392,00 | 8,61 |
| Sol#/La♭ | 415,30 | 8,70 |
| La | 440,00 | 8,78 |
| La#/Si♭ | 466,16 | 8,86 |
| Si | 493,88 | 8,95 |

| Octava 5 | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **Hercios** | **$\log_2$** |
| Do | 523,25 | 9,03 |
| Do#/Re♭ | 554,37 | 9,11 |
| Re | 587,33 | 9,20 |
| Re#/Mi♭ | 622,25 | 9,28 |
| Mi | 659,26 | 9,36 |
| Fa | 698,46 | 9,45 |
| Fa#/Sol♭ | 739,99 | 9,53 |
| Sol | 783,99 | 9,61 |
| Sol#/La♭ | 830,61 | 9,70 |
| La | 880,00 | 9,78 |
| La#/Si♭ | 932,33 | 9,86 |
| Si | 987,77 | 9,95 |

| Octava 6 | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **Hercios** | **$\log_2$** |
| Do | 1046,50 | 10,03 |
| Do#/Re♭ | 1108,73 | 10,11 |
| Re | 1174,66 | 10,20 |
| Re#/Mi♭ | 1244,51 | 10,28 |
| Mi | 1318,51 | 10,36 |
| Fa | 1396,91 | 10,45 |
| Fa#/Sol♭ | 1479,98 | 10,53 |
| Sol | 1567,98 | 10,61 |
| Sol#/La♭ | 1661,22 | 10,70 |
| La | 1760,00 | 10,78 |
| La#/Si♭ | 1864,66 | 10,86 |
| Si | 1975,53 | 10,95 |

| Octava 7 | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **Hercios** | **$\log_2$** |
| Do | 2093,00 | 11,03 |
| Do#/Re♭ | 2217,46 | 11,11 |
| Re | 2349,32 | 11,20 |
| Re#/Mi♭ | 2489,02 | 11,28 |
| Mi | 2637,02 | 11,36 |
| Fa | 2793,83 | 11,45 |
| Fa#/Sol♭ | 2959,96 | 11,53 |
| Sol | 3135,96 | 11,61 |
| Sol#/La♭ | 3322,44 | 11,70 |
| La | 3520,00 | 11,78 |
| La#/Si♭ | 3729,31 | 11,86 |
| Si | 3951,07 | 11,95 |

| Octava 8 | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **Hercios** | **$\log_2$** |
| Do | 4186,01 | 12,03 |
| Do#/Re♭ | 4434,92 | 12,11 |
| Re | 4698,64 | 12,20 |
| Re#/Mi♭ | 4978,03 | 12,28 |
| Mi | 5274,04 | 12,36 |
| Fa | 5587,65 | 12,45 |
| Fa#/Sol♭ | 5919,91 | 12,53 |
| Sol | 6271,93 | 12,61 |
| Sol#/La♭ | 6644,88 | 12,70 |
| La | 7040,00 | 12,78 |
| La#/Si♭ | 7458,62 | 12,86 |
| Si | 7902,13 | 12,95 |

**3. Se muestran a continuación las tablas de frecuencias absolutas $f_i$ de las notas musicales que aparecen en dos partituras:**

| Partitura 1 | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **$\log_2$** | **$f_i$** |
| Do - Octava 4 | 8,03 | 3 |
| Do #/ Re ♭ - Octava 4 | 8,11 | 4 |
| Re - Octava 4 | 8,20 | 12 |
| Re #/ Mi ♭ - Octava 5 | 9,28 | 3 |
| Re #/ Mi ♭ - Octava 6 | 10,28 | 2 |
| Fa #/ Sol ♭ - Octava 4 | 8,53 | 2 |
| Fa #/ Sol ♭ - Octava 5 | 9,53 | 1 |
| Sol - Octava 4 | 8,61 | 5 |
| Sol #/ La ♭ - Octava 4 | 8,70 | 2 |
| La – Octava 5 | 9,78 | 5 |
| La #/ Si ♭ - Octava 5 | 9,86 | 3 |
| La #/ Si ♭ - Octava 6 | 10,86 | 1 |

| Partitura 2 | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **$\log_2$** | **$f_i$** |
| Do - Octava 2 | 6,03 | 1 |
| Do # / Re ♭ - Octava 2 | 6,11 | 3 |
| Re - Octava 2 | 6,20 | 5 |
| Re # / Mi ♭ - Octava 3 | 7,28 | 1 |
| Mi - Octava 2 | 6,36 | 2 |
| Fa - Octava 2 | 6,45 | 2 |
| Sol - Octava 2 | 6,61 | 5 |
| Sol - Octava 3 | 7,61 | 2 |
| Sol # / La ♭ - Octava 2 | 6,70 | 7 |
| La - Octava 2 | 6,78 | 6 |
| La - Octava 3 | 7,78 | 2 |
| La # / Si ♭ - Octava 2 | 6,86 | 3 |
| Si - Octava 2 | 6,95 | 3 |
| Si - Octava 3 | 7,95 | 1 |

**a) Si se considera como nivel de dificultad en la ejecución de una pieza musical la dispersión de las notas de la partitura en el teclado (a mayor dispersión, mayor dificultad). ¿Cuál de las dos partituras presenta una mayor dificultad de ejecución?**

## SOLUCIÓN

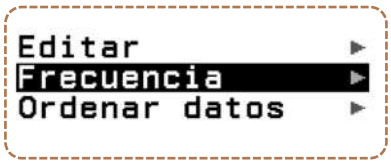
Para comparar la dispersión de las notas musicales en cada partitura se utiliza el coeficiente de variación:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

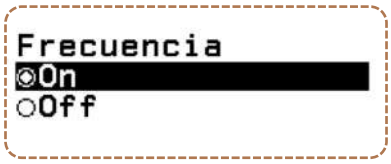
En el menú Estadística se activa la columna de frecuencias:

(OK)

(⋯)

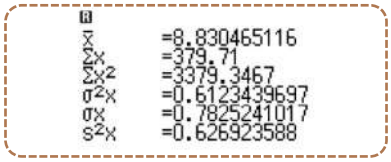



(OK)



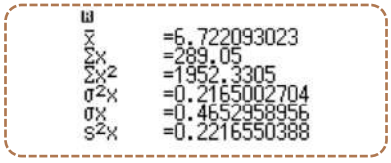

Se introducen los datos de la partitura 1 y se calculan los parámetros estadísticos:

(EXE) (OK)




Para la partitura 2 se repite el procedimiento:

(EXE) (OK)




Se puede hacer una tabla para comparar los resultados obtenidos:

| | Partitura 1 | Partitura 2 |
|---|---|---|
| $\bar{x}$ | 8,83 | 6,72 |
| $\sigma$ | 0,78 | 0,47 |
| $CV$ | 0,09 | 0,07 |

El coeficiente de variación de la partitura 1 es mayor que el de la partitura 2, por lo que la partitura 1 tiene una mayor dificultad de ejecución.

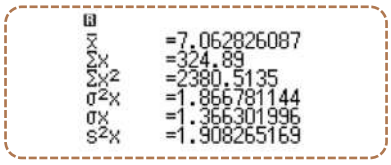
**b) Si se añaden las tres nuevas notas que aparecen a continuación al final de la partitura 2 ¿Crees que afectará a la dificultad de ejecución? Justifica tu respuesta y compara de nuevo la dificultad de las piezas musicales.**

## SOLUCIÓN

Se incluyen las nuevas notas de la partitura 2 y se calculan de nuevo los parámetros estadísticos:

| Partitura 2 - Extra | | |
|---|---|---|
| **Notas** | **$\log_2$** | **$f_i$** |
| La ♯ / Si ♭ - Octava 7 | 11,86 | 1 |
| Si - Octava 7 | 11,95 | 1 |
| Do - Octava 8 | 12,03 | 1 |

Se obtienen los siguientes resultados:




Por tanto:

| | **Partitura 1** | **Nueva Partitura 2** |
|---|---|---|
| $\bar{x}$ | 8,83 | 7,06 |
| $\sigma$ | 0,78 | 1,37 |
| $CV$ | 0,09 | 0,19 |

Añadir estas tres últimas notas en la partitura 2 incrementa de manera significativa el coeficiente de variación, que supera al de la partitura 1. La dificultad de ejecución de la partitura 2 se podría considerar mayor que la de la partitura 1.

Las tres notas añadidas tienen valores muy alejados de la media (valores atípicos, "outlier") que influyen considerablemente en los resultados y merecen un análisis particular: identificación, análisis, tratamiento, documentación, etc. para decidir, por ejemplo, si se incluyen o no, justificando el contexto y los objetivos del estudio.

# Submarinos, ¡un ataque inminente!

**Los resultados han de expresarse redondeados a las centésimas.**

## 1. A LA CAZA DEL SUBMARINO

### 1.1 Submarino a la vista

En el sistema de coordenadas cartesiano (Figura 1), cada unidad representa 1000 yardas. Un buque americano situado en el punto $B$ avista en la superficie a un submarino enemigo en el punto $S_1$.

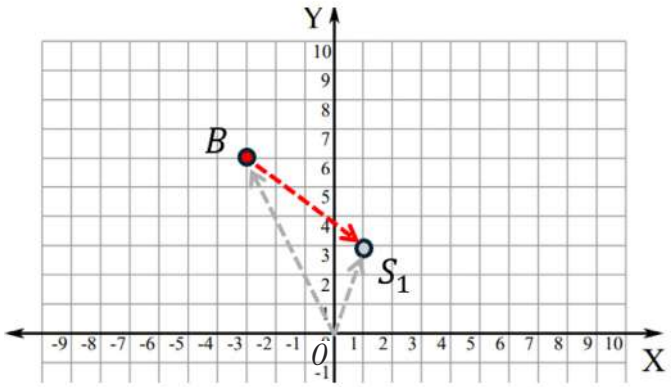



**Figura 1.**

**¿Qué distancia hay entre el buque y el submarino? Expresa el resultado en metros.**

**SOLUCIÓN**

Se calcula el vector $\overrightarrow{BS_1}$ :

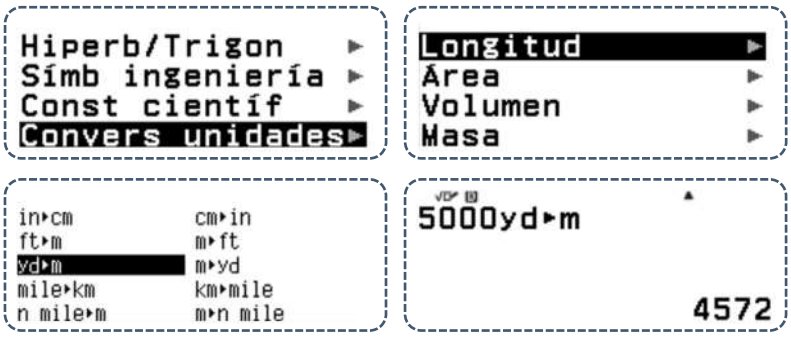
$$\overrightarrow{BS_1} = \overrightarrow{OS_1} - \overrightarrow{OB} = (1,3) - (-3,6) = (4,-3)$$

La distancia de $B$ a $S_1$ es el módulo del vector $\overrightarrow{BS_1}$ :

$$\left|\overrightarrow{BS_1}\right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

La escala es 1:1000 yardas. La distancia entre el buque y el submarino es de 5000 yardas, que equivalen a 4572 metros:

5 0 0 0 ▭ ^ ^ OK OK v v OK EXE



## 1.2 ¡Apunten! ¡Fuego!

Pasados 6 min 40 s, el submarino alcanza la posición $S_2$ navegando a velocidad máxima (Figura 2).

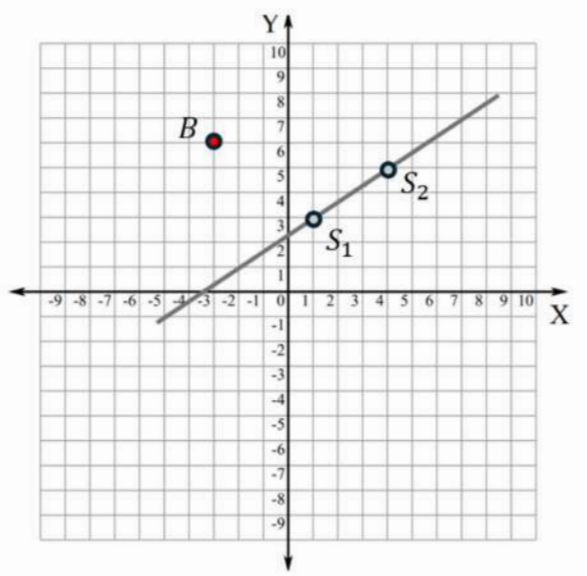



**Figura 2: Nueva ubicación del submarino.**

**a) ¿Cuál es la trayectoria del submarino? ¿A qué velocidad en nudos se desplaza?**

**SOLUCIÓN**

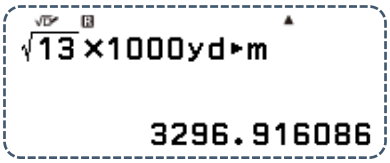
La trayectoria $s$ del submarino es:

$$s:\ y-3=\frac{5-3}{4-1}(x-1)\ \rightarrow\ s:\ y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$$

En 6 min 40 s (400 s), el submarino ha recorrido una distancia de 3296,92 metros:

$$\left|\overrightarrow{S_1S_2}\right|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

$$\sqrt{13}\cdot 1000\ \text{yd}=3296{,}92\ \text{m}$$




La velocidad del submarino en nudos (kn) es:

$$v_s=\frac{3296{,}92}{400}=8{,}24\ {}^{\text{m}}/_{\text{s}}\overset{*}{=}16{,}02\ \text{kn}$$

$$^*1\ \text{kn}=0{,}514\,444\ \text{m/s}$$

**b) Los americanos, que conocen la trayectoria del submarino, lanzan un torpedo que sigue una trayectoria rectilínea de vector dirección $\vec{d}$ = (13, 3), ¿en qué punto de la trayectoria $S$ se produciría el impacto? ¿A qué velocidad en nudos debe lanzarse el torpedo para conseguir hundir al submarino?**

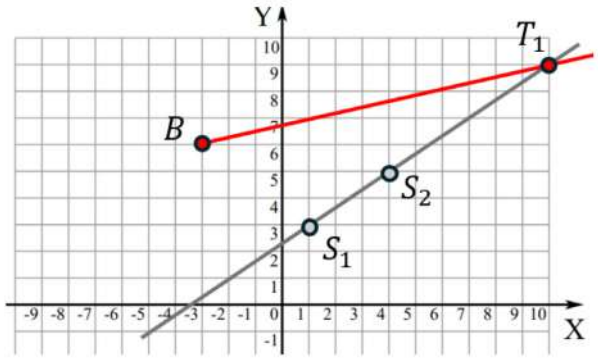
## SOLUCIÓN

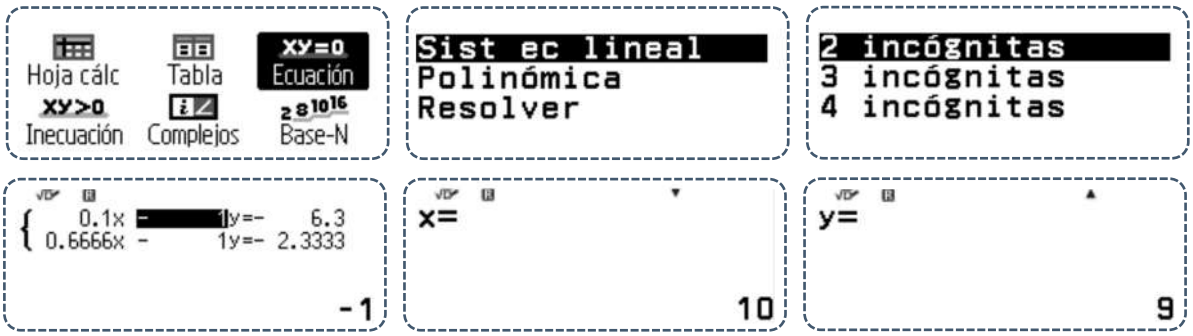
La trayectoria *r* del torpedo es:

$$r: y - 6 = \frac{3}{13}(x + 3) \rightarrow y = \frac{3}{13}x + \frac{87}{13}$$

El punto de corte de las rectas $r$ y $s$ se obtiene resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} \frac{3}{13}x - y = -\frac{87}{13} \\ \frac{2}{3}x - y = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

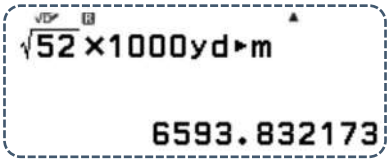



El punto de intersección es $T_1$ (10, 9).

La distancia recorrida por el submarino es:

$$\left|\overrightarrow{S_2T_1}\right| = \sqrt{6^2 + 4^2} \cdot 1000 \text{ yd} = \sqrt{52} \cdot 1000 \text{ yd} = 6593{,}83 \text{ m}$$




Para que el torpedo alcance al submarino en el punto $T_1$ se calcula:

- Tiempo que tarda en llegar el submarino de $S_2$ a $T_1$ manteniendo su velocidad:

$$t_s = \frac{\left|\overrightarrow{S_2T_1}\right|}{v_s} = \frac{\sqrt{52} \cdot 1000}{\frac{\sqrt{13} \cdot 1000}{400}} = 400 \cdot 2 = 800 \text{ s}$$

- Distancia que recorre el torpedo:

$$\left|\overrightarrow{BT_1}\right| = \sqrt{13^2 + 3^2} = \sqrt{178}$$

$$\sqrt{178} \cdot 1000 \text{ yd} = 12\,199{,}62 \text{ m}$$

- Velocidad del torpedo:

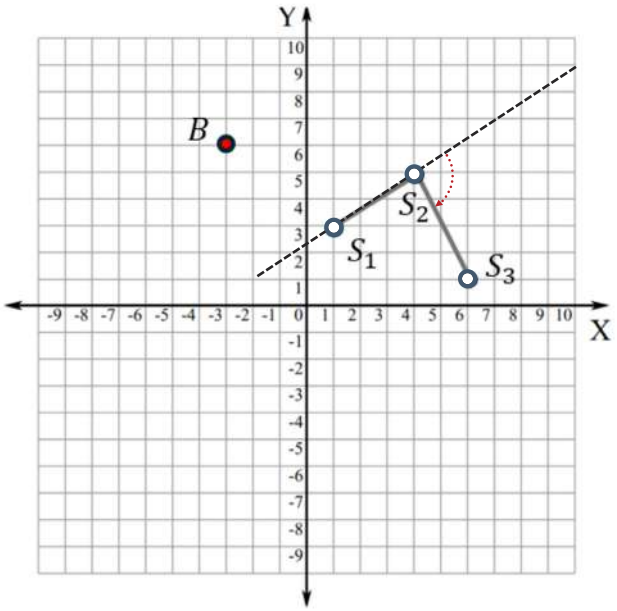
$$v_t = \frac{12\,199{,}62}{800} = 15{,}25 \ {}^{\text{m}}/_{\text{s}} = 29{,}64 \ \text{kn}$$

Es necesario lanzar el torpedo a una velocidad de 29,64 kn para que impacte con el submarino en el punto $T_1$ (10, 9).

### 1.3 Rumbo en zig-zag evasivo

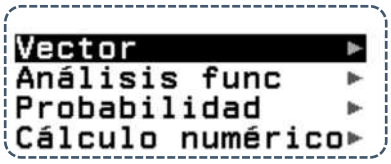
El submarino al detectar un ataque enemigo realiza una maniobra de evasión, cambiando su trayectoria desde el punto $S_2$ hacia el punto $S_3$ = (6, 1). Representa sobre el gráfico la maniobra efectuada por el submarino y calcula el ángulo de giro.

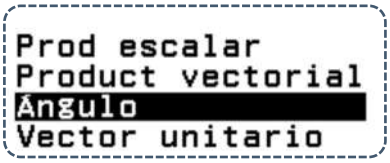
**SOLUCIÓN**

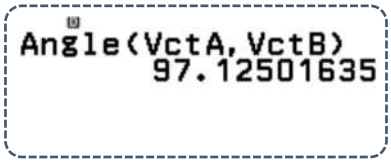


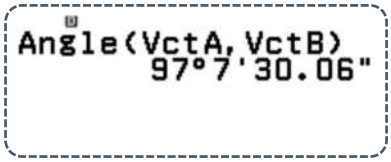

El submarino ha girado el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{S_1S_2} = (3, 2)$ y $\overrightarrow{S_2S_3} = (2, -4)$.

Se definen los dos vectores y se calcula el ángulo de giro:





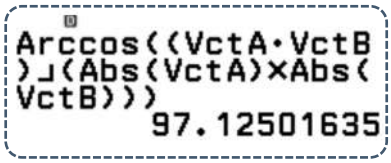




En la maniobra de evasión el submarino ha girado 97° 7’ 30".

Se puede calcular también el ángulo de giro utilizando el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{S_1S_2}$ y $\overrightarrow{S_2S_3}$:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{S_1S_2}\cdot\overrightarrow{S_2S_3}}{|\overrightarrow{S_1S_2}|\cdot|\overrightarrow{S_2S_3}|} = \frac{-2}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{20}}$$

$$\alpha = \arccos\frac{-2}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{20}} = 97{,}13°$$

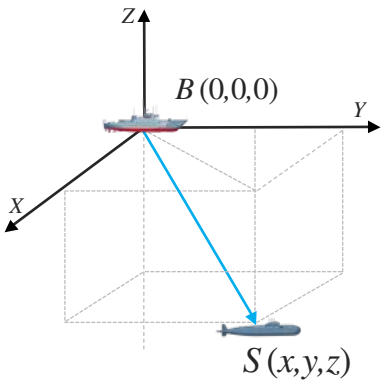



## 2. BAJO EL MAR

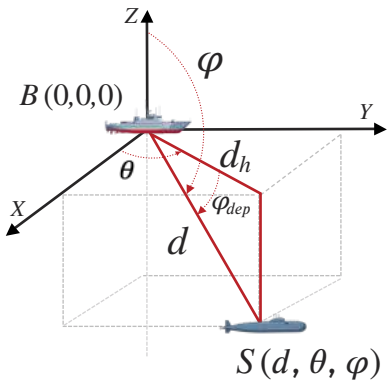
### 2.1 ¡Shhh! Submarino a la escucha

El sonar es el dispositivo de detección que empleaban los buques escolta para localizar a los submarinos. Este sistema emite una señal sonora y analiza los ecos que rebotan de los objetos bajo el mar, determinando así las coordenadas de su posición.

Un buque americano $B$, situado en el origen de coordenadas, intercepta en su sonar a un submarino enemigo $S$. La posición del submarino está en coordenadas rectangulares $S\,(x,\,y,\,z)$ (Figura 3.a) y en coordenadas esféricas $S\,(d,\,\theta,\,\varphi)$ (Figura 3.b), ($d$ es la distancia al origen de coordenadas, $\theta$ es el ángulo respecto al eje $X$ y $\varphi$ es el ángulo respecto al eje $Z$).




3.a Coordenadas rectangulares: $(x,\,y,\,z)$



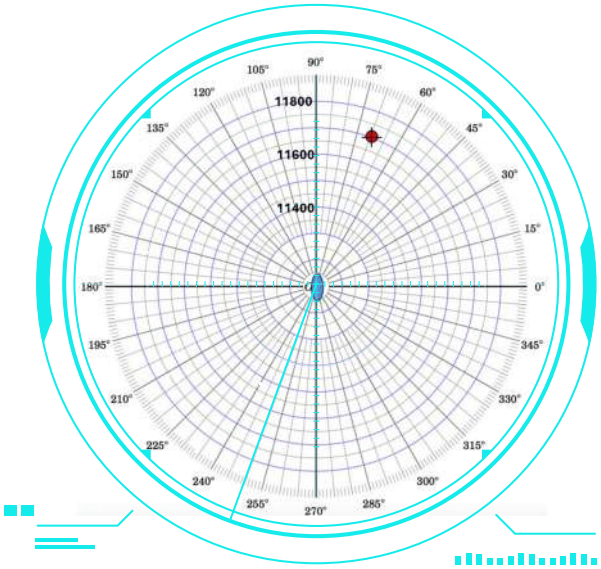

3.b Coordenadas esféricas: $(d,\,\theta,\,\varphi)$

**Figura 3: Detección del submarino sumergido.**

Como se muestra en la figura 3, la distancia $d_h$, es la proyección del vector de posición del submarino $\overrightarrow{BS}$ sobre el plano $XY$. El ángulo de depresión, $\varphi_{dep}$, es el ángulo formado entre el plano $XY$ y el vector de posición del submarino.

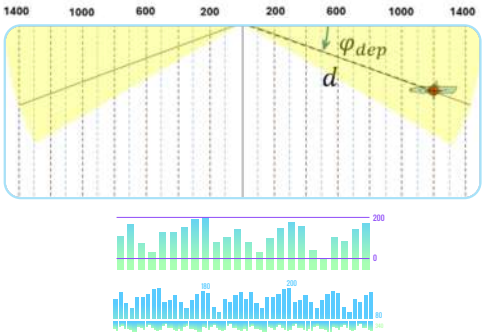
En el sistema de coordenadas del modo de exploración horizontal del sonar se visualiza la ubicación del submarino (punto rojo). El ángulo de depresión $\varphi_{dep}$, se observa en el modo de exploración vertical. (Figura 4)

**Modo de exploración horizontal**




$d_h = 11\,700$ yd
$\theta = 70°$

**Modo de exploración vertical**



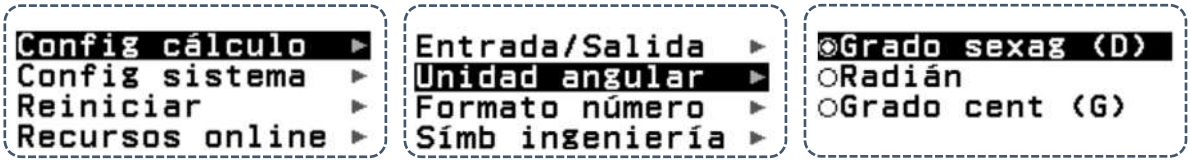

$\varphi_{dep} = 23{,}13°$

**Figura 4: Modos de exploración horizontal y vertical en la pantalla del sonar.**

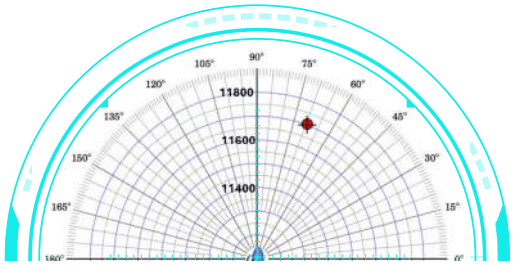
La información del sonar proporciona al buque escolta las coordenadas rectangulares y las coordenadas esféricas de la posición del submarino, ¿cuáles son estas coordenadas?

## SOLUCIÓN

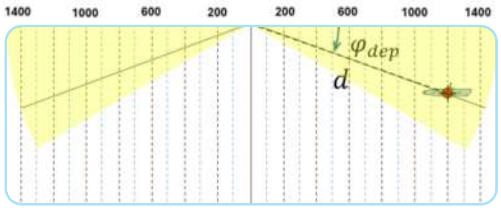
**Para los cálculos posteriores configura la calculadora en grados sexagesimales:**




La información proporcionada por la imagen del sonar es:



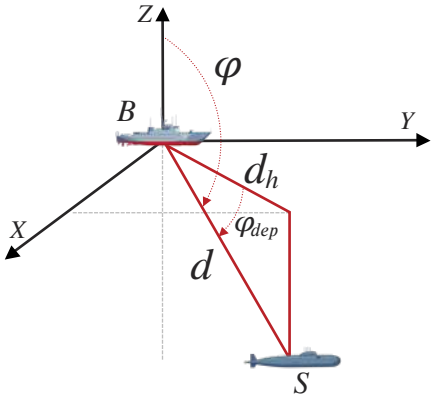

$d_h = 11\,700$ yd
$\theta = 70°$




$\varphi_{dep} = 23{,}13°$

**Coordenadas esféricas:** $(d, \theta, \varphi)$

- Distancia $d$ entre el buque y el submarino:




$$\cos\varphi_{dep} = \frac{d_h}{d} \rightarrow d = \frac{d_h}{\cos\varphi_{dep}} = \frac{11\,700}{\cos 23{,}13°} = 12\,722{,}70 \text{ yd}$$

- Ángulo $\theta = 70°$.

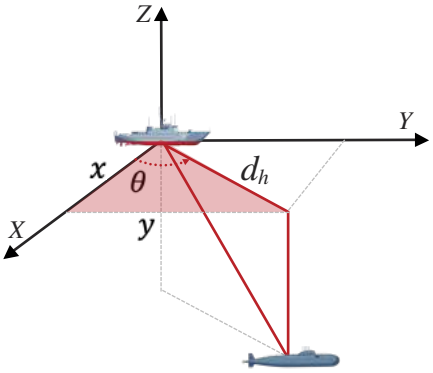
- Ángulo $\varphi$ (a partir de la relación entre $\varphi_{dep}$ y $\varphi$):

$$\varphi = 90° + \varphi_{dep} = 90° + 23{,}13° = 113{,}13°$$

Las coordenadas esféricas del submarino son:

$$S\,(d = 12\,722{,}70, \theta = 70°, \varphi = 113{,}13°)$$

**Coordenadas cartesianas:** $(x,y,z)$



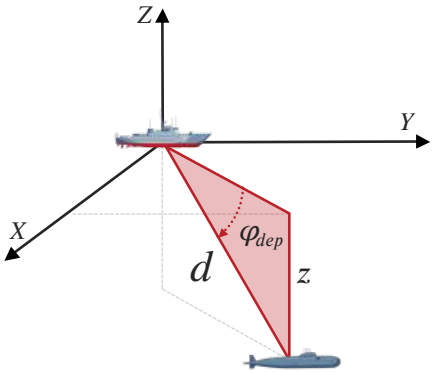

- Coordenada $x$:

$$\cos\theta = \frac{x}{d_h} \rightarrow x = d_h \cdot \cos\theta = 11\,700 \cdot \cos 70° = 4001{,}64 \text{ yd}$$

- Coordenada $y$:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{d_h} \rightarrow y = d_h \cdot \text{sen}\,\theta = 11\,700 \cdot \text{sen}\,70° = 10\,994{,}40 \text{ yd}$$

- Coordenada $z$:

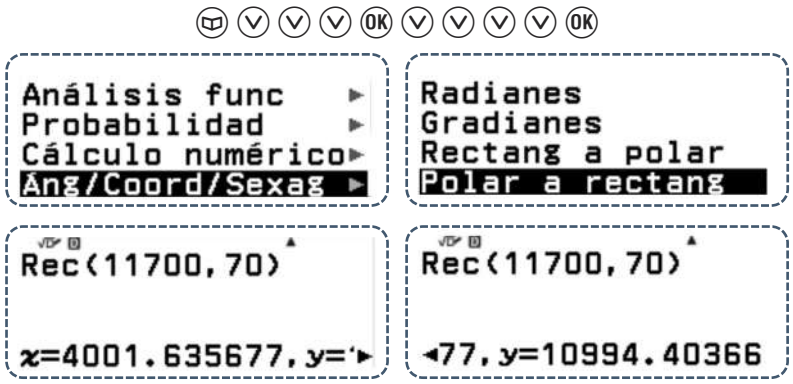



$$\text{sen}\,\varphi_{dep} = \frac{z}{d} \rightarrow z = d \cdot \text{sen}\,\varphi_{dep} = 12\,722{,}70 \cdot \text{sen}\,23{,}13° = 4999{,}71 \text{ yd}$$

El submarino se encuentra a una profundidad de 4999,71 yd y su coordenada $z$ es −4999,71. Las coordenadas cartesianas de la posición del submarino son:

$$(x, y, z) = (4001{,}64,\ 10\,994{,}40,\ -4999{,}71)$$

La calculadora permite la transformación de coordenadas polares a rectangulares (y viceversa) para comprobar los resultados obtenidos:




Se pueden calcular las coordenadas rectangulares mediante las siguientes relaciones

$$x = d \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot \cos\theta = 12\,722{,}70 \cdot \operatorname{sen} 113{,}13^{\circ} \cdot \cos 70^{\circ} = 4001{,}64$$

$$y = d \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{sen}\theta = 12\,722{,}70 \cdot \operatorname{sen} 113{,}13^{\circ} \cdot \operatorname{sen} 70^{\circ} = 10\,994{,}40$$

$$z = d \cdot \cos\varphi = 12\,722{,}70 \cdot \cos 113{,}13^{\circ} = -4997{,}71$$

## 2.2. El submarino se aproxima

A través del sónar se realiza el seguimiento del submarino. $S_1$ son las coordenadas cartesianas de su posición en un primer instante y $S_2$ sus coordenadas en un instante posterior. Los valores de las coordenadas se expresan en miles de yardas (Figura 5):

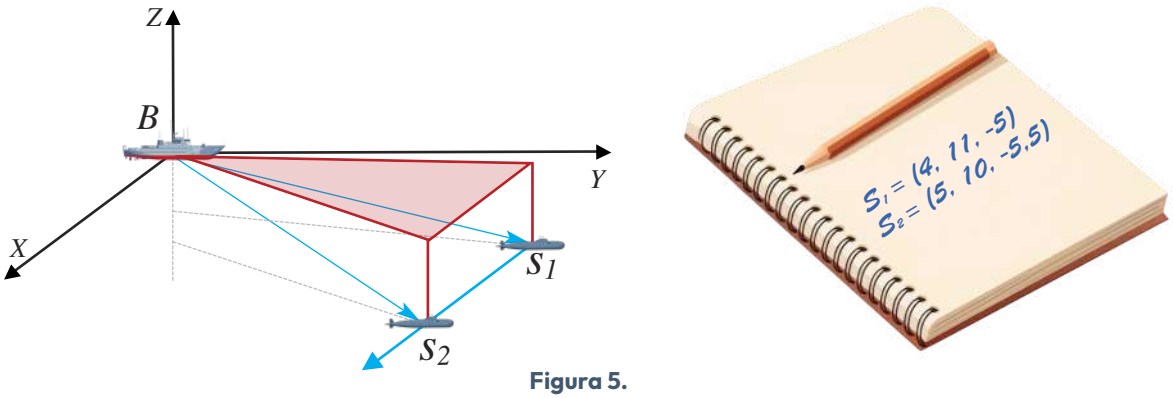



**Figura 5.**

**a) Si el submarino sigue la trayectoria rectilínea definida por los puntos anteriores y los torpedos que se lanzan desde el buque B tienen un alcance de 12 500 yardas, justifica si existe posibilidad de impacto.**

### SOLUCIÓN

Sea $s$ la recta definida por los puntos $S_1$ y $S_2$ (Figura 6):

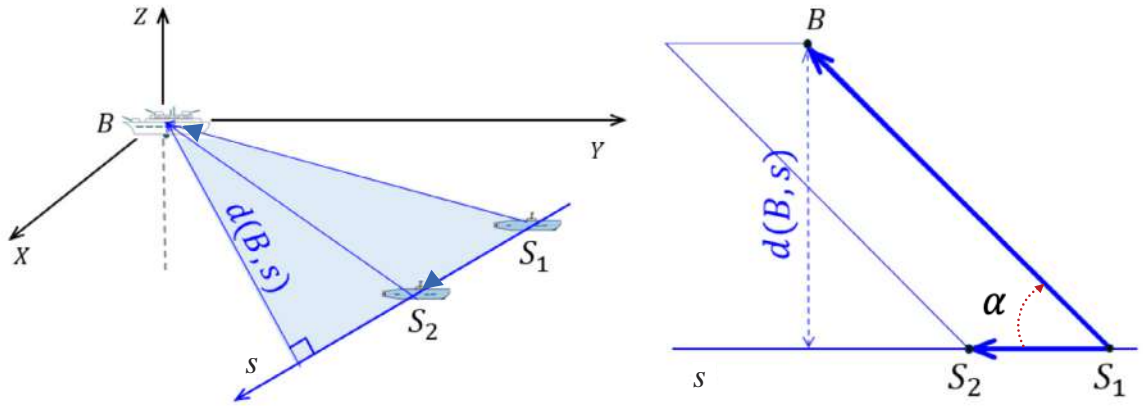



**Figura 6.**

La distancia del punto B a la recta $s$ es:

$$|\overrightarrow{S_1B} \times \overrightarrow{S_1S_2}| = |\overrightarrow{S_1B}| \cdot |\overrightarrow{S_1S_2}| \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{d(B,s)}{|\overrightarrow{S_1B}|} \rightarrow \operatorname{sen}\alpha \cdot |\overrightarrow{S_1B}| = d(B,s)$$

$$|\overrightarrow{S_1B} \times \overrightarrow{S_1S_2}| = |\overrightarrow{S_1S_2}| \cdot d(B,s)$$

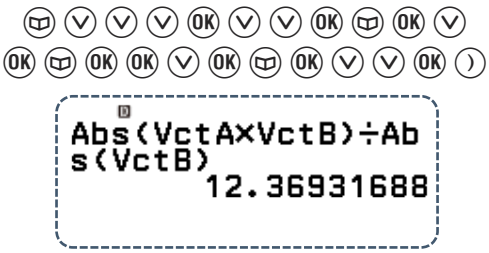
$$d(B,s) = \frac{|\overrightarrow{S_1B} \times \overrightarrow{S_1S_2}|}{|\overrightarrow{S_1S_2}|}$$

En el menú Vector se definen los vectores $\overrightarrow{S_1B}$ y $\overrightarrow{S_1S_2}$ :

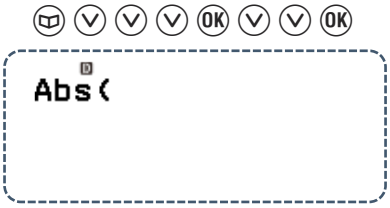
$$\overrightarrow{S_1B} = B - S_1 = (-4, -11, 5)$$

$$\overrightarrow{S_1S_2} = S_2 - S_1 = (1, -1, -0,5)$$

Se calcula la distancia:




Para calcular el módulo de un vector se utiliza la función “Abs”:




La distancia mínima entre el buque y el submarino es de 12 369 yardas, por lo que existe posibilidad de impacto de un torpedo.

**b) Si existe posibilidad de impacto, ¿cuál es la dirección que ha de seguir el torpedo para alcanzar al submarino cuando se encuentra a la mínima distancia del buque?**

Se proponen dos formas de resolución:

- 1. Proyección del vector $\overrightarrow{S_1B}$ sobre la recta $s$.

La trayectoria $r$ de mínima distancia que sigue el torpedo es perpendicular a la recta $s$ que sigue el submarino:

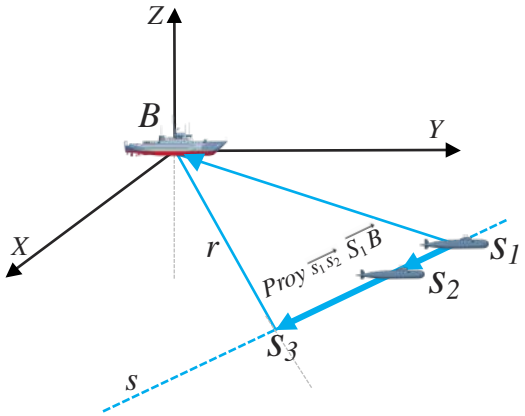



**Figura 7.**

Se halla el punto $S_3$ a través de la proyección ortogonal $Proy_{\overrightarrow{S_1S_2}}\overrightarrow{S_1B}$ :

$$\overrightarrow{S_1S_3} = \left|Proy_{\overrightarrow{S_1S_2}}\overrightarrow{S_1B}\right| \cdot \vec{u}_{\overrightarrow{S_1S_2}}$$

$$S_3 = S_1 + \left|Proy_{\overrightarrow{S_1S_2}}\overrightarrow{S_1B}\right| \cdot \vec{u}_{\overrightarrow{S_1S_2}}$$

donde $\vec{u}_{\overrightarrow{S_1S_2}} = \frac{\overrightarrow{S_1S_2}}{|\overrightarrow{S_1S_2}|}$ es el vector unitario de $\overrightarrow{S_1S_2}$.

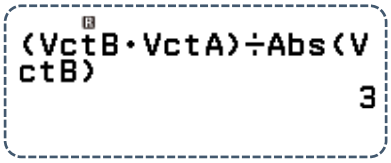
- Se calcula $\left|Proy_{\overrightarrow{S_1S_2}}\overrightarrow{S_1B}\right|$:

$$\overrightarrow{S_1S_2}\cdot\overrightarrow{S_1B}=\left|\overrightarrow{S_1S_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{S_1B}\right|\cdot\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{\left|Proy_{\overrightarrow{S_1S_2}}\overrightarrow{S_1B}\right|}{\left|\overrightarrow{S_1B}\right|}$$

$$\overrightarrow{S_1S_2}\cdot\overrightarrow{S_1B}=\left|\overrightarrow{S_1S_2}\right|\cdot\left|Proy_{\overrightarrow{S_1S_2}}\overrightarrow{S_1B}\right|$$

$$\left|Proy_{\overrightarrow{S_1S_2}}\overrightarrow{S_1B}\right|=\frac{\overrightarrow{S_1S_2}\cdot\overrightarrow{S_1B}}{\left|\overrightarrow{S_1S_2}\right|}$$




- Se calcula el vector unitario $\vec{u}_{\overrightarrow{S_1S_2}}$ :

$$\vec{u}_{\overrightarrow{S_1S_2}}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

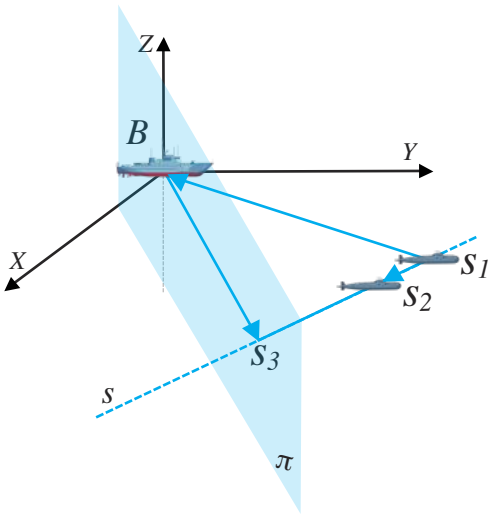
- Se calcula $S_3$:

$$S_3=S_1+\left|Proy_{\overrightarrow{S_1S_2}}\overrightarrow{S_1B}\right|\cdot\vec{u}_{\overrightarrow{S_1S_2}}=(4,11,-5)+3\cdot\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)=(4,11,-5)+(2,-2,-1)=(6,9,-6)$$

El vector director de la recta *r* que sigue el torpedo es:

$$\overrightarrow{BS_3}=(6,9,-6)$$

- 2. Intersección del plano $\pi$ ($\pi$ es normal a $s$ y contiene a $B$) con la recta $s$.




El vector normal al plano es:

$$\vec{n} = \overrightarrow{S_1S_2} = S_2 - S_1 = (1, -1, -0.5)$$

El plano $\pi$ es:

$$\pi: x - y - 0{,}5z = 0$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta $s$:

$$\begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 11 - \lambda \\ z = -5 - 0{,}5\,\lambda \end{cases}$$

Se sustituyen en la ecuación general del plano para hallar $\lambda$:

$$(4 + \lambda) - (11 - \lambda) - 0{,}5 \cdot (-5 - 0{,}5\,\lambda) = 0$$

$$4 + \lambda - 11 + \lambda + 2{,}5 + 0{,}25\lambda = 0$$

$$2{,}25\lambda = 4{,}5$$

$$\lambda = 2$$

Se sustituye el valor de $\lambda$ en las ecuaciones paramétricas de la recta $s$ para hallar $S_3$:

$$\begin{cases} x = 4 + 2 = 6 \\ y = 11 - 2 = 9 \\ z = -5 - 0{,}5 \cdot 2 = -6 \end{cases}$$

El vector director de la recta que sigue el torpedo es:

$$\overrightarrow{BS_3} = (6, 9, -6)$$

# Notas

# Notas

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

CASIO
EDUCACIÓN