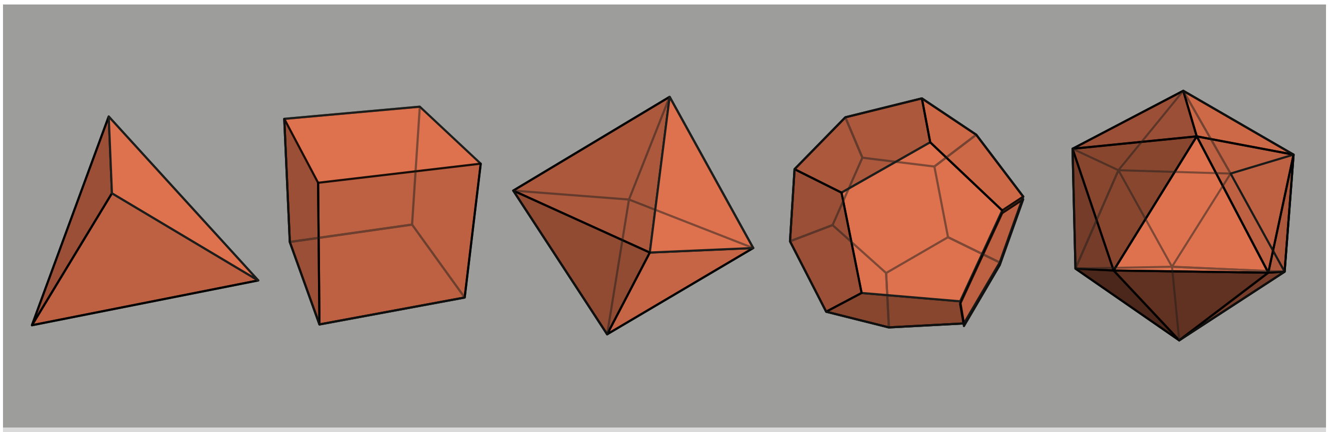
20 | Potencias y radicales
Sólidos platónicos



Un sólido platónico es un cuerpo geométrico con las siguientes características:

- Sus caras son polígonos regulares iguales.
- En cada vértice concurre el mismo número de caras.
- Cumple la fórmula de Euler:
  caras + vértices = aristas + 2

Existen cinco sólidos platónicos: el tetraedro, el cubo o hexaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

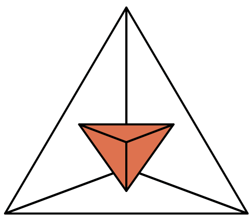
Los sólidos platónicos se conocen desde la antigüedad y fueron estudiados y utilizados ampliamente por los antiguos griegos, que incluso les otorgaron propiedades mágicas. Estos cuerpos geométricos deben su nombre a Platón, quien, junto con Pitágoras, fue uno de los primeros sabios en estudiarlos.

En el siglo XVII Kepler intentó explicar el movimiento de los planetas en el sistema solar combinando sólidos platónicos, si bien hoy sabemos que las órbitas de los planetas no se corresponden en absoluto con estos cuerpos.

1 Rellena la siguiente tabla haciendo uso de la calculadora. Puedes buscar en Internet las fórmulas que permiten determinar los volúmenes y las áreas de los sólidos platónicos a partir de sus aristas.

SÓLIDO PLATÓNICO	FÓRMULA DE LA SUPERFICIE	FÓRMULA DEL VOLUMEN	TAMAÑO DE LA ARISTA	SUPERFICIE	VOLUMEN
tetraedro			2		
hexaedro			2		
octaedro			2		
dodecaedro			2		
icosaedro			2		

2 Si se unen con segmentos los centros de las caras contiguas de un sólido platónico se obtiene otro poliedro. En la figura de la derecha se observa un tetraedro de 2 cm de arista y su dual, otro tetraedro de 0,6666…cm de arista.



a) Calcula el volumen del tetraedro de arista 2 y el volumen del tetraedro dual de arista 0,6666…

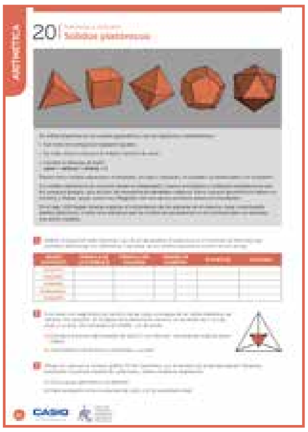
b) ¿Qué relación existe entre un tetraedro y su dual?

3 Dibuja un cubo en la ventana gráfica 3D de GeoGebra, con el tamaño de arista que desees. Después, encuentra los puntos medios de cada cara y únelos mediante segmentos.

a) ¿Qué cuerpo geométrico se obtiene?

b) Halla la relación entre el volumen del cubo y el de su poliedro dual.

Sólidos platónicos



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II Iberia, ordenador o tablet para consultar Internet y poder contestar a las preguntas, programa GeoGebra.

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS
- Se pretende que los alumnos realicen búsquedas en Internet de conceptos matemáticos; en este caso, de las expresiones que proporcionan las áreas y los volúmenes de los sólidos platónicos.
- El hecho de que la calculadora realice los cálculos en notación natural puede animar a los alumnos a realizar estos complicados cálculos, considerando que los hacen del mismo modo que el que se observa en la pizarra de clase.
- Puede ser este un buen momento para introducir otros recursos, como GeoGebra, que puede contribuir a hacer las matemáticas más divertidas y a darles un nuevo sentido, más allá del mero cálculo.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Las fórmulas de las superficies y los volúmenes de los sólidos platónicos en función de sus aristas son las siguientes:

SÓLIDO PLATÓNICO	FÓRMULA DE LA SUPERFICIE	FÓRMULA DEL VOLUMEN
tetraedro	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$
hexaedro	$6a^2$	a^3
octaedro	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
dodecaedro	$15a^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	$\frac{5a^3}{2}\sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}}$
icosaedro	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5a^3}{6}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$

A continuación se calculan las áreas y los volúmenes para cuerpos geométricos de arista 2

SÓLIDO PLATÓNICO	SUPERFICIE	VOLUMEN
tetraedro	2 x^2 √ 3 = $2^2\sqrt{3}$ $4\sqrt{3}$	▭ 2 $x^■$ 3 ▼ 1 2 ▶ √ 2 = $\frac{2^3}{12}\sqrt{2}$ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
hexaedro	6 × 2 x^2 = 6×2^2 24	2 $x^■$ 3 = 2^3 8
octaedro	2 × 2 x^2 √ 3 = $2\times2^2\times\sqrt{3}$ $8\sqrt{3}$	▭ 2 $x^■$ 3 ▶ √ 2 ▼ 3 = $\frac{2^3\sqrt{2}}{3}$ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

SÓLIDO PLATÓNICO	SUPERFICIE	VOLUMEN
dodecaedro	[1] [5] [×] [2] [x^2] [√■] [▭] [5] [+] [2] [√■] [5] [▼] [5] [=] $15\times2^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ 82.58291523	[▭] [5] [×] [2] [$x^■$] [3] [▼] [2] [▶] [√■] [▭] [4] [7] [+] [2] [1] [√■] [5] [▼] [1] [0] [=] $\frac{5\times2^3}{2}\sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}}$ 61.30495168
icosaedro	[5] [×] [2] [x^2] [×] [√■] [3] [=] $5\times2^2\times\sqrt{3}$ $20\sqrt{3}$	[5] [×] [2] [$x^■$] [3] [▼] [6] [▶] [×] [DEL] [√■] [▭] [7] [+] [3] [√■] [5] [▼] [2] [=] $\frac{5\times2^3}{6}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$ 17.45355993

2

a) El volumen del tetraedro de arista 2 es, como ya se ha visto:

$$\frac{2^3}{12}\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

En cuanto al volumen del tetraedro de arista 0,6666..., resulta:

$$\frac{0.\overline{6}^3}{12}\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{81}$$

b) La relación entre el volumen del tetraedro y el volumen de su tetraedro dual es:

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \div \frac{2\sqrt{2}}{81} = 27$$

3

a) Se obtiene un octaedro.