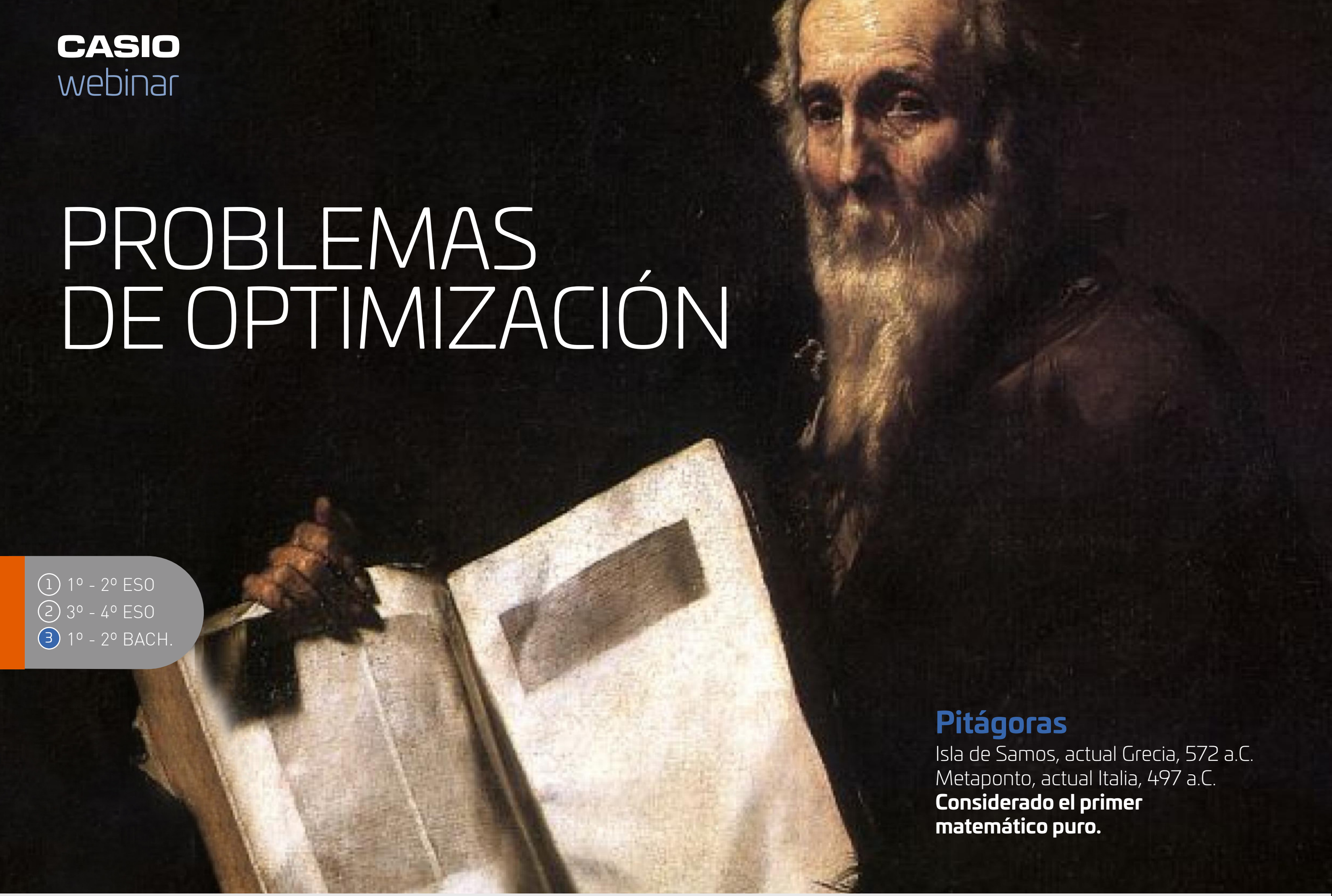
CASIO
webinar



PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

① 1º - 2º ESO
② 3º - 4º ESO
③ 1º - 2º BACH.

Pitágoras
Isla de Samos, actual Grecia, 572 a.C.
Metaponto, actual Italia, 497 a.C.
Considerado el primer matemático puro.

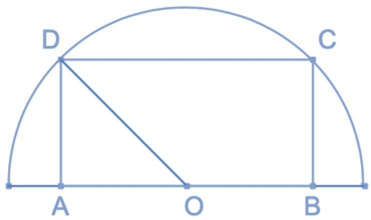
PROBLEMA 1

Determinar el área máxima de un rectángulo inscrito en un semicírculo de radio 10 cm.

SOLUCIÓN

Sea $ABCD$ el rectángulo inscrito sobre el semicírculo de centro O y radio 10 cm:

$$\overline{OD} = \overline{OC} = 10 \text{ cm}$$



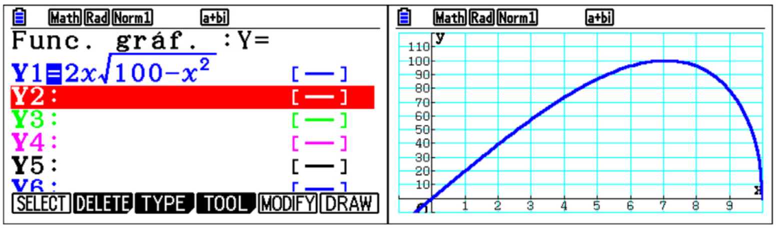
Sea $\overline{OA} = \overline{OB} = x$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $O\overset{\Delta}{A}D$:

$$\overline{AD} = \sqrt{10^2 - x^2}$$

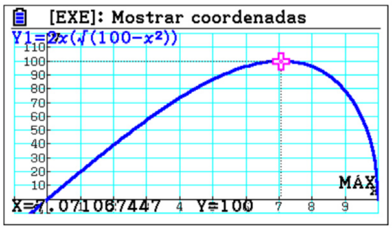
El área del rectángulo $ABCD$ es:

$$S(x) = 2x\sqrt{100 - x^2}, \qquad x \in [0, 10]$$

En el menú **Gráfico** se define y representa la función área:



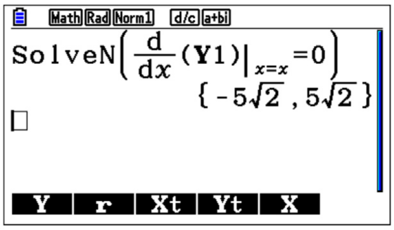
Con la función **G-Solv**, se determina el máximo de la función:



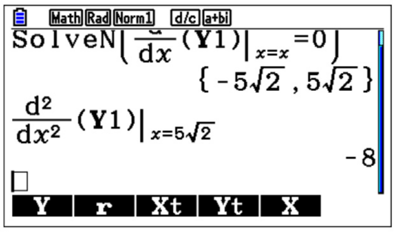
El área máxima se obtiene cuando $x \approx 7{,}0711$ cm y su valor es $S = 100$ cm².

Desde el menú **Ejec-Mat** también se puede resolver este ejercicio.

Se resuelve la ecuación $S'(x) = 0$:

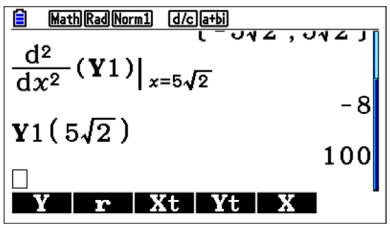


Se calcula $S''(5\sqrt{2})$:



El máximo se alcanza cuando $x = 5\sqrt{2} \approx$ 7,0711 cm.

Se calcula $S(5\sqrt{2})$:



El área máxima es $S(5\sqrt{2})$ = 100 cm².

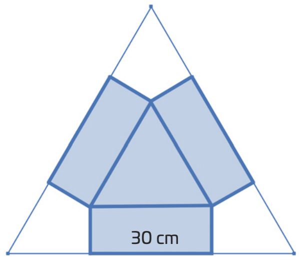
Las dimensiones del rectángulo de área máxima son:

$$\overline{AB} = 10\sqrt{2}, \qquad \overline{AD} = 5\sqrt{2}$$

$$\overline{AB}:\overline{AD} = 2:1$$

PROBLEMA 2

Determina el volumen máximo de una caja sin tapa construida a partir de un triángulo equilátero de lado 30 cm.

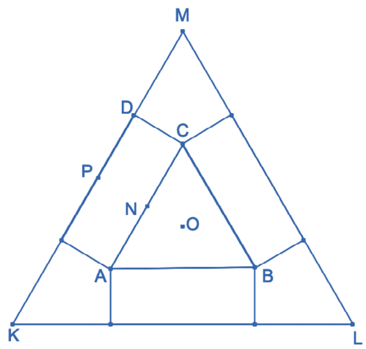


SOLUCIÓN

Sea $\overset{\Delta}{KLM}$ el triángulo equilátero de lado $\overline{KL}$ = 30 cm de centro O.

La caja es un prisma regular triangular de base $\overset{\Delta}{ABC}$ y altura $\overline{CD}$.

Sea $x = \overline{AC}$. Sea P el punto medio del lado $\overline{KM}$. Sea N el punto medio del lado $\overline{AC}$.



Para saber la altura del prisma $\overline{CD} = \overline{PN} = \overline{PO} - \overline{NO}$:

1) Se calcula $\overline{PO}$.

Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{KPL}$:

$$\overline{PL} = \frac{\sqrt{3}}{2}30 = 15\sqrt{3}$$

Se aplica la propiedad del baricentro:

$$\overline{PO} = \frac{1}{3}\overline{PL} = 5\sqrt{3}$$

2) Se calcula $\overline{NO}$.

Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ANB}$:

$$\overline{NB} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Se aplica de nuevo la propiedad del baricentro:

$$\overline{NO} = \frac{1}{3}\overline{NB} = \frac{\sqrt{3}}{6}x$$

La altura del prisma es:

$$\overline{CD} = \overline{PN} = \overline{PO} - \overline{NO} = \sqrt{3}\left(\frac{30-x}{6}\right)$$

El área de la base del prisma es:

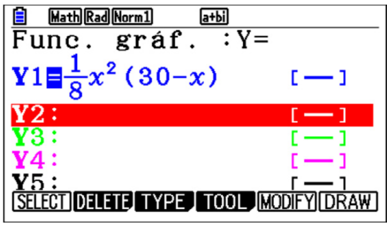
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

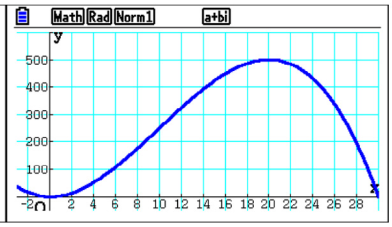
El volumen del prisma es:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \cdot \sqrt{3}\left(\frac{30-x}{6}\right)$$

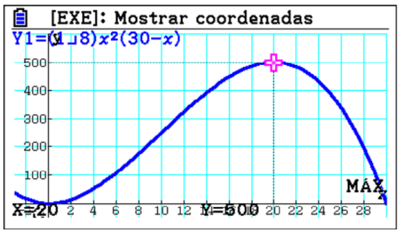
$$V = \frac{1}{8}x^2\,(30-x), \quad x \in [0, 30]$$

Desde el menú **Gráfico**, se define y representa la función volumen:



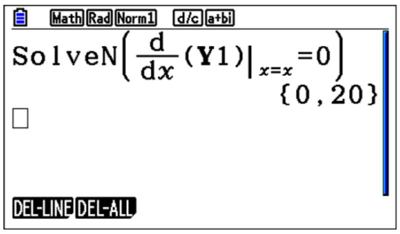


Con la función **G-Solv**, se determina el máximo de la función:

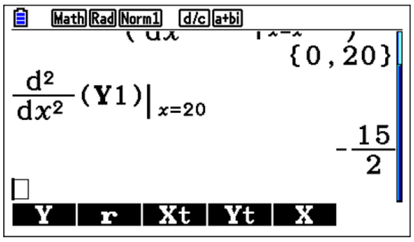


El volumen máximo de la caja se alcanza cuando x = 20 cm y su valor es $V_{max} = 500 \text{ cm}^3$.

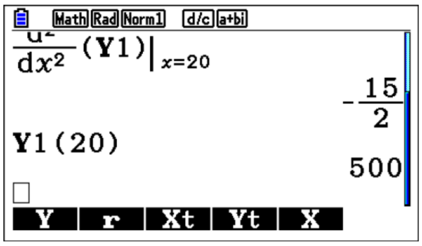
Si se utiliza el menú **Ejec-Mat**, se resuelve la ecuación $V'(x) = 0$:



$V''(20) = \frac{-15}{2}$ por lo que el volumen máximo de la caja se alcanza cuando x = 20 cm:



El volumen máximo es $V_{max} = 500 \text{ cm}^3$:

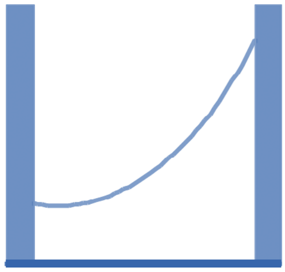


PROBLEMA 3

Una cadena de metal está sujeta a dos muros que distan entre ellos 2 metros.
La altura a la que está colgada la cadena de cada muro viene definida por la función $h(x) = e^{-2x} + e^{x}$ donde $0 \leq x \leq 2$ y x es la distancia de un punto de la tierra al muro de la izquierda.

a) Calcula la altura a la que está colgada la cadena en cada muro.

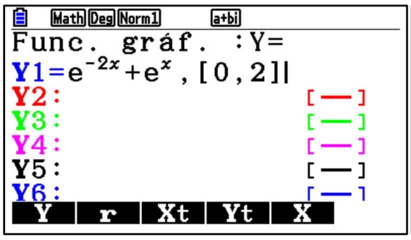
b) Calcula la altura mínima de la cadena.

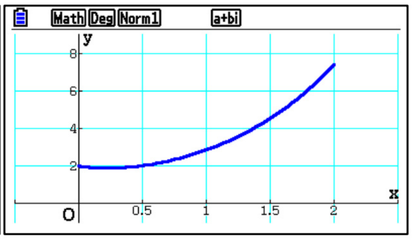


2 metros

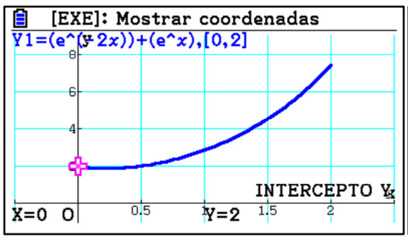
SOLUCIÓN 1

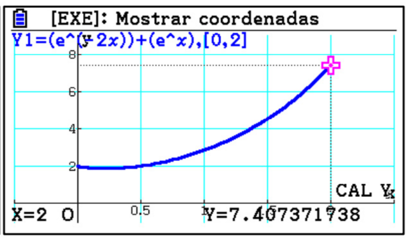
En el menú Gráfico se define la función altura $h(x) = e^{-2x} + e^{x}$ con $0 \leq x \leq 2$:





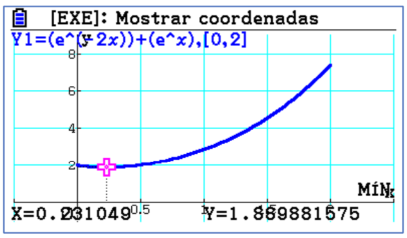
Con la función **G-Solv** se calcula la altura que tiene la cadena en cada muro:





Del muro de la izquierda está a una altura de 2 metros y del muro de la derecha a una altura de 7,41 metros.

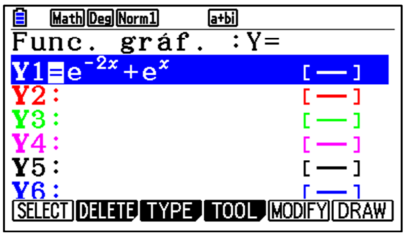
Con la función **G-Solv** se calcula la altura mínima de la cadena:



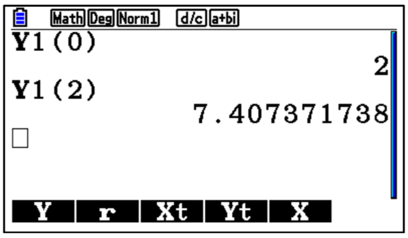
La altura mínima es 1,89 metros y se alcanza a una distancia de 0,23 metros del muro de la izquierda.

SOLUCIÓN 2

En el menú Gráfico se define la función altura $h(x) = e^{-2x} + e^{x}$:

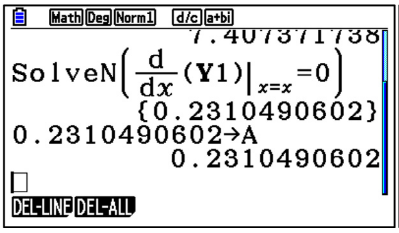


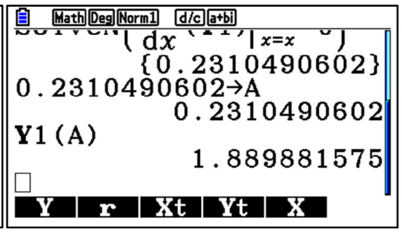
En el menú **Ejec-Mat** se calcula $Y1(0)$ e $Y1(2)$:



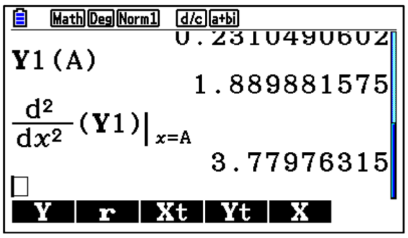
Del muro de la izquierda está a una altura de 2 metros y del muro de la derecha a una altura de 7,41 metros.

Para calcular el mínimo se resuelve la ecuación $\left.\frac{d}{dx}Y1\right|_{x=x} = 0$





Se comprueba con la segunda derivada que en $x = A$ hay un mínimo y que el valor de la función en A es 1,89:



La altura mínima es 1,89 metros y se alcanza a una distancia de 0,23 metros del muro de la izquierda.