

03 Regularidades numéricas

Recurrencia en una tabla de multiplicar

La tabla de multiplicar presenta interesantes relaciones entre los números que contiene. Si te fijas, por ejemplo, en la diagonal principal de la tabla, observarás que está formada por la sucesión de cuadrados perfectos:

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

La generalización matemática de dicha sucesión es $a_n = n^2$, con $n = 1, 2, 3, \dots$

Observa la siguiente tabla de multiplicar, en la que los números aparecen dispuestos formando una escuadra de carpintero:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225

1 Halla la suma de los números contenidos en cada escuadra:

$$\begin{aligned}
 &1 \\
 &2 + 4 + 2 \\
 &3 + 6 + 9 + 6 + 3 \\
 &4 + 8 + 12 + 16 + 12 + 8 + 4 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

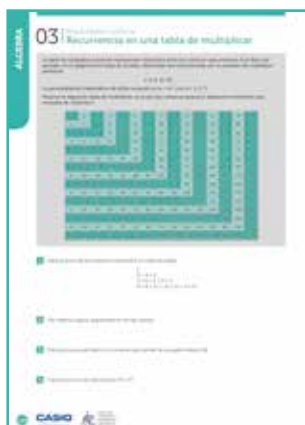
2 ¿Se observa alguna regularidad en dichas sumas?

3 Calcula la suma de todos los números que forman la escuadra número 16.

4 Calcula la suma de toda la tabla 15 x 15.

03 Regularidades numéricas

Recurrencia en una tabla de multiplicar



MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Esta actividad plantea la búsqueda de patrones en problemas aritméticos y la generalización de los resultados obtenidos.
- Para desarrollar la actividad se hará uso de la función *Sumas finitas*, que permite resolver sumas finitas de progresiones aritméticas y geométricas. Se accede a dicha función mediante **SHIFT** **(x)**.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

El resultado de la suma de los números contenidos en las primeras escuadras puede calcularse directamente:

$$1; 2 + 4 + 2 = 8; 3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27; 4 + 8 + 12 + 16 + 12 + 8 + 4 = 64$$

Para calcular las siguientes sumas se recurre a la función *Sumas finitas*:

$$\sum_{x=1}^5 (5x) + \sum_{x=1}^4 (5x) = 125$$

$$\sum_{x=1}^6 (6x) + \sum_{x=1}^5 (6x) = 216$$

$$\sum_{x=1}^7 (7x) + \sum_{x=1}^6 (7x) = 343$$

2

Como se observa, la suma de los números contenidos en las escuadras coincide con la sucesión de los cubos perfectos:

$$1^3 = 1, 2^3 = 8, 3^3 = 27, 4^3 = 64, 5^3 = 125, 6^3 = 216 \dots n^3$$

3

La suma de los números contenidos en la escuadra 16 es:

$$\sum_{x=1}^{16} (16x) + \sum_{x=1}^{15} (16x) = 4096$$

Se comprueba que dicha suma es 16^3 .

$$16^3 = 4096$$

Se puede demostrar de forma analítica que el resultado de la n -ésima suma es n^3 :

$$\begin{aligned} & n \cdot 1 + n \cdot 2 + \dots + n \cdot (n-1) + n \cdot n + n \cdot (n-1) + n \cdot (n-2) + \dots + n \cdot 2 + n \cdot 1 = \\ & = n \cdot (1 + 2 + \dots + n) + n \cdot (1 + 2 + \dots + n-1) = n \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n + n \cdot \frac{1+n-1}{2} \cdot (n-1) = \\ & = n^2 \cdot \left(\frac{1+n}{2} + \frac{n-1}{2} \right) = n^2 \cdot n = n^3 \end{aligned}$$

4

La suma de todos los números de la tabla 15×15 es $\sum_{n=1}^{15} n^3$:

$$\sum_{x=1}^{15} (x^3) = 14400$$

En consecuencia, la suma de todos los números de la tabla 15×15 es 14 400.