09 | Identificación tipo de números
Propiedades numéricas del número de oro

Sea un segmento $\overline{AB}$ y un punto interior E que lo divide en dos segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{EB}$. Se dice que el punto E divide el segmento $\overline{AB}$ en proporción áurea (o en media y extrema razón) si se cumple que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \Phi$$

La razón de proporcionalidad Φ se conoce como **número de oro** o **número áureo**.

Para realizar la división áurea de un segmento $\overline{AB}$ se procede de la siguiente manera:

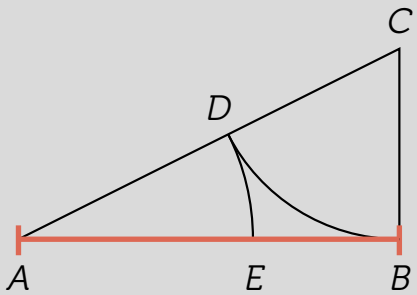
1. Se dibuja el segmento $\overline{BC}$ perpendicular a $\overline{AB}$ tal que $\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

2. Se dibuja el segmento $\overline{AC}$.

3. Se traza desde C un arco de radio $\overline{BC}$ y se marca el punto de intersección D con el segmento $\overline{AC}$.

4. Se traza un arco desde A de radio $\overline{AD}$ y se considera el punto de intersección, E, con el segmento $\overline{AB}$.

Se puede comprobar que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \Phi$, con $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Demuestra las siguientes propiedades del número de oro:

1 Es la solución positiva de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$.

2 Verifica las siguientes igualdades: $\Phi^2 = 1 + \Phi$ y $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$.

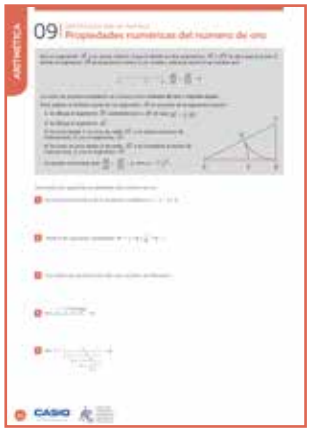
3 Sus potencias sucesivas forman una sucesión de Fibonacci.

4 $\lim \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1\ldots}}}} = \Phi$

5 $\lim 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}} = \Phi$

CASIO División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

09 | Identificación tipo de números
Propiedades numéricas del número de oro



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

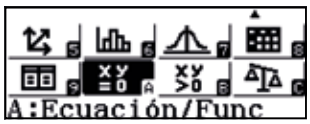
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- Esta actividad se plantea con el fin de trabajar los números irracionales y los radicales, así como las ecuaciones de segundo grado.
- Conviene prestar especial atención al modo de usar las diferentes memorias de la calculadora, así como los modos de aplicación *Ecuación/Función* y *Verificar*.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

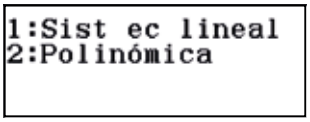
1

Se accede al menú *Ecuación/Función* y se selecciona la opción correspondiente a las ecuaciones polinómicas. Seguidamente, se selecciona el grado 2.

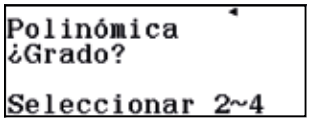
MENU (−)



2

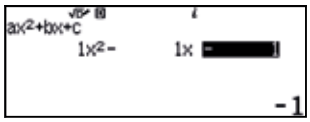


2

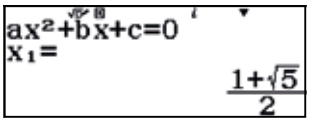


A continuación se introducen los coeficientes y se resuelve la ecuación de segundo grado:

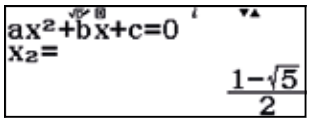
1 = (−) 1 = (−) 1 =



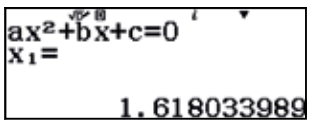
=

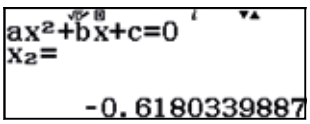


=



Para obtener las expresiones decimales de las soluciones se presiona S⇔D.

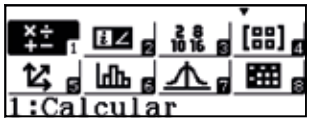




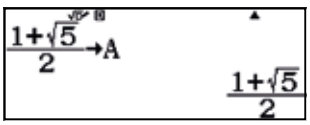
2

Se accede al menú *Calcular* y se almacena el valor numérico del número de oro en una variable, por ejemplo, en A:

MENU 1

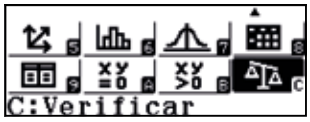


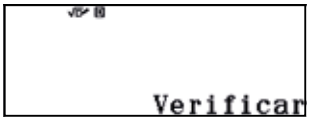
▭ 1 + √▭ 5 ▼ 2 STO (−)



A continuación se accede al menú *Verificar*:

MENU x^{-1}



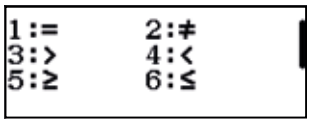


09 | Identificación tipo de números
Propiedades numéricas del número de oro

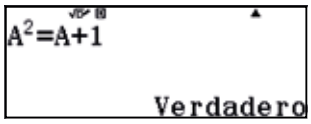
Se comprueba la veracidad de la igualdad $A^2 = A + 1$:

ALPHA (−) x^2

OPTN 1



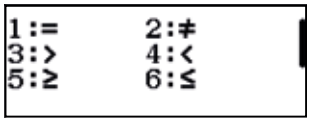
ALPHA (−) + 1 =



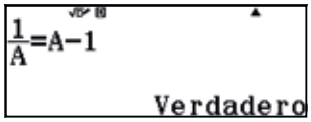
Para demostrar la igualdad $\frac{1}{A} = A - 1$ se procede análogamente:

▭ 1 ▼ ALPHA (−) ▶

OPTN 1



ALPHA (−) − 1 =



3

Una vez se ha demostrado que $\Phi^2 = 1 + \Phi$, es fácil ver que las potencias del número de oro forman una sucesión de Fibonacci, es decir, cada término resulta de la suma de los dos términos anteriores.

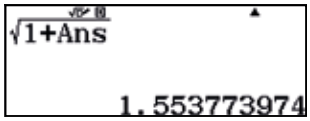
Φ
$\Phi^2 = 1 + \Phi$
$\Phi^3 = \Phi^2 \cdot \Phi = (1 + \Phi) \cdot \Phi = \Phi + \Phi^2$
$\Phi^4 = \Phi^3 \cdot \Phi = (\Phi \cdot \Phi^2) \cdot \Phi = \Phi^2 + \Phi^3$
...
$\Phi^n = \Phi^{n-2} + \Phi^{n-1}$

4

Para comprobar que $\lim \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1\ldots}}}} = \Phi$ se procede a realizar el siguiente cálculo recursivo:

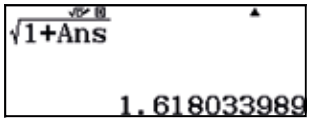
√▭ 1 + √▭ 1 =

√▭ 1 + Ans =



Se repite el procedimiento y se observa como el resultado se aproxima, cada vez más, al número de oro:

= = = = = = = = = = = = = = = = = = =

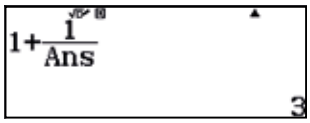


5

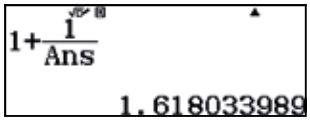
Para comprobar que la expresión tiende al número de oro se realiza un cálculo recursivo análogo al del apartado anterior.

1 ▭ 1 + 1 =

1 + ▭ 1 ▼ Ans



= = = = = = = = = = = = = = = = = = =



CASIO División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas