



Actividad ganadora
de la **Beca CASIO**
en la categoría
"BACHILLERATO"

MATEMÁTICAS Y MEDICINA FORENSE:

Estimación de la hora de la muerte a partir del potasio encontrado en el humor vítreo

■ **Abilio Orts Muñoz**
IES Tavernes Blanques (Valencia)

① 1º - 2º ESO
② 3º - 4º ESO
③ 1º - 2º BACH.

Con esta actividad se pretende introducir a los alumnos de Bachillerato en el estudio de la regresión lineal. El objetivo principal es que el alumnado se familiarice con la recta de regresión y sepa usarla para obtener diferentes estimaciones.

CONTEXTO

Cuando la policía encuentra un cadáver, una de las cuestiones principales para el esclarecimiento de los hechos acaecidos es determinar la hora de la muerte. Este tiempo transcurrido desde la localización del cadáver y el momento en el que tuvo lugar la muerte se denomina intervalo post-mortem (IPM). Calcular el valor de dicho intervalo es de vital importancia para las investigaciones forenses.

El cálculo del IPM es un asunto complejo. En los últimos años se ha desarrollado un método que se basa en la utilización de la concentración de potasio en el humor vítreo. El humor vítreo es un líquido que se localiza detrás del globo ocular y que está aislado y protegido por el cráneo.

Recientes estudios muestran cómo la concentración de potasio $[K^+]$ en el humor vítreo aumenta en las horas siguientes a la muerte. En Muñoz Barús, J. I. et al. (2002) se analiza una muestra de 206 líquidos provenientes de autopsias realizadas por el Instituto de Medicina Legal de la Universidad de Santiago de Compostela. La muestra se dividió en dos grupos A y B, atendiendo a las características de la muerte.



Para el siguiente estudio se consideran únicamente 40 datos de la submuestra A. Estos datos se muestran en la tabla 1:

TABLA 1
Relación entre $[K^+]$ e IPM en 40 individuos

Nº	$[K^+]$ (en mmol/l)	IPM (en horas)
1	5,6	1,08
2	5,8	1,5
3	6,3	2,08
4	6	2,75
5	5,7	3,08
6	5,6	3,08
7	5,4	3,5
8	6,1	4
9	6,1	4,25
10	6	4,98
11	7	5,08
12	7,5	5,25
13	6,2	5,25
14	6,6	5,5
15	5,7	5,66
16	6,7	5,66
17	6,9	5,66
18	6,3	5,91
19	7,4	6
20	5,7	6,25
21	5,1	6,5
22	7,6	6,75
23	7,5	6,75
24	6,7	8,58
25	8	11,16
26	7,9	11,41
27	7,8	11,41
28	7,1	11,5
29	7	11,5
30	8,5	14
31	7,8	14,5
32	9	15,33
33	8,9	15,33
34	8,6	15,38
35	8,5	15,38
36	8,3	16
37	9,1	16,16
38	10,9	16,66
39	10,5	18
40	9,4	20,25



Material
Calculadora CASIO fx-CG50

Teniendo en cuenta los datos de la tabla, parece adecuado plantear un modelo de regresión lineal para estimar el intervalo post-mortem a partir de la concentración de potasio en el humor vítreo.

 ACTIVIDAD

La tabla 1 muestra la concentración de potasio en el humor vítreo de 40 cadáveres y el intervalo post-mortem obtenidos mediante autopsias en el Instituto de Medicina Legal de la Universidad de Santiago de Compostela:

- Introduce los datos en una tabla para realizar un análisis estadístico.
- Representa el diagrama de dispersión (nube de puntos) y observa la tendencia. ¿Tiene sentido plantearse un modelo de regresión lineal que permita estudiar el IPM a partir de los valores de $[K^+]$?
- Determina la recta de regresión lineal. Interpreta el resultado.
- Obtén la bondad del ajuste. Interpreta el resultado.
- Obtén los parámetros estadísticos y comprueba que la recta de regresión obtenida pasa por el centro de gravedad (\bar{x}, \bar{y}) .
- La policía está investigando la muerte de un ciclista atropellado en un accidente en el que el conductor del vehículo se ha dado a la fuga. Se trata de una carretera muy poco transitada y sin cámaras. Sin embargo, 500 metros después del lugar del atropello hay un hotel rural que dispone de una cámara de seguridad que puede ayudar a identificar el vehículo del conductor. Para ello es necesario estimar la hora de la muerte del ciclista. Sabiendo que el golpe fue tan fuerte que este murió en el acto y que a las 19h se encontró una concentración de potasio igual a 8,12 mmol/l, ¿cuánto tiempo debe haber pasado desde su muerte? ¿A qué hora se produjo?
- Si se encuentra un cadáver con una concentración de potasio de 16 mmol/l, ¿qué se podría decir? Calcula el intervalo post-mortem.
- ¿Cómo se puede obtener la concentración de potasio dado el valor de IPM? ¿Cuál sería para un valor de IPM igual a 6 horas?

 SOLUCIÓN

a) y b)

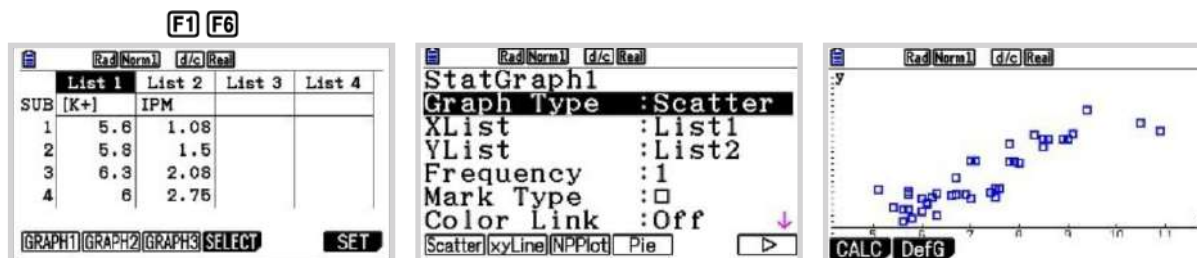
En el menú Estadística se introducen los 40 datos. La variable x es la concentración de potasio $[K^+]$ medida en mmol/l y la variable y es el intervalo post-mortem calculado en horas.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	[K+]	IPM		
1	5.6	1.08		
2	5.8	1.5		
3	6.3	2.08		
4	6	2.75		
				2.75

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	[K+]	IPM		
37	9.1	16.16		
38	10.9	16.66		
39	10.5	18		
40	9.4	20.25		
				20.25

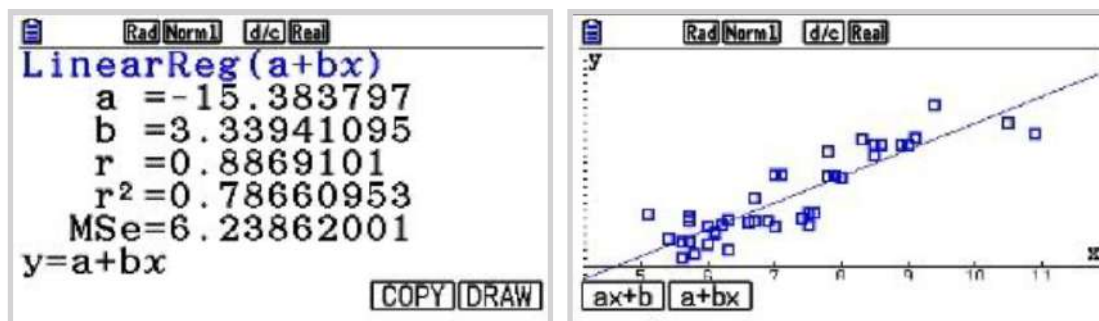


Se obtiene el diagrama de dispersión:



Se observa que hay cierta correlación entre los valores de las dos variables. La mayoría de los puntos representados se encuentran situados alrededor de una recta. Se plantea, por tanto, un modelo de regresión lineal.

CALC (F1), X(F2), ax+b(F1), DRAW (F6)



c) En el apartado anterior se han obtenido los parámetros de la recta de regresión. La recta de regresión de y sobre x es:

$$y = -15,383797 + 3,33941095 \cdot x$$

$$\text{IPM} = -15,383797 + 3,33941095 \cdot [\text{K}^+]$$

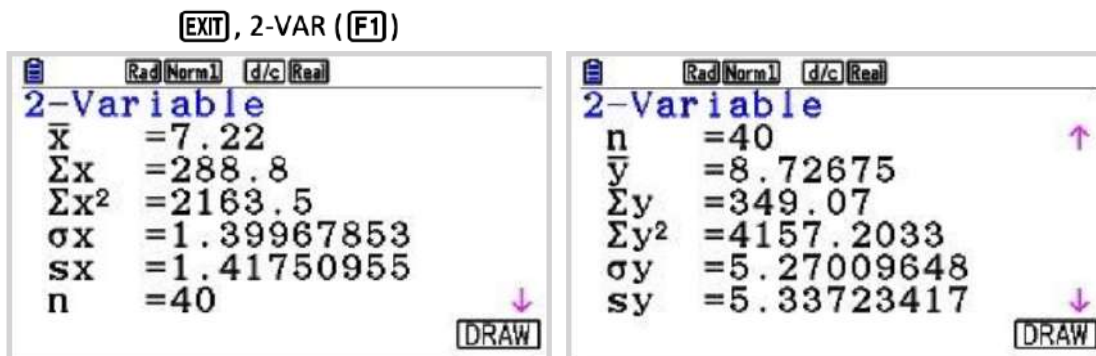
De esta manera es posible estimar el intervalo post- mortem, el cual no se podía obtener de forma directa, a partir de otra variable (la concentración de potasio) relacionada con él.

d) La bondad del ajuste viene determinada por el valor del coeficiente de correlación lineal r :

$$r = 0,8869101.$$

El valor de r varía entre -1 y 1 . Al ser $r > 0$ indica que la correlación entre las dos variables es directa, ambas varían en el mismo sentido; cuando aumentan los valores de la concentración de potasio, también aumenta el intervalo post-mortem. Además, el valor de r es bastante cercano a 1 , por lo que se considera que el ajuste es razonablemente bueno. De esta manera, las predicciones que se hagan usando la recta de regresión serán bastante fiables.

e) Se obtienen los parámetros estadísticos:

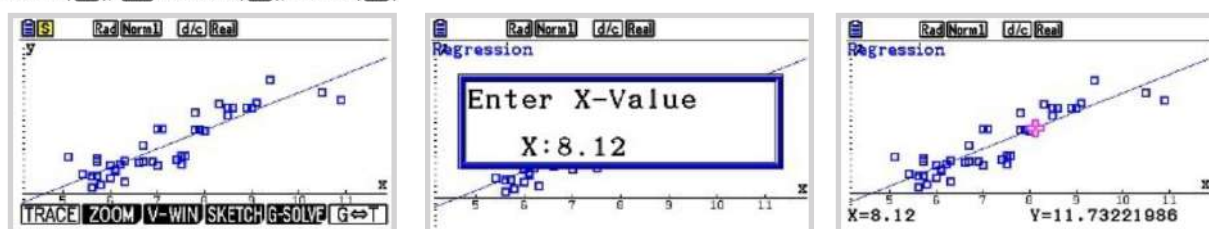


Las medias de las dos variables son $\bar{x} = 7,22$ e $\bar{y} = 8,72675$.

Es fácil comprobar que $8,72675 = -15,383797 + 3,33941095 \cdot 7,22$ por lo que la recta de regresión pasa por el punto (\bar{x}, \bar{y}) ,

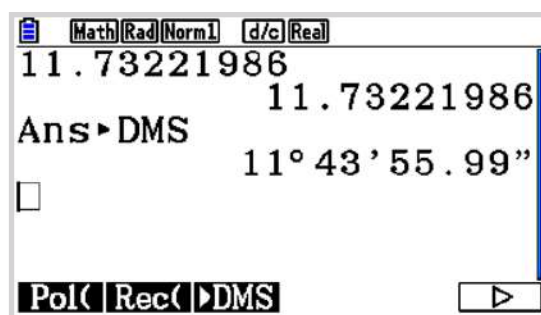
f) Para obtener el valor estimado para el intervalo post-mortem para una concentración de potasio $x=8,12$:

DRAW (F6), SHIFT G-SOLV (F5), Y-CALC (F1)



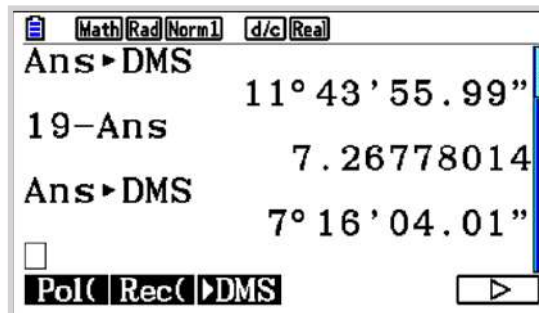
La calculadora representa el punto obtenido $(8,12, 11,73221986)$ sobre la recta de regresión. Si en el humor vítreo se ha encontrado una concentración de $8,12$ mmol/l de potasio, el tiempo estimado desde la muerte del individuo es de **11,73221986 horas**. En el menú Calcular se comprueba que esto es, aproximadamente, **11 horas y 44 minutos**:

(OPTN) (F6), ANGLE (F5), (F6), DMS (F3)

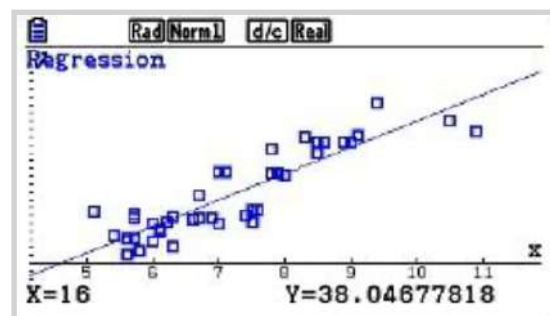
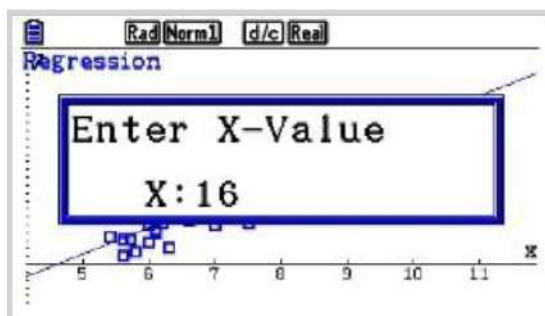




Como el cuerpo fue encontrado a las 19 horas, la hora aproximada del atropello debió ser alrededor de las **7 horas y 16 minutos de la mañana**. Un instante después de esa hora el vehículo pasó por delante de la cámara del hotel:



g) Este dato está fuera del intervalo en el que varían los valores de x (entre 5 y 11 mmol/l aproximadamente) por lo que la recta de regresión ya no es fiable. Fuera de este intervalo no se puede asegurar que la relación siga siendo lineal, por lo que la predicción pierde validez. Siguiendo el mismo procedimiento que en el apartado anterior se obtienen 38 horas:

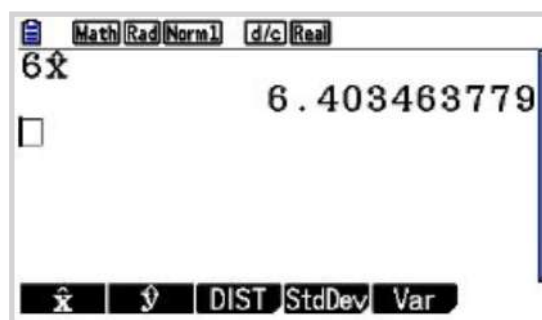


h) Si $r=1$ o $r=-1$ las dos rectas de regresión coinciden pues pasan por todos los puntos (la suma de errores es cero y por tanto, no hay desviación de los puntos respecto de la recta). En este caso, como $r=0,89$ las dos rectas de regresión difieren. Si se desea estimar un valor de y dado x , hay que usar la recta de regresión de y sobre x . Si, en cambio, se desea estimar un valor de x dado y , hay que utilizar la recta de regresión de x sobre y .

A continuación, se utiliza la recta de regresión de y sobre x para estimar un valor de x dado y aunque el resultado será menos fiable, como el valor de $|r|$ a 1 es cercano, el error cometido será menor.

En el menú Calcular:

OPTN, STAT(F5), \hat{x} (F1)



Es decir, si ha muerto hace 6 horas, se encontrará una concentración de alrededor de **6,4 mmol/l**.