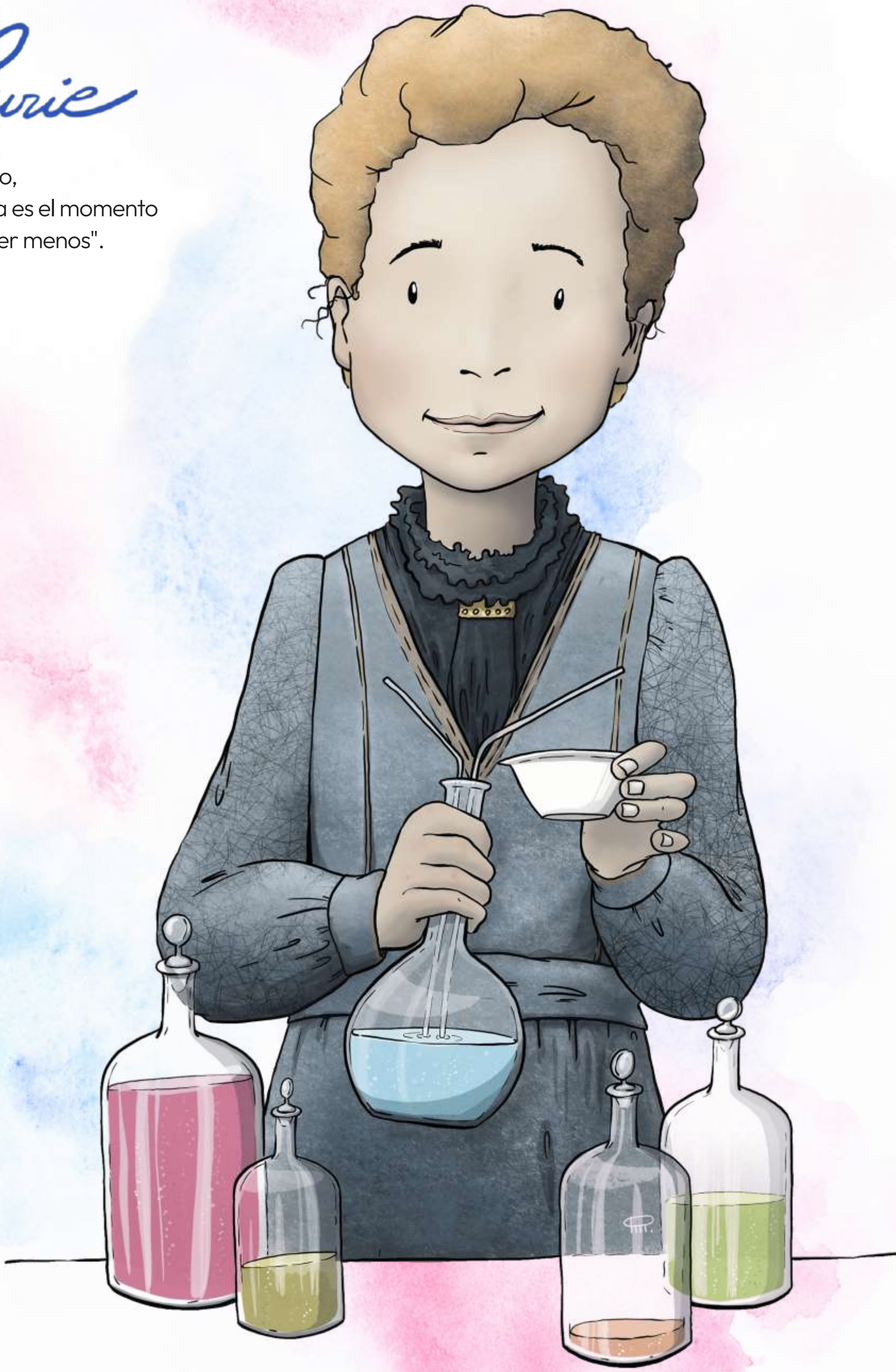
Número 1

Explorando la ciencia con...

Marie Curie

"Nada en la vida debe ser temido,
solamente comprendido. Ahora es el momento
de comprender más, para temer menos".



Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

CASIO División Educativa

Número 1: EXPLORANDO LA CIENCIA CON MARIE CURIE (Julio 2024)

ISSN Versión Impresa: 2938-849X
ISSN Versión Digital: 2938-8503
Depósito legal: B -13538-2024

AUTORES

Fernando Algaba García
Lluís Bonet Juan
Miguel García Pardillos
Ángel Manuel Gónzalez Guillen
Yolanda Marquez Moreno
José Aurelio Pina Romero
Patricia Salvador Selma
Claudia Lázaro del Pozo

EDITADO POR

CASIO ESPAÑA División Educativa
C/Josep Pla. 2 Torre B2 Planta 12
08019 Barcelona
info-calculadoras@casio.es
www.edu-casio.es

Federación Española de Sociedades
de Profesores de Matemáticas (FESPM)
C/ Hermanos Carvajal, 5
23740 Andujar, Jaén
fespm@fespm.es
www.fespm.es

Ilustración de portada: Raquel Riba Rossy

Orientaciones para utilizar este cuaderno

El objetivo de este cuaderno es promover en el aula un trabajo más competencial con el alumnado a través de la vida de una mujer científica. Las investigaciones y logros de Marie Curie han supuesto grandes avances para la mejora de la salud de las personas (ODS 3). La educación de calidad (ODS 4) promueve el uso de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC), importantes para conseguir aprendizajes más significativos y clave para alcanzar otros objetivos de desarrollo sostenible. Avanzar en la igualdad de género (ODS 5) es fundamental para promover la educación científica entre las jóvenes estudiantes y garantizar una sociedad más equitativa.

Este cuaderno está orientado para las etapas de Secundaria y Bachillerato. Las actividades planteadas y relacionadas con episodios de la vida de Marie Curie están señaladas con el simbolo . Para cada actividad se propone en la tabla adjunta el curso al que está dirigida. Las indicadas para los niveles académicos inferiores, se pueden trabajar como conocimientos previos vinculados al objeto de aprendizaje en los niveles superiores.

Actividad	**Curso**	**Material**	
		fx-82/85SP CW	fx-570/991SP CW
Las bicicletas nupciales	1° y 2° ESO	✓	✓
Una científica meticulosa	3° y 4° ESO		✓
Cristalización fraccionada	1° y 2° ESO: Apdo. 1	✓	✓
	2° y 3° ESO: Apdo. 2		✓
	4° ESO: Apdo. 3	✓	✓
	4° ESO: Apdo. 4		✓
	Bachillerato: Apdo. 5		✓
Fuentes naturales de radiación	1° y 2° ESO	✓	✓
Un legado de valor incalculable	3° y 4° ESO/ Bachillerato	✓	✓

Las propuestas son independientes entre sí (las respuestas no están vinculadas) y la realización de una actividad no implica tener que hacer otras.

Material

Calculadoras científicas CASIO

fx-82SP CW (Pila)
fx-85SP CW (Solar)

fx-991SP CW (Solar)
fx-570SP CW (Pila)

En el libro "Actividades con calculadora científica para el aula II", la actividad "Desintegración radioactiva" (pág. 111) hace referencia a Marie Curie.

Marie Curie

Maria Salomea Sklodowska, más conocida como Marie Curie, nació en la ciudad polaca de Varsovia el 7 de noviembre de 1867.

A los 10 años empezó a asistir a la escuela para niñas y a la edad de 16 años se graduó con medalla de oro. No pudo acceder a la Universidad de Varsovia porque no se admitían mujeres y estudió en una universidad clandestina. En 1891 se trasladó a París para estudiar Física y Matemáticas en la Universidad de La Sorbona finalizando sus estudios en 1894.

Marie y su hermana Bronia se costearon mutuamente los estudios universitarios. Bronia estudió medicina en París gracias al dinero que Marie ganaba como institutriz.

Ese mismo año, la Sociedad para el Fomento de la Industria Nacional le encargó una investigación sobre las propiedades magnéticas de diversos aceros y así fue como empezó su carrera científica. Fue entonces cuando conoció a Pierre Curie, un importante físico francés con quien contrajo matrimonio en julio de 1895. En su viaje de novios recorrieron la Bretaña francesa con unas **bicicletas** que habían recibido como regalo de bodas.

Gracias a los estudios sobre las radiaciones, similares a los rayos X de Henri Becquerel, Marie eligió la radiación de uranio como campo de investigación para su tesis doctoral. Pierre, que trabajaba en la Escuela Municipal de Física y Química, la animó y la ayudó, consiguiendo un precario laboratorio donde pudieron empezar sus investigaciones. Marie confirmó que los rayos eran una propiedad intrínseca del uranio y que su intensidad era proporcional a la cantidad de uranio presente en la muestra.

La pechblenda es un mineral de forma amorfa que está compuesto en su mayoría por uranio y por otros elementos como torio, polonio y radio.

A raíz de sus estudios, observaron que en la pechblenda había una radiación de mayor energía que la del uranio, lo que contradecía sus hipótesis, e intuyeron, que debía haber otros elementos o compuestos con esta propiedad. Para identificarlos, la pareja utilizó una nueva técnica de análisis. Al repetir muchas veces el ciclo de separación química de disolución con ácidos, obtuvieron porciones con una radiación cada vez mayor. El resultado fue una muestra con una actividad 400 veces mayor a la del uranio puro. Habían descubierto un nuevo elemento químico, el polonio.

1867
Nace Maria Salomea Sklodowska.

1883
Maria finaliza la escuela Secundaria.

1893
Obtiene la Licenciatura de Física.

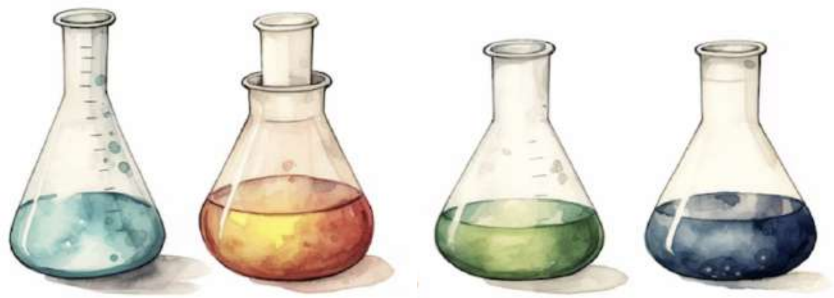
1894
Obtiene la Licenciatura de Matemáticas.

1895
Contrae matrimonio con Pierre Curie.

1897
Nace su hija Irène. Marie empieza su tesis doctoral.

1898
Marie y Pierre hacen público el descubrimiento del polonio y el radio.

1900
Marie publica dos tesis sobre la naturaleza de la radioactividad.



En esta época Marie hizo otro descubrimiento, había otro compuesto que emitía más radiación que el uranio puro y el polonio, lo que contradecía que la actividad era proporcional a la cantidad de uranio. Las meticulosas **anotaciones** se multiplicaron en sus cuadernos y repitió los experimentos muchas veces ante estos resultados anómalos, abriendo así un nuevo campo de investigación. Solo había una explicación, aquellos minerales debían contener alguna sustancia desconocida muy activa.

Los Curie consiguieron toneladas de pechblenda con el objetivo de aislar una cantidad del elemento desconocido que permitiera confirmar su existencia. Retomaron su trabajo de investigación y realizaron infinitos procesos de separación para confirmar sus hipótesis. Por cada tonelada de mineral se obtenían entre 10 y 20 kg de sulfatos con una pequeña proporción de sustancia desconocida. Al separarlos, obtuvieron un precipitado de varios cloruros que aislaron mediante **cristalización fraccionada** . En una de las muestras de cloruro la radiactividad llegó a ser un millón de veces superior a la del uranio puro. Habían descubierto un nuevo **elemento radiactivo**, el radio.

El radio resultó ser un elemento extremadamente difícil de obtener. Tras 4 años de trabajo, los Curie pudieron separar 100 mg (la cabeza de una cerilla).

En 1903 se concedió el premio Nobel de Física a Marie y Pierre Curie y a Henri Becquerel por el descubrimiento de los elementos radiactivos. En 1911 Marie recibió un segundo Nobel, el de Química, por sus investigaciones sobre el radio y sus compuestos.

Marie Curie ha sido la primera persona en lograr dos premios Nobel en dos disciplinas distintas, Física y Química.

Todo su trabajo e investigaciones son un legado de valor incalculable, en **radiología** para el diagnóstico de enfermedades y en **radioterapia**, con múltiples aplicaciones en los tratamientos del cáncer. Dos diciplinas que hoy continúan salvando vidas.

1902
Marie determina el peso atómico del radio.

1903
Premio Nobel de Física.

1904
Nace su hija Éve

1906
Muere Pierre Curie.

1911
Premio Nobel de Química en Estocolmo.

1914
Se crea el instituto del Radio en París, del que es nombrada directora.

1935
Marie fallece en la Clínica Sancellemoz (Passy, Francia).

Actividades propuestas, relacionadas con episodios de la vida de Marie Curie.

Las bicicletas nupciales

1. En 1885 se inventó la bicicleta moderna, con 2 ruedas iguales y cadena de transmisión. Cinco años después apareció el neumático de caucho.

Era julio de 1895 y las bicicletas del matrimonio Curie tenían las siguientes características, un plato de 56 dientes y una corona trasera de 20 dientes. El diámetro de las ruedas era aproximadamente de 700 mm (incluyendo el neumático).

¿Cuánto avanzaba la bicicleta de Marie Curie en cada pedalada?

2. Las bicicletas de competición actuales suelen tener dos platos de 50 y 34 dientes respectivamente. El cassette trasero integra al menos 10 piñones y cada uno puede tener de 11 a 30 dientes.

¿Qué combinación de marchas plato/piñón hay que utilizar para avanzar aproximadamente los mismos metros por pedalada que alcanzaba la bici de Marie Curie?

Ordena estas combinaciones con los resultados que has obtenido.

3. ¿Cuántas pedaladas por minuto tendría que dar Marie Curie para viajar a 30 km/h?

Éve Curie explica en la biografía de su madre cómo eran las vacaciones de sus padres: "no implicaban descanso, sino moverse en bicicleta de un lado para otro". En 1900 recorrieron en bicicleta las costas del canal de la Mancha, en 1901 fueron a Pouldu, en 1902 a Arromanches, y en 1903 a Treport y Saint-Trojean.

Una científica meticulosa

Marie Curie era una científica muy ordenada y sistemática, por lo que debía tener muy bien organizada la información de las investigaciones que realizaba.
En la tabla se muestran algunos datos de elementos químicos de los que disponía en su laboratorio: masa atómica, masa disponible, número de moles o número de átomos, etc.

Completa la tabla y organiza los datos haciendo uso de la hoja de cálculo de la calculadora, automatizando y simplificando al máximo los procesos.

Elemento	Masa atómica	Masa disponible	Número de moles	Número de átomos
Uranio (U)	238 uma	50 g		
Polonio (Po)	209 uma	60 g		
Torio (Th)	232 uma	32 g		
Radio (Ra)	226 uma	24 g		

Para completar la tabla con éxito, puedes seguir el ejemplo desarrollado que hay a continuación.
¿Cómo se calculan el número de moles y el número de átomos del uranio disponible?

Para calcular el número de átomos de uranio (U) en 50 gramos, primero se necesita determinar cuántos moles de uranio hay en la masa disponible.

Conociendo la masa de la sustancia y su masa molar (expresada en gramos/mol), se utiliza la siguiente fórmula para calcular los moles:

$$\textit{Número de moles} = \frac{\textit{masa de la sustancia } (g)}{\textit{masa molar del elemento} \left(\frac{g}{mol}\right)}$$

El número de moles de uranio es:

$$\textit{Número de moles } U = \frac{50\ g}{238\ \frac{g}{mol}} \approx 0{,}21\ \textit{moles de uranio}$$

A continuación, se utiliza el número de Avogadro (N_A) para encontrar el número de átomos:

Número de átomos de uranio = Número de moles de uranio · N_A

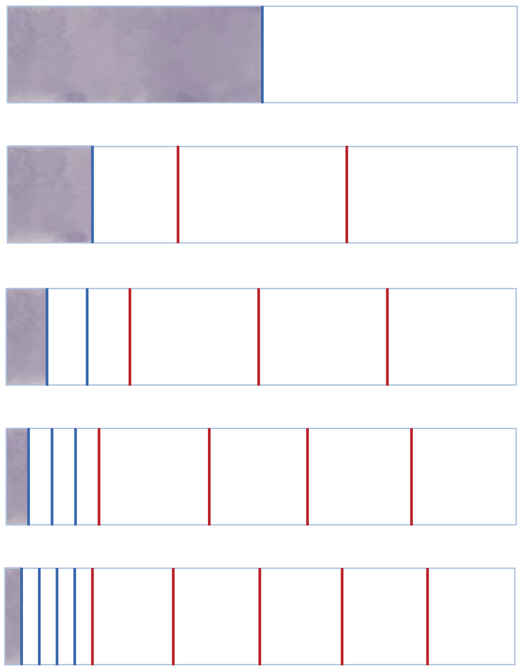
Número de átomos U = 0,21 moles · 6,022 · 10^{23} átomos/mol ≈ 1,26 · 10^{23} átomos de uranio

Cristalización fraccionada

Tras conseguir una tonelada de pechblenda Marie Curie empleó un laborioso proceso de separación química conocido como cristalización fraccionada del cloruro. Al disolver el compuesto y evaporar la disolución, el cloruro de radio cristaliza en primer lugar por ser menos soluble. De esta forma, en cada nueva disolución se puede separar un compuesto que contiene progresivamente mayor proporción de radio.

1. La siguiente figura representa un hipotético modelo de fraccionamiento con el que Marie Curie iría progresivamente aislando el radio. Cada una de las barras representa la cantidad total de mineral tratado, siendo la parte coloreada, la cantidad del **compuesto de radio** obtenido en cada fase.

a) Completa en cada barra, la razón del compuesto de radio respecto al mineral inicial, observando el patrón:



b) Deduce ahora la expresión algebraica que indica la proporción de materia en la que se concentra el radio en la n-ésima fase.

c) Comprueba que los concentrados de radio en las fases octava y novena son $\frac{1}{72}$ y $\frac{1}{90}$ respectivamente y exprésalo en forma porcentual.

2. La cantidad máxima de mineral que Marie Curie podía manipular en cada cristalización era de 20 kilogramos, por lo que para procesar en la primera fase la tonelada inicial tuvo que realizar 50 cristalizaciones.

¿Cuántas cristalizaciones tuvo que realizar en las sucesivas fases hasta obtener aproximadamente una cantidad de compuesto de radio de 18 kg? Utiliza la "Hoja de cálculo" para automatizar el proceso.

3. Marie Curie esperaba aislar el 2% de radio de la cantidad inicial con la que comenzó su experimento. Si partió de 1 tonelada de pechblenda **¿cuántas fases tendría que haber realizado para conseguir este porcentaje de radio puro?**

4. Sin embargo, la realidad fue drásticamente distinta de lo previsto. Marie Curie sólo consiguió extraer 1 decigramo de radio puro de la tonelada de mineral que recibió.

a) ¿Cuántas fases tuvieron que realizar para conseguir esa cantidad según el proceso de separación planteado?

b) Con el número de fases que has obtenido, calcula la proporción resultante tras sumar las sucesivas proporciones de compuesto de radio y comprueba que se acerca al 100%.

5. Descompón en fracciones simples la expresión racional de r_n y comprueba que la suma de los N términos es $\frac{N}{N+1}$ y que este resultado coincide con el obtenido en el apartado anterior.

El edificio "Pavillon des Sources" en el centro de París, que formaba parte del laboratorio de Marie, está contaminado debido al material radiactivo que almacenó.

El origen del nombre del elemento químico polonio es debido al país de origen de su descubridora, Polonia.

Fuentes naturales de radiación

La radiactividad es el proceso por el cual un núcleo atómico inestable pierde energía mediante la emisión de radiación. Medir la radiactividad de un elemento es medir esta energía liberada.

En 1910 se definió el curio (Ci), en honor a Marie Curie, como la actividad radiactiva de un gramo de radio en un segundo.

La unidad del sistema internacional que mide la desintegración nuclear por segundo es el becquerel (Bq). Un gramo de radio tiene una actividad de $3{,}7 \cdot 10^{10}$ desintegraciones por segundo, por lo que $1\ Ci = 3{,}7 \cdot 10^{10}\ Bq$.

1. En el año 1898, Marie y Pierre Curie aislaron 100 mg de radio. Imaginemos que lo guardaron en un tubo de ensayo colocándolo junto a otras muestras de su laboratorio y llevándolo en ocasiones en sus bolsillos. El matrimonio desconocía el riesgo que suponía tener tan cerca este material.

a) **¿Qué cantidad de radiación emitió el radio que aislaron durante 2 semanas?**

b) **Transforma al sistema internacional la cantidad de radiación obtenida.**

2. Existen más elementos que emiten radiación, como el gas radón que emana de los suelos rocosos o incluso algunos alimentos como los plátanos y las nueces. El consumo de estos alimentos es seguro, porque la cantidad de radiactividad que emiten es muy pequeña.

a) Se sabe que 1 kg de nueces de Brasil puede contener hasta 7000 pCi (picocurio), $1\ pCi = 10^{-12}\ Ci$ **¿Qué cantidad de radiación, expresada en becquerel (Bq), emite 1 kg de nueces de Brasil en dos semanas?**

b) **¿Cuántos kg de nueces serían necesarios para emitir la misma radiación que los 100 mg de radio?**

Muchas de las pertenencias de Marie Curie: libros, ropa, cuadernos... están contaminados con radio, que tiene una vida media de 1600 años. Estos objetos están guardados en cajas de plomo en la Biblioteca Nacional de Francia en París.

Un legado de valor incalculable

1. Una persona con una lesión en el cuero cabelludo preocupada por su sintomatología acude a la consulta del médico de cabecera. Una primera exploración sugiere que puede tratarse de un carcinoma con un tamaño de 25 mm.

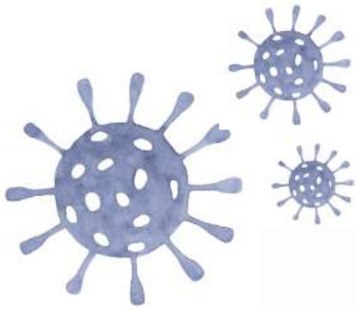
Los estudios sobre algunos tumores cutáneos, en concreto, los carcinomas de células escamosas siguen un modelo teórico de crecimiento exponencial que relaciona la variable dependiente y (tamaño de la lesión en mm) con la variable independiente x (tiempo en meses) y que se expresa como sigue:

$$y = a \cdot e^{b \cdot x}$$

La paciente es derivada a los servicios de dermatología y con la realización de diversas pruebas se confirman los resultados. Tras tres meses, la lesión ha crecido hasta los 42 mm.

Estas circunstancias provocan que el equipo médico de dermatólogos decida intervenir quirúrgicamente antes de que la lesión supere el umbral crítico de 55 mm.

¿De cuánto tiempo se dispone para la intervención quirúrgica si el carcinoma sigue el modelo teórico de crecimiento?



2. Si el tamaño del tumor se acerca al umbral crítico se aplica un tratamiento con radioterapia cinco días a la semana, entre 2 y 10 semanas. Durante este tratamiento el carcinoma disminuirá su tamaño para una extirpación quirúrgica con garantías.

La evolución esperada del tamaño de la lesión $g(x)$ (mm) en función del tiempo x (meses) se caracteriza con la función:

$$g(x) = y_L \cdot \frac{1}{1 + k \cdot e^{x-2\cdot x_L}}$$

donde:

(x_0, y_0), son los datos referentes a la primera observación médica

(x_L, y_L), son los datos referentes al instante límite para la intervención quirúrgica

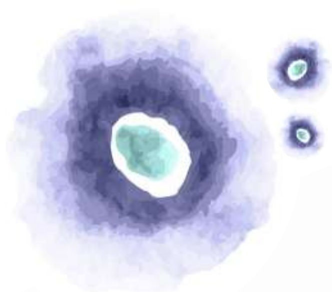
El valor de k es: $k = \frac{y_L}{y_0} - 1$

a) Observar el comportamiento de la lesión después del tratamiento de radioterapia y expresa qué ocurre.

b) Se decide operar cuando el tamaño del carcinoma se reduzca a menos de 50 mm ¿durante cuántas semanas se aplicará radioterapia a este paciente según el modelo?

c) Expresa con una única función la evolución del tamaño del carcinoma desde su diagnóstico inicial hasta la finalización del tratamiento de radioterapia.

Durante la Primera Guerra Mundial, Marie ayudó al ejército francés con su ciencia y llevó la radiología hasta las líneas del frente con automóviles dotados de máquinas de rayos X portátiles.



Notas

SOLUCIONARIO

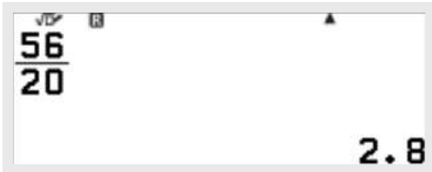
Las bicicletas nupciales

1. La bicicleta se había inventado en 1885 y 5 años después apareció el neumático de caucho. Era julio de 1895 y las bicicletas del matrimonio Curie tenían las siguientes características, un plato de 56 dientes y una corona trasera de 20 dientes. El diámetro de las ruedas era aproximadamente de 700 mm (incluyendo el neumático).

¿Cuánto avanzaba la bicicleta de Marie Curie en cada pedalada?

SOLUCIÓN

Se necesita saber cuántas veces gira la rueda cada vez que se da una pedalada completa (el pedal gira 360°). La relación entre el plato grande de 56 dientes y la corona trasera de 20 es 2,8:



En cada pedalada la rueda gira 2,8 veces.

Teniendo en cuenta que la longitud de la circunferencia es $L = 2\pi r = d\pi$:

$$L = 0{,}7 \cdot \pi \approx 2{,}2 \quad \text{m}$$

La bici avanza aproximadamente 6,16 metros en una pedalada:

2. Las bicicletas de competición actuales suelen tener dos platos de 50 y 34 dientes respectivamente. El cassette trasero integra al menos 10 piñones y cada uno puede tener de 11 a 30 dientes.

¿Qué combinación de marchas plato/piñón hay que utilizar para avanzar aproximadamente los mismos metros por pedalada que alcanzaba la bici de Marie Curie?

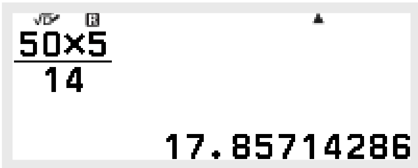
Ordena estas combinaciones con los resultados que has obtenido.

SOLUCIÓN

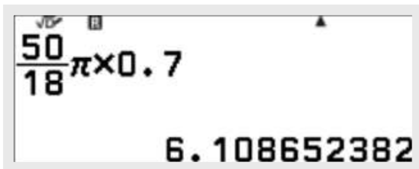
Hay que encontrar relaciones plato/piñón equivalentes a la fracción $\frac{56}{20} = \frac{14}{5}$, que es la relación entre los piñones de la bici de Marie Curie.

La razón equivalente a $\frac{14}{5}$ para el plato de 50 dientes es :

$$\frac{14}{5} = \frac{50}{x}$$



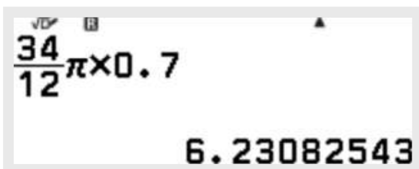
Con el plato de 50 dientes hay que utilizar un piñón de 18 y se avanzaría un poco menos de 6,16 m, aproximadamente 6,11 m:



Para el plato de 34 dientes la razón equivalente a $\frac{14}{5}$ es:

$$\frac{14}{5} = \frac{34}{x}$$

Con el plato de 34 dientes hay que utilizar un piñón de 12 y se avanzaría un poco más de 6,16 m, en concreto 6,23 m:



Ordenando las combinaciones plato/ piñón obtenidas:

$$\frac{50}{18} < \frac{56}{20} = \frac{14}{5} < \frac{34}{12}$$

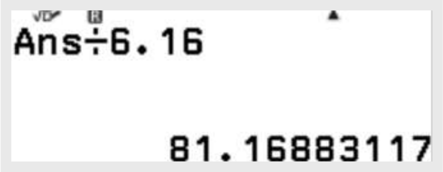
3. **¿Cuántas pedaladas por minuto tendría que dar Marie Curie para viajar a 30 km/h?**

SOLUCIÓN

Se calcula la velocidad en m/min equivalente a los 30 km/h:

La velocidad que hay que alcanzar es de 500 m/min.

Si en cada pedalada se avanzan 6,16 m, para alcanzar 500 m/min hay que dar $\frac{500}{6,16}$ pedaladas:



Hay que dar 82 pedaladas por minuto para viajar a más de 30 km/h.

Una científica meticulosa

Marie Curie era una científica muy ordenada y sistemática, por lo que debía tener muy bien organizada la información de las investigaciones que realizaba.

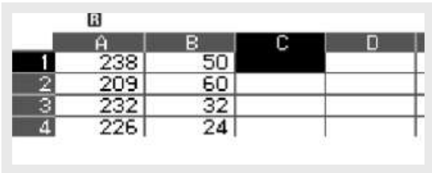
En la tabla se muestran algunos elementos químicos de los que disponía en su laboratorio: masa disponible, masa atómica, número de moles o número de átomos, etc.

Completa la tabla y organiza los datos haciendo uso de la hoja de cálculo de la calculadora, automatizando y simplificando al máximo los procesos.

Elemento	Masa atómica	Masa disponible	Número de moles	Número de átomos
Uranio (U)	238 uma	50 g		
Polonio (Po)	209 uma	60 g		
Torio (Th)	232 uma	32 g		
Radio (Ra)	226 uma	24 g		

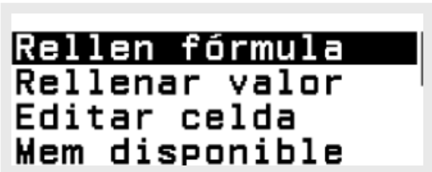
SOLUCIÓN

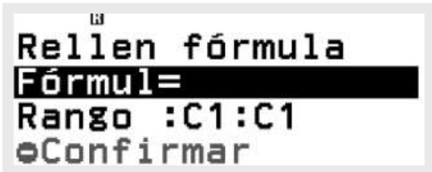
Se introducen los datos en la hoja de cálculo. En la columna A se escribe la masa atómica y en la B la masa disponible del elemento químico:



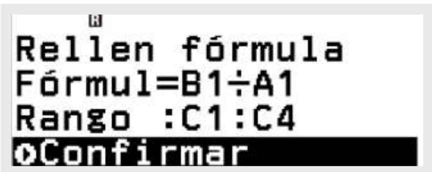
En la columna C se calcula el número de moles, para ello se dividen los datos de la columna B entre los de la columna A.

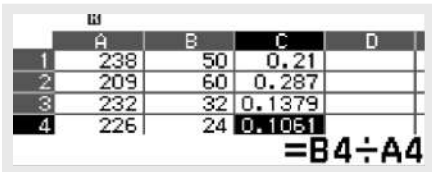
Se pulsa en TOOLS y se selecciona "Rellenar fórmula". Al pulsar EXE se completan los campos convenientemente:



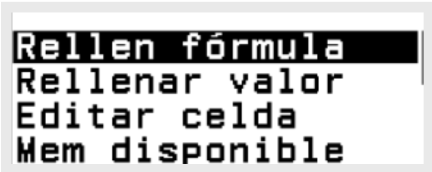


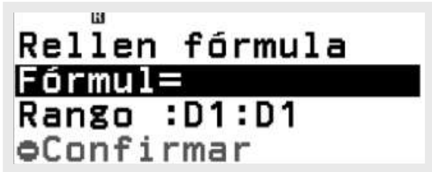
En "Fórmula" se indica dividir B1 entre A1 y el rango está comprendido entre C1 y C4. Al confirmar se obtienen los resultados y se observa que en la columna C se ha ejecutado correctamente la fórmula:



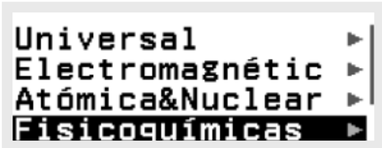


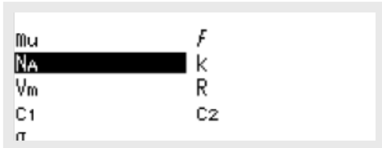
En la columna D para calcular el número de átomos se multiplica el número de moles (valores de la columna C) por el número de Avogadro N_A.
Se pulsa en TOOLS y se completa "Rellenar fórmula" con C1 x N_A:



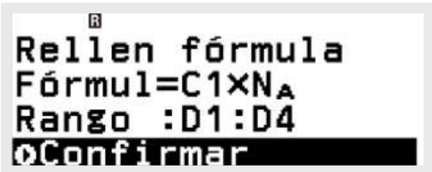


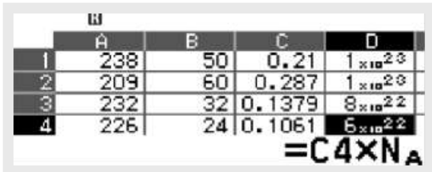
Para escribir N_A, se pulsa CATÁLOGO y en "Constantes científicas" se selecciona N_A:



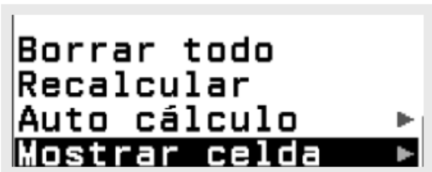


Se define el rango de D1 hasta D4 y se confirma para obtener los resultados:

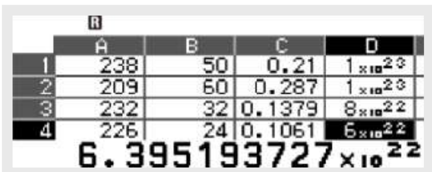




Para ver los valores obtenidos en las celdas en vez de las fórmulas, se pulsa TOOLS y en la opción "Mostrar celda" se selecciona "Valor":



Al volver a la tabla y recorrer las celdas, se visualiza el valor completo de la operación:



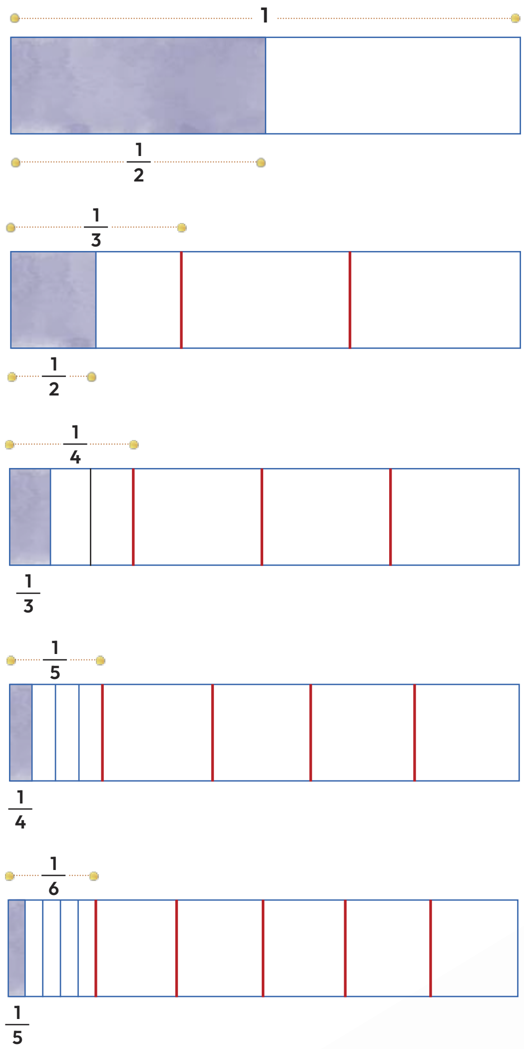
Cristalización fraccionada

Tras conseguir una tonelada de pechblenda Marie Curie empleó un laborioso proceso de separación química conocido como cristalización fraccionada del cloruro. Al disolver el compuesto y evaporar la disolución, el cloruro de radio cristaliza en primer lugar por ser menos soluble. De esta forma, en cada nueva disolución se puede separar un compuesto que contiene progresivamente mayor proporción de radio.

1. La siguiente figura representa un hipotético modelo de fraccionamiento con el que Marie Curie iría progresivamente aislando el radio. Cada una de las barras representa la cantidad total de mineral tratado, siendo la parte coloreada, la cantidad del **compuesto de radio** obtenido en cada fase.

a) Completa en cada barra, la razón del compuesto de radio respecto al mineral inicial siguiendo el patrón.

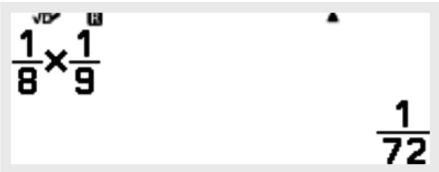
SOLUCIÓN

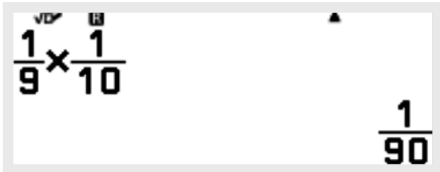


b) Deduce ahora la expresión algebraica que indica la proporción de materia en la que se concentra el radio en la n-ésima fase.

$$r_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}$$

c) Comprueba que los concentrados de radio en las fases octava y novena son $\frac{1}{72}$ y $\frac{1}{90}$ respectivamente y exprésalo en forma porcentual.





$$r_8 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{72} = 0{,}014 = 1{,}4\ \%$$

$$r_9 = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{90} = 0{,}011 = 1{,}1\%$$

2. La cantidad máxima de mineral que Marie Curie podía manipular en cada cristalización era de 20 kilogramos, por lo que para procesar en la primera fase la tonelada inicial tuvo que realizar 50 cristalizaciones.

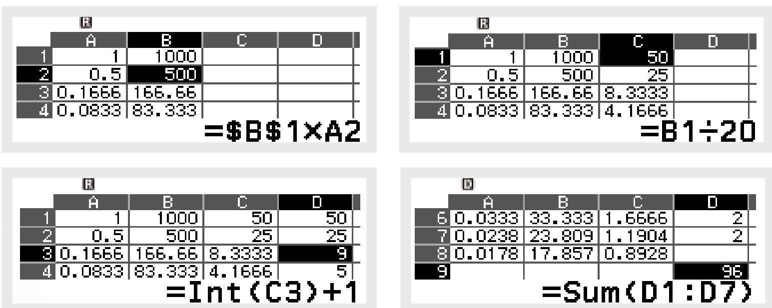
¿Cuántas cristalizaciones tuvo que realizar en las sucesivas fases hasta obtener aproximadamente una cantidad de compuesto de radio de 18 kg? Utiliza la “Hoja de cálculo” para automatizar el proceso.

SOLUCIÓN

Se muestra una posible resolución con la “Hoja de cálculo”:

Los datos de cada fila corresponden a cada una de las fases, y los datos de cada columna son:

- A: razón r_n
- B: cantidad obtenida en cada fase (en kg)
- C: nº de cristalizaciones, cociente del dato de B entre 20
- D: aproximación por exceso del dato en C



	A	B	C	D
1	1	1000		
2	0.5	500		
3	0.1666	166.66		
4	0.0833	83.333		

=B1×A2

	A	B	C	D
1	1	1000	50	
2	0.5	500	25	
3	0.1666	166.66	8.3333	
4	0.0833	83.333	4.1666	

=B1÷20

	A	B	C	D
1	1	1000	50	50
2	0.5	500	25	25
3	0.1666	166.66	8.3333	9
4	0.0833	83.333	4.1666	5

=Int(C3)+1

	A	B	C	D
6	0.0333	33.333	1.6666	2
7	0.0238	23.809	1.1904	2
8	0.0178	17.857	0.8928	
9				96

=Sum(D1:D7)

- El número de cristalizaciones hasta conseguir una cantidad de compuesto aproximado a 18 kg es la suma de todas las casillas de la columna D, que resulta ser de 96.

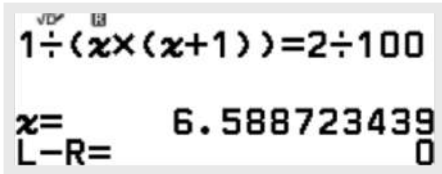
3. Marie Curie esperaba aislar el 2% de radio de la cantidad inicial con la que comenzó su experimento. Si partió de 1 tonelada de pechblenda **¿cuántas fases tendría que haber realizado para conseguir este porcentaje de radio puro?**

SOLUCIÓN

Primera opción con el menú Ecuación

Para calcular el número de fases se obtiene el valor n para el cual la razón es del 2%. Para ello, se resuelve la ecuación:

$$r_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{2}{100}$$



Sustituyendo para $n = 7$:

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8} \cdot 10^6 = 17\,857{,}14 \;\; g$$

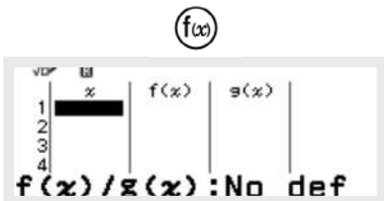
Según esta hipótesis, en la séptima fase se habría obtenido una cantidad de 17 857,14 g de radio puro, cercana al 2% de la tonelada de pechblenda.

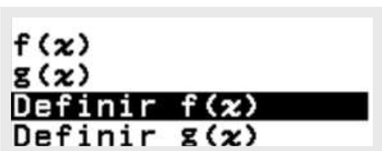
Segunda opción con el menú Tabla

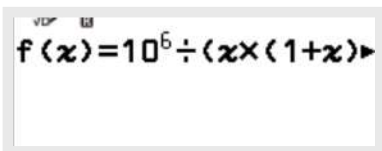
En el menú Tabla se introduce la función:

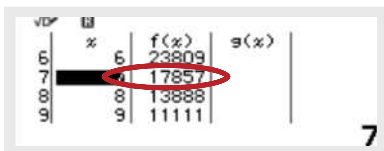
$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot 10^6$$

Donde x representa la fase de separación y $f(x)$ la cantidad de compuesto de radio en gramos obtenido en esa fase.









Tras recorrer la tabla se observa que el primer valor de x para el que $f(x)$ es igual o inferior a 20 000 gramos, es 7. En esta fase se habría obtenido el 2% de compuesto de radio respecto a la cantidad inicial que es 17 857,14 g.

4. Sin embargo, la realidad fue drásticamente distinta de lo previsto. Marie Curie sólo consiguió extraer 1 decigramo de radio puro de la tonelada de mineral que recibió.

a) ¿Cuántas fases tuvieron que realizar para conseguir esa cantidad según el proceso de separación planteado?

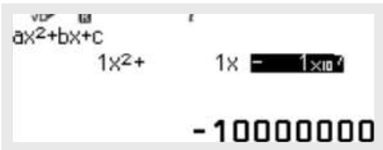
SOLUCIÓN

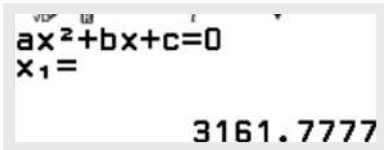
Para calcular el número de fases hay que obtener el valor del subíndice n para el cual la razón es 1 decigramo respecto a la tonelada inicial, es decir $\frac{1}{10^7}$.

Se resuelve la ecuación:

$$r_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{10^7}$$

$$n^2 + n - 10^7 = 0$$





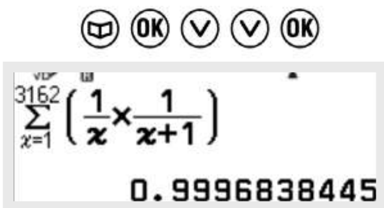
Según el modelo planteado, tras n = 3 162 fases, se consigue aislar 1 decigramo de compuesto de radio con una concentración muy alta.
Este resultado está en consonancia con lo expresado por Curie en la conferencia que impartió con motivo de la recepción del Premio Nobel de Química:

"Para obtener una sal muy pura tuve que realizar varios miles de cristalizaciones y controlar el progreso del fraccionamiento mediante mediciones de la actividad".

b) Con el número de fases que has obtenido, calcula la proporción resultante tras sumar las sucesivas proporciones de compuesto de radio y comprueba que se acerca al 100%.

SOLUCIÓN

El cálculo de la suma de las sucesivas proporciones obtenidas tras las 3 162 fases es:



$$\sum_{n=1}^{3162} \frac{1}{n \cdot (n+1)} \approx 0{,}9996838444$$

Prácticamente se ha procesado el 100% de la tonelada inicial.

5. Descompón en fracciones simples la expresión racional de r_n y comprueba que la suma de los N términos es $\frac{N}{N+1}$ y que este resultado coincide con el obtenido en el apartado anterior.

SOLUCIÓN

Descomponiendo la razón r_n en fracciones simples se obtiene:

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{(n+1)}$$

$$1 = A(n+1) + Bn$$

Si n = −1 se tiene B = −1.

Si n = 0 se tiene A = 1.

Por tanto, la suma N-ésima parcial es:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1} = \frac{N}{N+1}$$

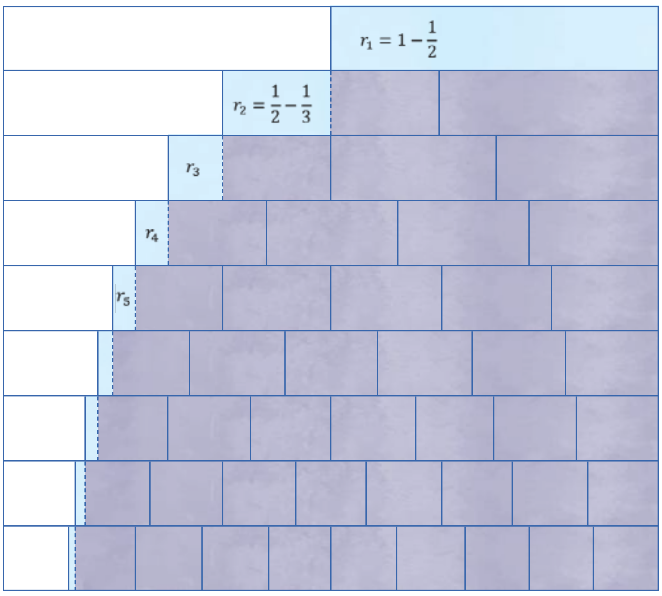
Para N = 3 162 :

$$\sum_{n=1}^{3162} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \sum_{n=1}^{3162} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{3163} = \frac{3162}{3163} \approx 0{,}9996838445$$

Como observación al alumnado se puede introducir el concepto de límite:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

que se puede comprender a través de las representaciones de las proporciones que se obtienen en cada fase (rectángulos azules):



Después de cuarenta y cinco meses del anuncio de la probable existencia del radio, Marie Curie consiguió obtener un decigramo puro de este nuevo elemento cuya masa atómica es de 225. Este trabajo pone de manifiesto el esfuerzo y empeño que la científica ponía en todas sus investigaciones.

Fuentes naturales de radiación

La radiactividad es el proceso por el cual un núcleo atómico inestable pierde energía mediante la emisión de radiación. Medir la radiactividad de un elemento es medir esta energía liberada.

En 1910 se definió el curio (Ci), en honor a Marie Curie, como la actividad radiactiva de un gramo de radio en un segundo.

La unidad del sistema internacional que mide la desintegración nuclear por segundo es el becquerel (Bq). Un gramo de radio tiene una actividad de $3{,}7 \cdot 10^{10}$ desintegraciones por segundo, por lo que 1 Ci = $3{,}7 \cdot 10^{10}$ Bq.

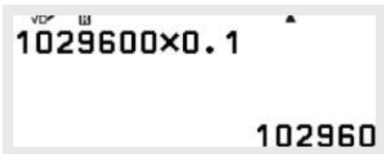
1. En el año 1898, Marie y Pierre Curie aislaron 100 mg de radio. Imaginemos que lo guardaron en un tubo de ensayo colocándolo junto a otras muestras de su laboratorio y llevándolo en ocasiones en sus bolsillos. El matrimonio desconocía el riesgo que suponía tener tan cerca este material.

a) **¿Qué cantidad de radiación emitió el radio que aislaron durante 2 semanas?**

SOLUCIÓN

Se transforman los datos a las unidades del SI, 100 mg = 0,1 gramos y 2 semanas = 1 209 600 segundos:

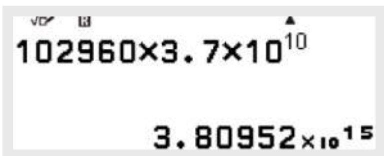
La radiación emitida por los 100 mg de radio durante dos semanas es 102 960 Ci:



b) **Transforma al sistema internacional la cantidad de radiación obtenida.**

SOLUCIÓN

Como 1 Ci = $3{,}7 \cdot 10^{10}$ Bq, la radiación emitida en el SI es de $3{,}81 \cdot 10^{15}$ Bq:



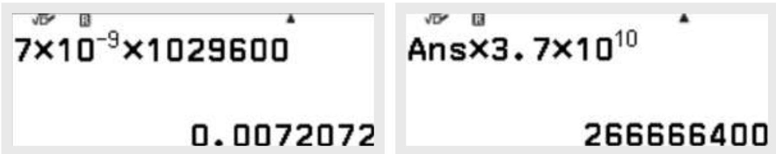
2. Existen más elementos que emiten radiación, como el gas radón que emana de los suelos rocosos o incluso algunos alimentos como los plátanos y las nueces. El consumo de estos alimentos es seguro, porque la cantidad de radiactividad que emiten es muy pequeña.

a) Se sabe que 1 kg de nueces de Brasil puede contener hasta 7 000 pCi (picocurio), 1 pCi = 10^{-12} Ci **¿Qué cantidad de radiación, expresada en becquerel (Bq), emite 1 kg de nueces de Brasil en dos semanas?**

SOLUCIÓN

Considerando que 1 pCi equivale a 10^{-12} Ci. Un kg de nueces de Brasil emite 7 000 pCi que son $7 \cdot 10^{-9}$ Ci:

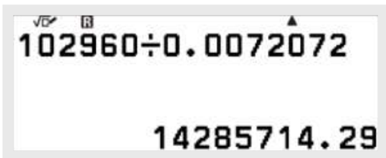
En dos semanas (1 209 600 s), 1 kg de nueces habrá emitido 0,0072 Ci o 266 666 400 Bq:



b) **¿Cuántos kg de nueces serían necesarios para emitir la misma radiación que los 100 mg de radio?**

SOLUCIÓN

Como 1 kg de nueces emite 0,0072 Ci, para alcanzar 102 960 Ci son necesarios 14 285 714,29 kg:



Como se observa, son necesarios más de 14 millones de kg de nueces de Brasil para igualar la radiación que emiten 100 mg de radio durante dos semanas. Esto es debido a que la radiación es muy pequeña y por lo tanto su consumo no es perjudicial para la salud de las personas.

Un legado de valor incalculable

1. Una persona con una lesión en el cuero cabelludo preocupada por la sintomatología acude a la consulta de su médico de cabecera. Una primera exploración sugiere que puede tratarse de un carcinoma con un tamaño de 25 mm.

Los estudios sobre algunos tumores cutáneos, en concreto, los carcinomas de células escamosas siguen un modelo teórico de crecimiento exponencial que relaciona la variable dependiente y (tamaño de la lesión en mm) con la variable independiente x (tiempo en meses) y que se expresa como sigue:

$$y = a \cdot e^{b \cdot x}$$

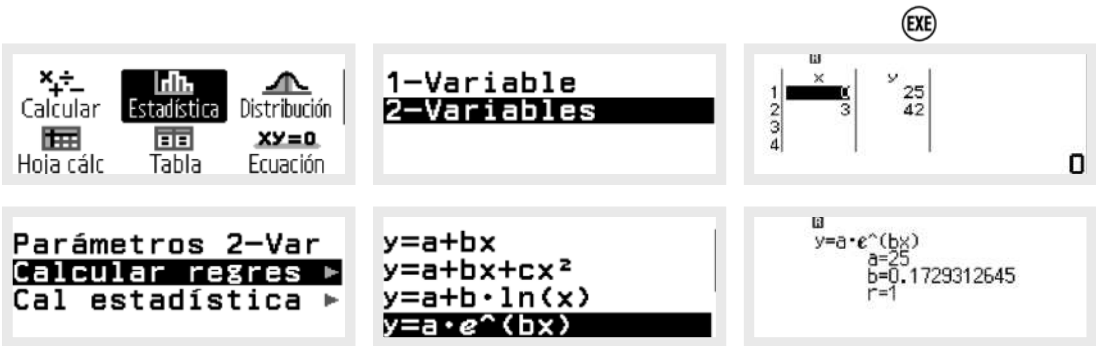
La paciente es derivada a los servicios de dermatología y con la realización de diversas pruebas se confirman los resultados, tras tres meses la lesión ha crecido hasta los 42 mm.

Estas circunstancias provocan que el equipo médico de dermatólogos decida intervenir quirúrgicamente antes de que la lesión supere el umbral crítico de 55 mm.

¿De cuánto tiempo se dispone para la intervención quirúrgica si el carcinoma sigue el modelo teórico de crecimiento?

SOLUCIÓN

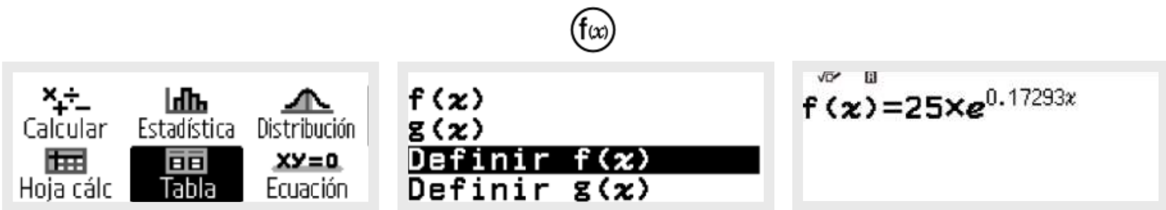
Se construye el modelo teórico de crecimiento exponencial con los datos disponibles desde el menú Estadística como sigue:



La función que se obtiene es:

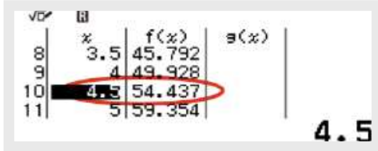
$$f(x) = 25 \cdot e^{0.1729x}, \quad x \geq 0$$

Se define la función desde el menú Tabla:



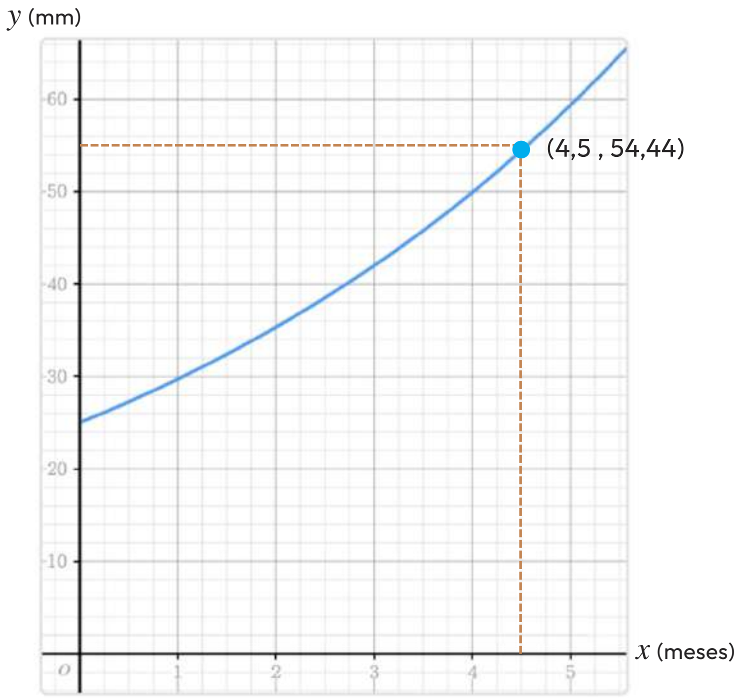
Nota: En estudios de salud la variable dependiente se denomina variable respuesta y la variable independiente, variable explicativa.

Se explora la tabla de valores con un paso de 0,5 meses:

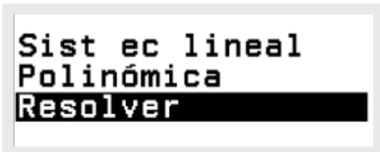


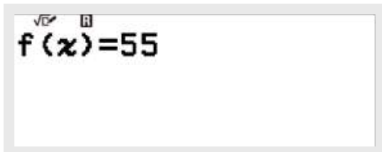
Pasados 4,5 meses desde la primera exploración, el modelo predice que el tamaño del carcinoma será de 54,44 mm, por lo que sería aconsejable intervenir no más tarde de este periodo de tiempo.

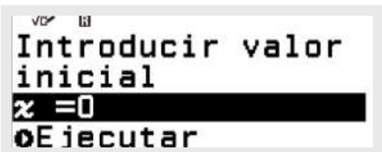
A través del código QR, se observa en la gráfica que a los cuatro meses y medio, el tamaño de la lesión está muy cerca del valor crítico establecido para su extirpación quirúrgica:

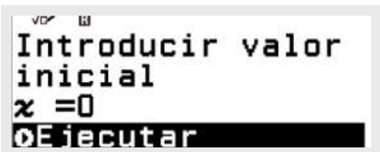


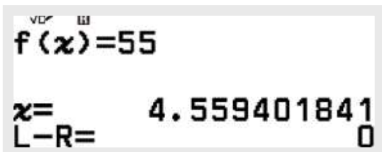
Se propone la resolución analítica para contrastar los resultados observados:











2. Si el tamaño del tumor se acerca al tamaño límite se aplica un tratamiento con radioterapia cinco días a la semana, entre 2 y 10 semanas. Durante este tratamiento el carcinoma disminuirá su tamaño para una extirpación quirúrgica con garantías.
La evolución esperada del tamaño de la lesión $g(x)$ (mm) en función del tiempo x (meses) se caracteriza con la función:

$$g(x) = y_L \cdot \frac{1}{1 + k \cdot e^{x-2\cdot x_L}}$$

donde:
(x_0, y_0), son los datos referentes a la primera observación médica
(x_L, y_L), son los datos referentes al instante límite para la intervención quirúrgica

El valor de k es: $k = \frac{y_L}{y_0} - 1$

a) Observar el comportamiento de la lesión después del tratamiento de radioterapia y expresa qué ocurre.

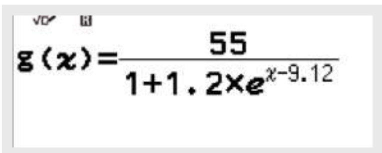
SOLUCIÓN
La función $g(x)$ que explica el comportamiento de la lesión una vez se inicia el tratamiento de radioterapia a los 4 meses y medio es:

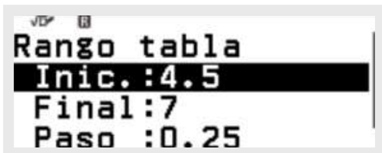
$$g(x) = \frac{55}{1 + 1{,}2 \cdot e^{x-9{,}12}}$$

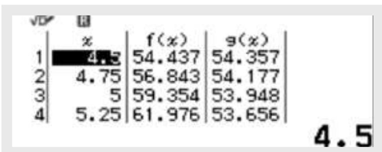
donde:
(x_0, y_0) = (0, 25) en la primera observación médica
(x_L, y_L) = (4,56, 55) en el instante límite para la intervención quirúrgica

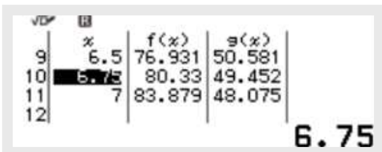
El valor de k es: $k = \frac{55}{25} - 1 = 1{,}2$

Se define la función $g(x)$ desde los 4,5 meses (inicio del tratamiento) hasta el mes 7 (10 semanas de tiempo máximo de tratamiento), para ver la evolución del tamaño del carcinoma:







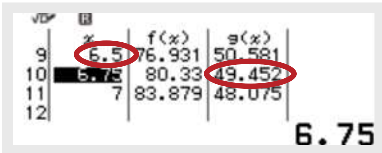


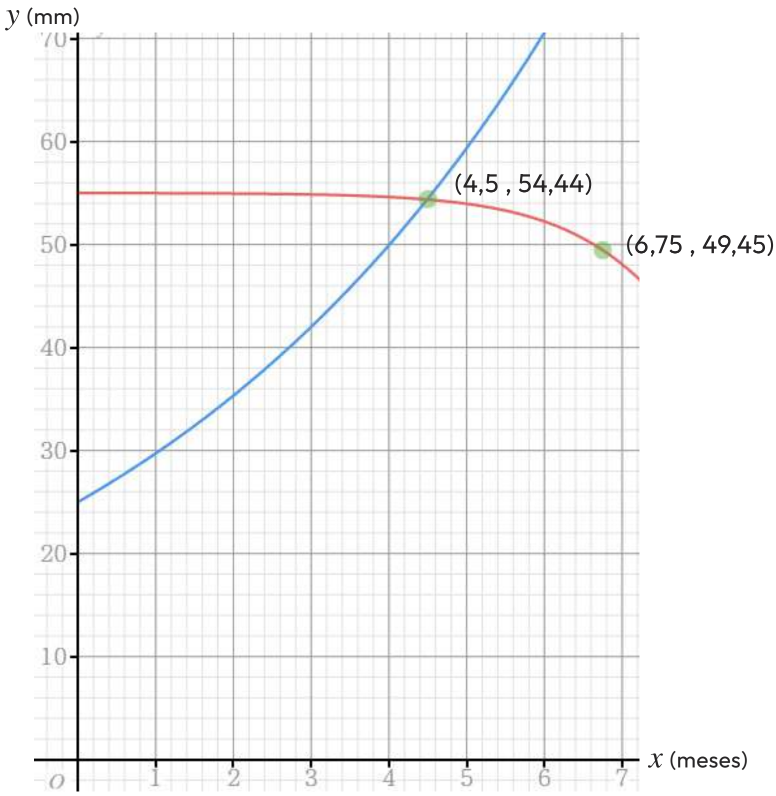
Se observa cómo el tamaño de la lesión va disminuyendo al aplicar la radioterapia ($g(x)$). De no aplicarse, la lesión sigue aumentando su tamaño ($f(x)$).

b) Se decide operar cuando el tamaño del carcinoma se reduzca a menos de 50 mm ¿durante cuántas semanas se aplicará radioterapia a este paciente según el modelo?

SOLUCIÓN

Tras dos meses de radioterapia, x = 6,5 (8 semanas de tratamiento) el tamaño de la lesión es todavía superior a los 50 mm. Para x = 6,75 (9 semanas de tratamiento), el tamaño es de 49,45 mm y por lo tanto, más seguro de extirpar por el equipo médico.



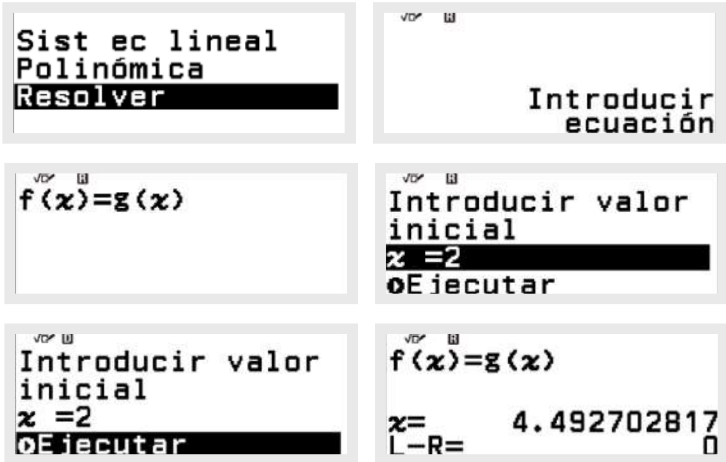


c) Expresa con una única función la evolución del tamaño del carcinoma desde su diagnóstico inicial hasta la finalización del tratamiento de radioterapia.

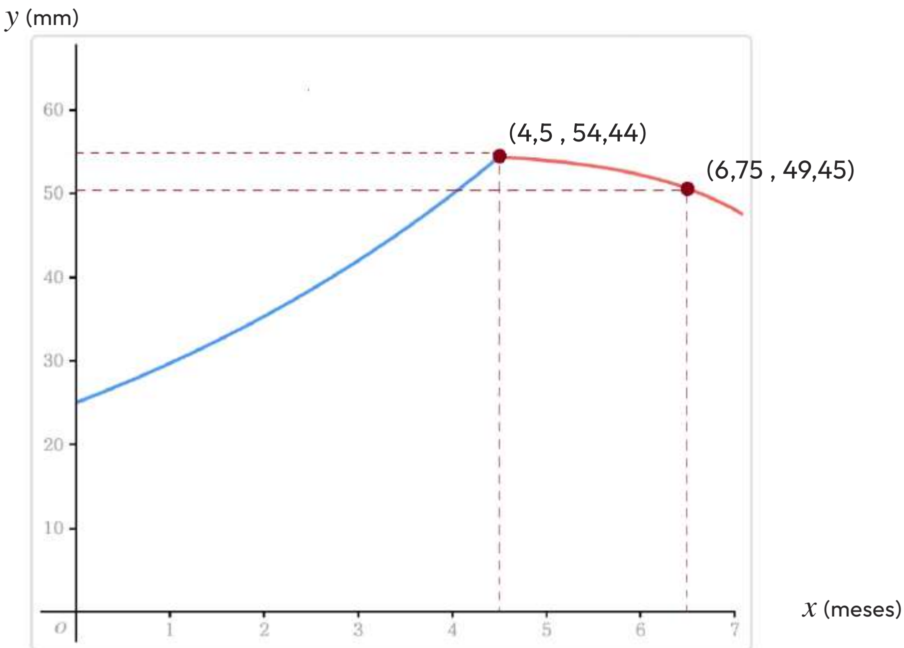
SOLUCIÓN

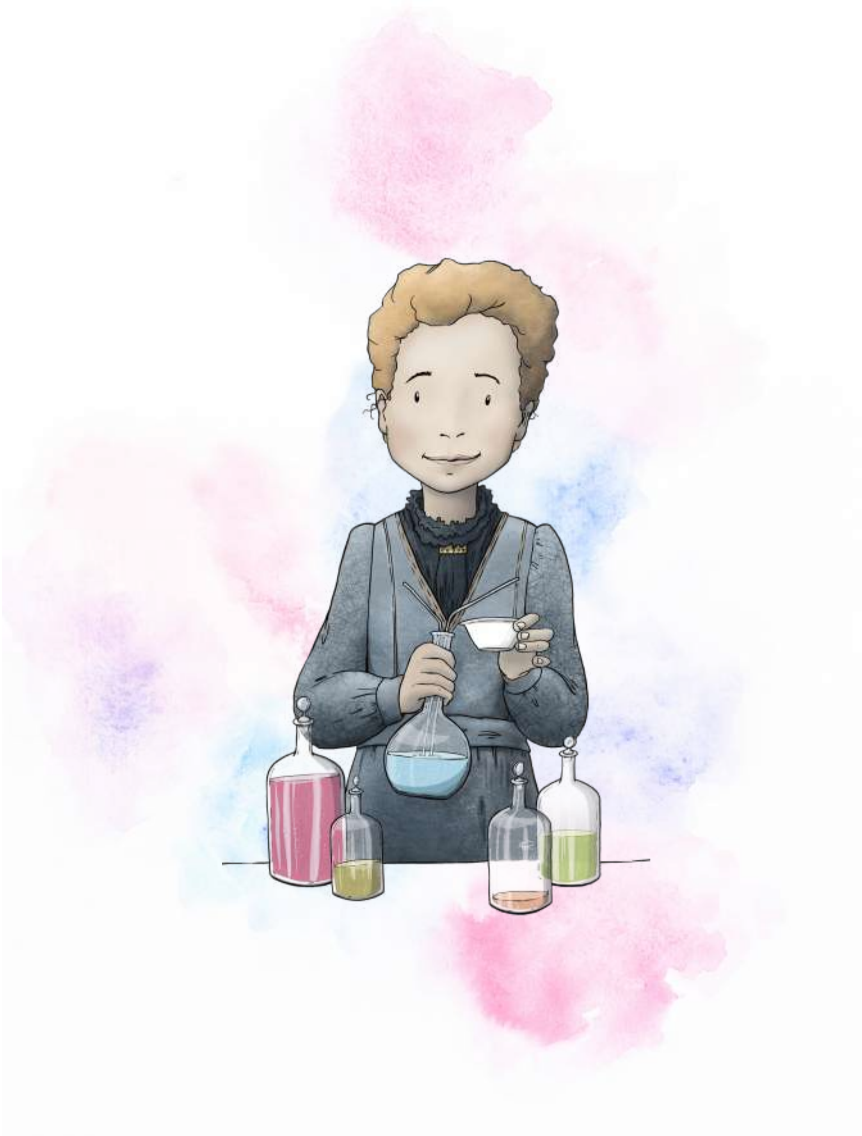
Se puede expresar la función a trozos. Para ello se calcula en primer lugar el punto de corte entre las dos funciones:

Desde el menú Ecuación se selecciona "Resolver":



$$h(x) = \begin{cases} 25 \cdot e^{0{,}1729x}, & 0 \leq x \leq 4{,}5 \\ \dfrac{55}{1 + 1{,}2 \cdot e^{x-9{,}12}}, & 4{,}5 \leq x \leq 7 \end{cases}$$





Federación
Española de
Sociedades de
Profesores de
Matemáticas

CASIO
División Educativa