¿Es posible pedalear una bicicleta de ruedas cuadradas?

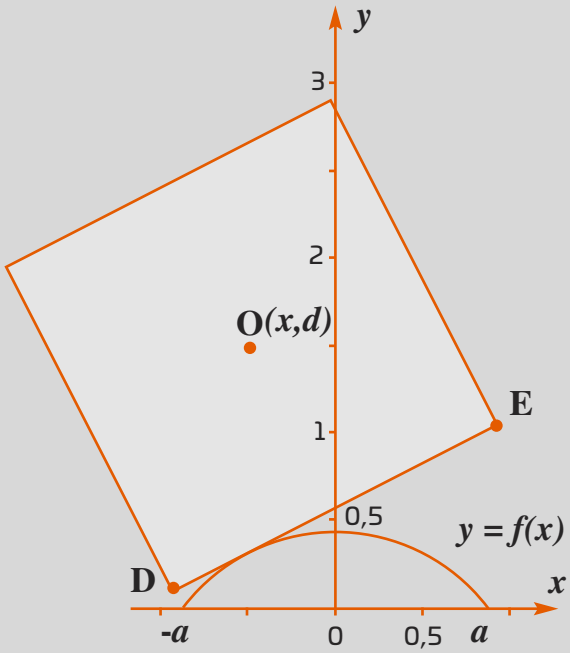
Sergio Schiavone

En el Museo de las Matemáticas MoMath de Nueva York es posible pedalear en esta bicicleta tan especial. En el MoMath la interacción es la vía por la que los visitantes van a percibir y entender las matemáticas, un museo cuya exposición se basa en la exploración.

1 1º - 2º ESO
2 3º - 4º ESO
3 1º - 2º BACH.

ACTIVIDAD

La siguiente imagen muestra, en el plano cartesiano OXY, la situación de la rueda cuadrada a medida que va girando en la superficie curva. El cuadrado de lado $\overline{DE} = 2$ u y con centro O, representa la rueda de la bicicleta, mientras que la función $f(x)$ describe el perfil de la curva por donde se desplaza la rueda:



Material
Calculadora CASIO fx-CG50

Se considera la función:

$$f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ x \in \mathrm{R} \text{ en un intervalo } [-a, a]$$

1) Comprueba que $f(x)$ es una función par.

2) Determina el intervalo [-a, a] de la curva.

3) Dibuja la gráfica de la plataforma que recorre la bicicleta considerando que la función $f(x)$ es periódica y tiene período $T = 2 \cdot ln\,(\sqrt{2} + 1)$.

4) Para que la bicicleta circule sin problemas por la plataforma, es necesario que:

- A la izquierda y a la derecha de los puntos no derivables, las rectas tangentes a $f(x)$ sean ortogonales.
- La longitud del lado del cuadrado de la rueda sea igual a la longitud de arco de una de las curvas, es decir, al arco de la curva de ecuación $y = f(x)$ para $\in [-a, a]$.

Determina si se cumplen estas dos condiciones.

5) Considerando los triángulos rectángulos ACL y ALM, y recordando el significado geométrico de la derivada, comprueba que el valor de la ordenada "d" del centro de la rueda es constante durante el movimiento. Por este motivo, el ciclista parece moverse en una superficie plana.

6) Si se replica varias veces la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2},\quad x \in \left[-\frac{ln\,3}{2}, \frac{ln\,3}{2}\right]$$

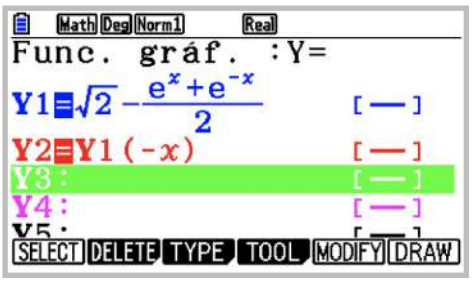
representará el perfil de una plataforma adecuada para una bicicleta con ruedas muy particulares con forma de polígono regular.

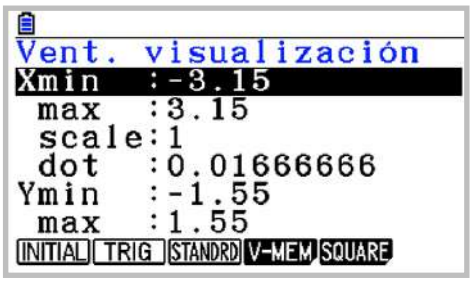
Identifica de que polígono regular se trata y justifica la respuesta.

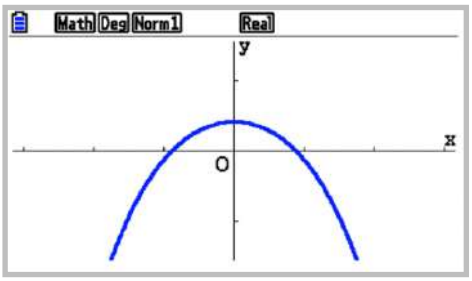
Museo de las Matemáticas MoMath (Nueva York)

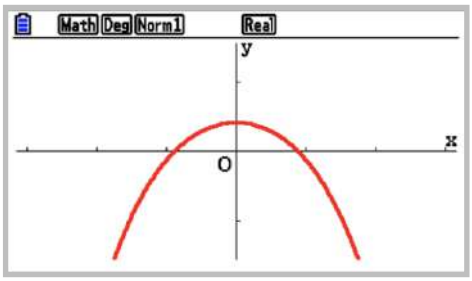
SOLUCIÓN

1) Se comprueba gráficamente que la función $f(x)$ es par, $f(x)=f(-x)$:



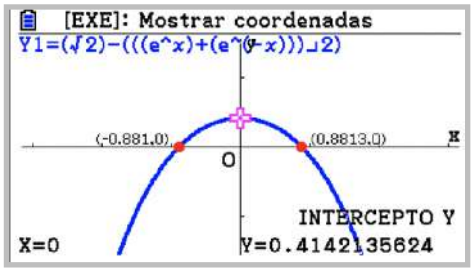






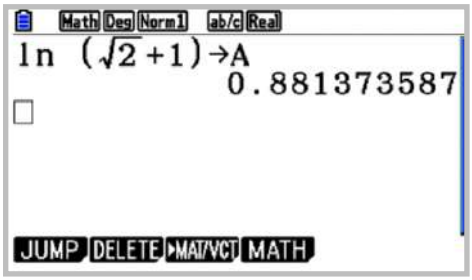
2) Se obtienen los puntos de corte de la función con el eje de abscisas:

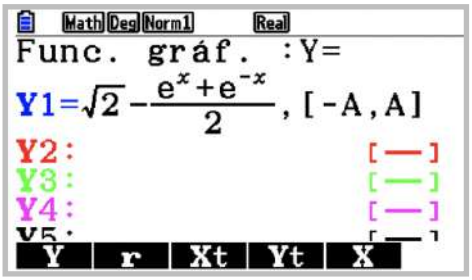
G-SOLV(F5), ROOT(F1), Y-ICEPT(F4)

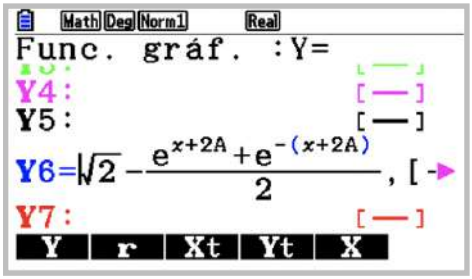


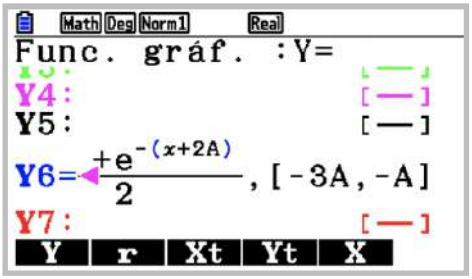
El intervalo de la plataforma es $\left[ln\,(\sqrt{2}-1),\ ln\,(\sqrt{2}+1)\right]$ = (-0,8813, 0,8813).

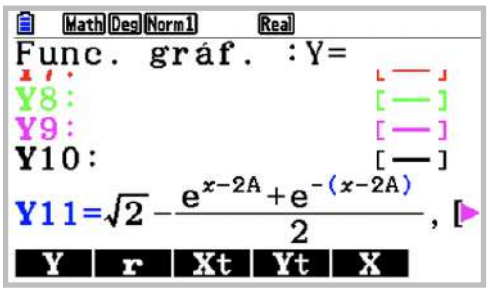
3) En el menú **Ejec-Mat** se guarda el valor $ln\,(\sqrt{2}+1)$(punto de corte de $f(x)$ con el semieje positivo de las X) en la variable A. En el menú **Gráfico** se escriben las funciones en Y1, Y6 e Y11 (todas de color azul) teniendo en cuenta el desplazamiento de 2 unidades de $f(x)$ hacia la izquierda y hacia la derecha.

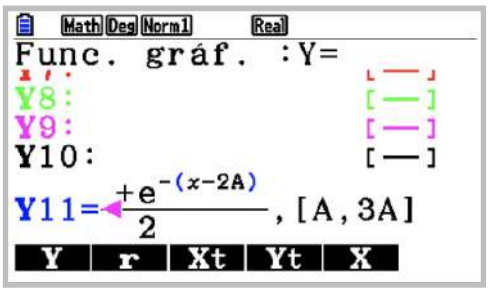


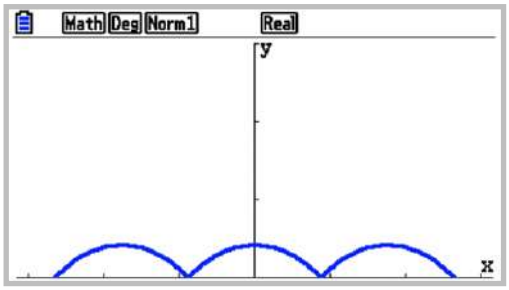








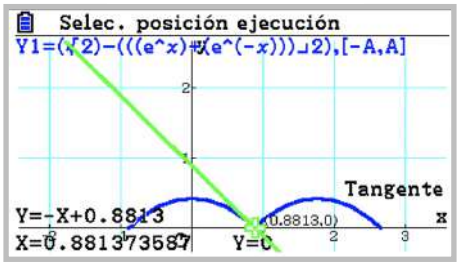


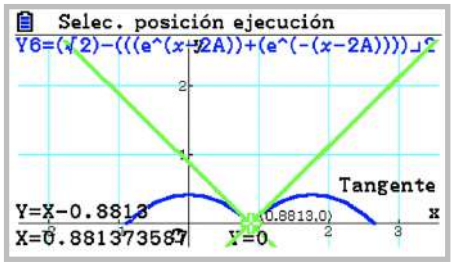


4) Se comprueba que las rectas tangentes a $f(x)$ en el punto no derivable $x = A$ son ortogonales:

Sketch(F4), Tangent (F2), X,θ,T ,

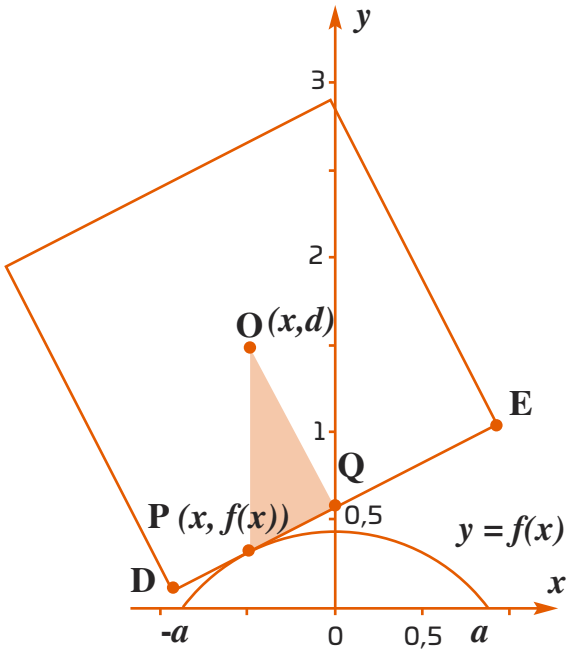
ALPHA , X,θ,T , EXE , EXE





Las rectas $y = -x$ +0,8813 e $y = x -$ 0,8813 son perpendiculares.

Para determinar la longitud de arco de una de las curvas a partir de la ecuación $y = f(x)$, y comprobar que coincide con el lado de la rueda (2 u), se procede con el siguiente cálculo:



$$\overline{OQ} = 1, \overline{OP} = d - f(x)$$

$\overline{DE}$ tangente a la curva en el punto P

$$\alpha = \angle POQ$$

$$\tan\alpha = f'(x) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \overline{PQ}$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$\overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2$$

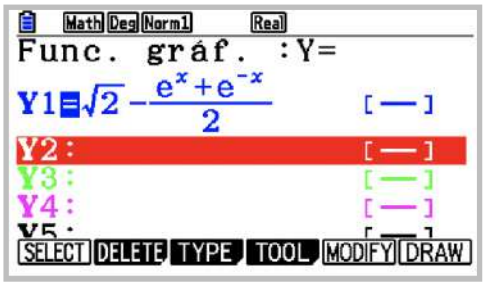
$$(d - f(x))^2 = 1^2 + f'(x)^2,\ d > f(x),\ x \in [-a, a]$$

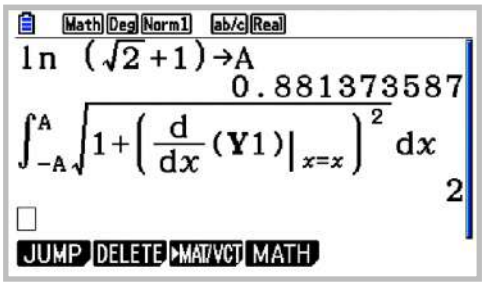
$$d - f(x) = \sqrt{1^2 + f'(x)^2}$$

La longitud del arco es:

$$\int_{-A}^{A} (d - f(x))\ dx = \int_{-A}^{A} \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

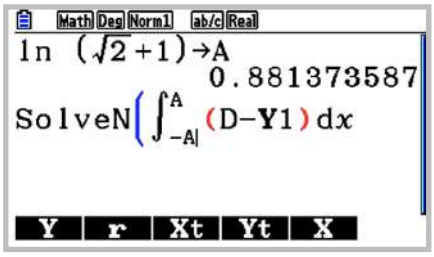
Se escribe la función $f(x)$ en el menú **Gráfico** (sin definir los intervalos) para realizar el cálculo de la integral en el menú **Ejec-Mat**. Se comprueba que el arco de la curva, al igual que el lado del cuadrado, es 2:

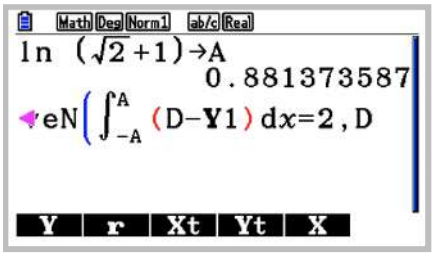


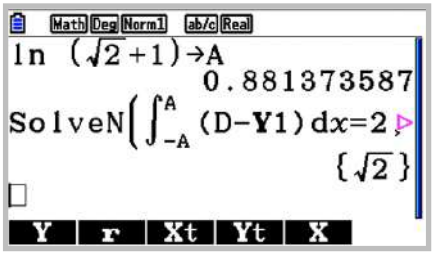


5) Para calcular el valor de la ordenada d se resuelve la ecuación:

$$\int_{-A}^{A}(d - f(x))\ dx = 2 \quad (A = ln\,(\sqrt{2}+1))$$

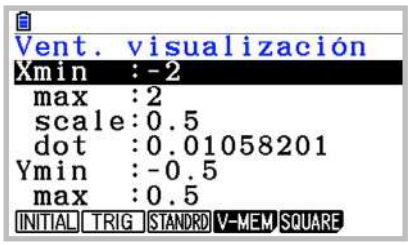


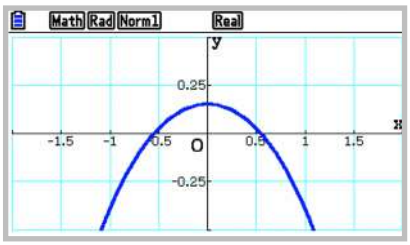


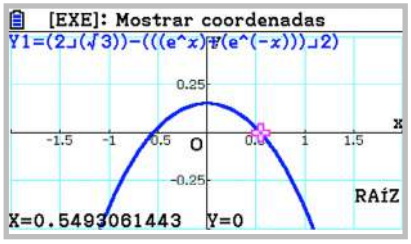


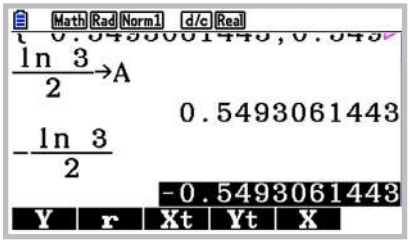
El valor de la ordenada es $d = \sqrt{2}$.

6) Se representa la función $g(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ y se calcula su punto de corte con el semieje positivo de las X. La abscisa del punto, $\frac{\ln 3}{2}$, se guarda en la variable A:

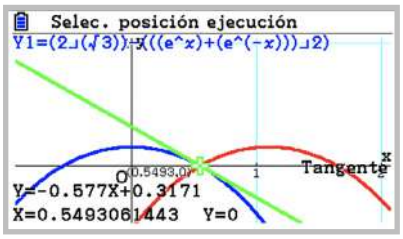


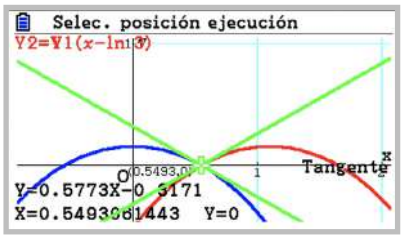




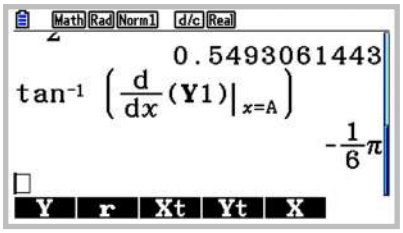


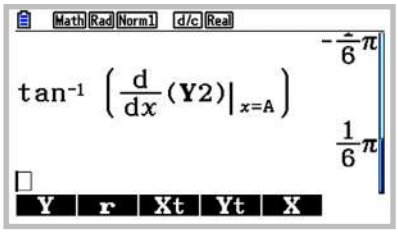
Se dibuja otra de las curvas de la plataforma, $Y2 = Y1\left(x - 2 \cdot \frac{\ln 3}{2}\right)$, y se calcula la pendiente de las rectas tangentes a cada curva en el punto $\left(\frac{\ln 3}{2}, 0\right)$:



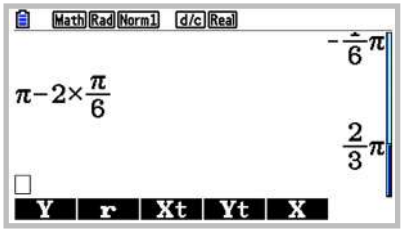
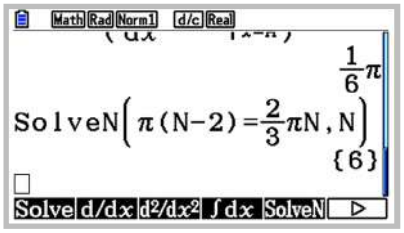


El ángulo que forma cada recta tangente con el semieje positivo de las X es respectivamente de -30° y 30° :





El ángulo que forman las dos rectas tangentes es de 120° :



La rueda, en este caso, tiene forma de hexágono regular: