01 | Resolución de triángulos. Valor de una expresión.
Teorema del coseno

Los problemas que se plantean en topografía y navegación exigen la resolución de triángulos, es decir, la obtención de sus elementos (lados y ángulos) desconocidos a partir de los conocidos.

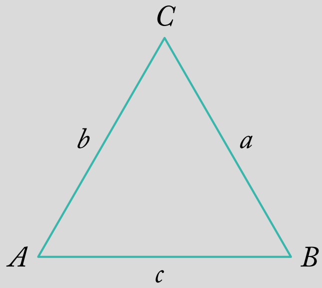
La resolución de un triángulo puede obtenerse mediante su construcción geométrica (con regla y compás) o utilizando expresiones trigonométricas (como los teoremas del seno y el coseno). Estos problemas pueden tener solución única, dos soluciones o bien pueden ser de imposible solución.

A continuación se utilizará el **teorema del coseno** para resolver un triángulo.

Dicho teorema es una generalización del teorema de Pitágoras. En francés lleva el nombre del matemático y astrónomo persa al-Kashi. Dicho teorema dice así:

Dado un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ de lados conocidos $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ y $\overline{AB} = c$, se tiene:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \arccos\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right)$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \Rightarrow \hat{B} = \arccos\left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}\right)$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} \Rightarrow \hat{C} = \arccos\left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}\right)$



1 Resuelve el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, de lados $a = 15$, $b = 34$ y $c = 35$.

2 Resuelve el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, conocidos $b = 4$, $c = 3$ y $\hat{A} = 60°$.

3 Resuelve el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, conocidos $a = 3$, $c = 4$ y $\hat{A} = 30°$.

01 | Resolución de triángulos. Valor de una expresión.
Teorema del coseno

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- El alumnado deberá saber cómo calcular el valor numérico de una expresión algebraica previamente a la realización de esta actividad.
- El alumno tiene que conocer las razones trigonométricas.
- Para realizar la actividad se utilizará la función *CALC* y el modo *Ecuación/Función*, que permite la resolución de ecuaciones de segundo grado.
- Se utilizarán razones trigonométricas para calcular ángulos (modo angular sexagesimal).

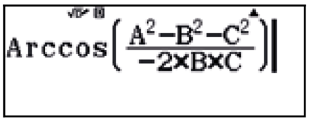
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

De este triángulo se conocen los tres lados y se desconocen los ángulos. Para determinar el ángulo A, se introduce en la calculadora la expresión:

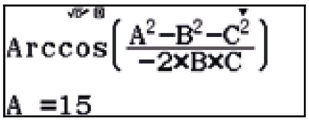
$$\hat{A} = \text{arccos}\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right)$$

[SHIFT] [cos] [▭/▭] [ALPHA] [(−)] [x^2] [−] [ALPHA] [°'"] [x^2] [−] [ALPHA]
[x^{-1}] [x^2] [▼] [−] [2] [×] [ALPHA] [°'"] [×] [ALPHA] [x^{-1}] [▶] [)]

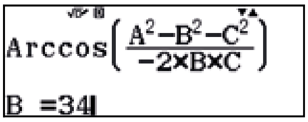


Seguidamente, se presiona [CALC] y se substituye en la fórmula los valores $A \longrightarrow a = 15$, $B \longrightarrow b = 34$, $C \longrightarrow c = 35$.

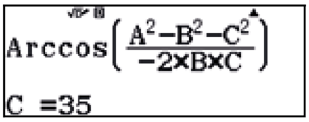
[CALC] [1] [5] [=]



[3] [4] [=]

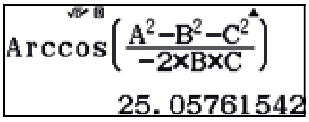


[3] [5] [=]

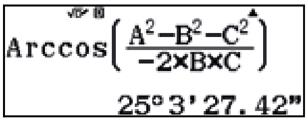


Al presionar [=] se obtiene el valor del ángulo $\hat{A}$:

[=]



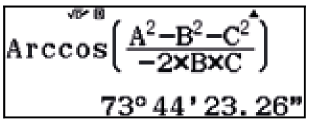
[°'"]



En consecuencia, el ángulo resulta $\hat{A}$ = 25° 3′ 27,42′′.

Para determinar el valor del ángulo $\hat{B}$, se procede como en el caso anterior, sustituyendo los valores $A \longrightarrow b = 34$, $B \longrightarrow a = 15$, $C \longrightarrow c = 35$.

[CALC] [3] [4] [=] [1] [5] [=] [3] [5] [=] [=] [°'"]

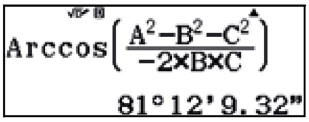


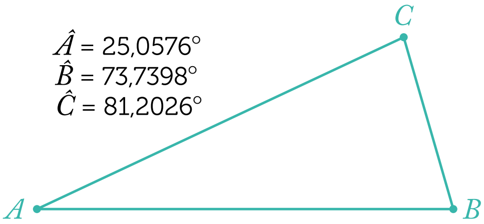
Es decir, $\hat{B}$ = 73° 44′ 23,26′′.

01 | Resolución de triángulos. Valor de una expresión.
Teorema del coseno

El ángulo $\hat{C}$ se calcula como en los casos anteriores. Ahora se sustituyen los valores $A \longrightarrow c = 35$, $B \longrightarrow a = 15$, $C \longrightarrow b = 34$.

CALC 3 5 = 1 5 = 3 4 = = °'''



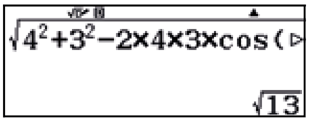


En consecuencia, $\hat{C} = 81° \ 12' \ 9{,}32''$.

El triángulo resulta con las dimensiones que se muestran en la figura adjunta.

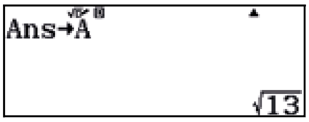
2

Para calcular el lado a se utiliza la fórmula del coseno: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}}$

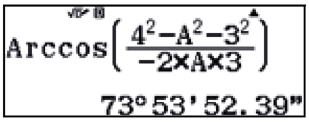


Por tanto, $a = \sqrt{13}$. Se almacena este valor en la variable A.

STO (−)

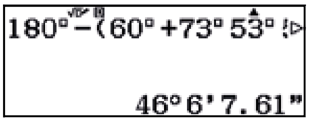


Para calcular el ángulo $\hat{B}$ se utiliza el teorema del coseno: $\hat{B} = \text{arccos}\left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}\right)$

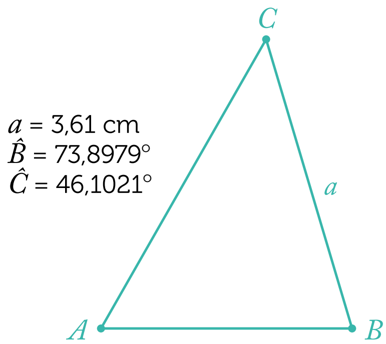


En consecuencia, $\hat{B} = 73° \ 53' \ 52{,}39''$.

Por tanto, $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B})$.



Es decir, $\hat{C} = 46° \ 6' \ 7{,}61''$.



3

Si se resuelve gráficamente el problema se observa que existen dos soluciones.

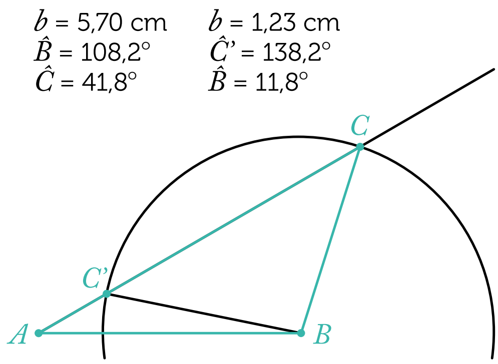
Se utiliza la fórmula del coseno $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ para calcular el lado b.

$$3^2 = b^2 + 4^2 - 2b \cdot 4 \cdot \cos 30°$$

Se observa que se trata de una ecuación de segundo grado.

Para resolver la ecuación utilizando la calculadora, se pasan todos los términos, ordenados según el grado, a uno de los miembros de la ecuación. Es decir, se iguala esta a cero:

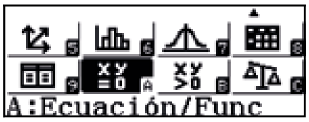
$b^2 + 4^2 - 8 \cdot \cos 30° \cdot b - 9 = 0 \Rightarrow b^2 - 8 \cdot \cos 30° \cdot b + 7 = 0$



Teorema del coseno

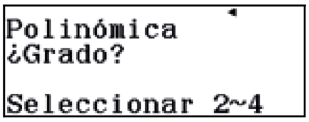
Una vez se tiene dispuesta la expresión algebraica de esta manera, puede utilizarse el modo *Ecuación/Función* para calcular el lado b, resolviendo la ecuación de segundo grado.

MENU (−)

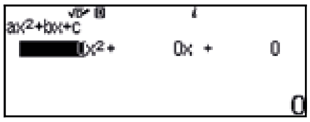


2

2

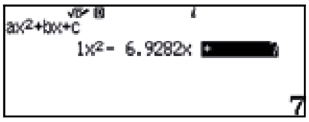


=

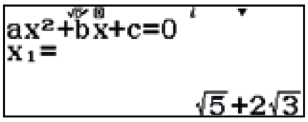


Se introducen los coeficientes correspondientes y se presiona =, con lo que se obtienen las dos soluciones de la ecuación:

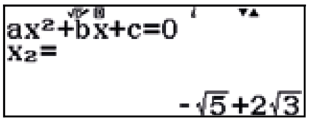
=



=



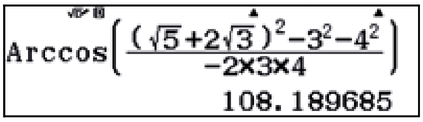
=



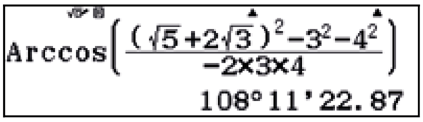
Se analizan ahora separadamente los triángulos que resultan de considerar cada una de las soluciones de la ecuación:

a) $b = \sqrt{5} + 2\sqrt{3} \approx 5{,}70$

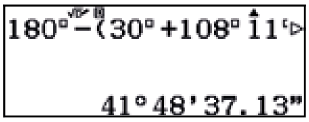
Se considera la primera solución y se aplica el teorema del coseno para calcular el ángulo B:



°'"

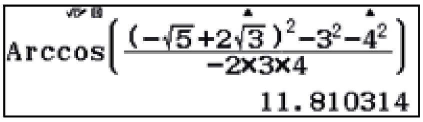


El ángulo $\hat{C}$ se calcula como $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B})$. Por tanto:

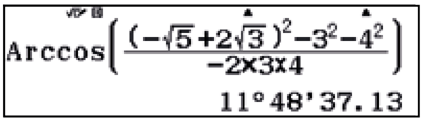


b) $b = -\sqrt{5} + 2\sqrt{3} \approx 1{,}23$

Se considera la segunda solución y se aplica el teorema del coseno, con lo que se obtiene:

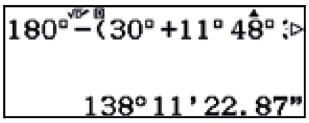


°'"



Es decir, $\hat{B} = 11° \, 48' \, 37{,}13''$.

En cuanto al ángulo $\hat{C}$, se obtiene a partir de $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B})$. Por tanto:



$\hat{C} = 138° \, 11' \, 22{,}87''$.