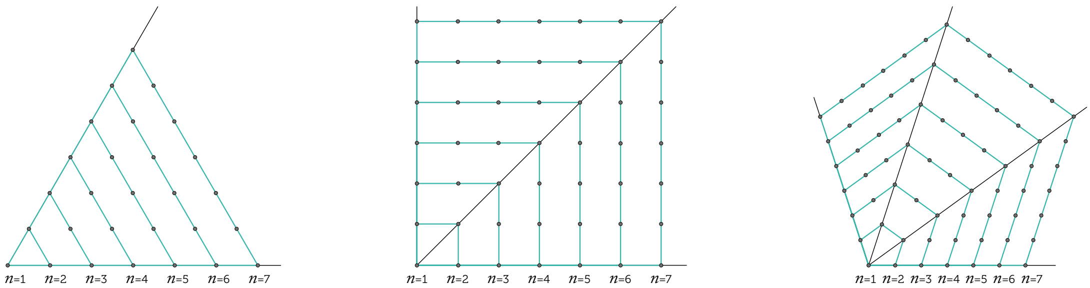
05 | Regularidades numéricas
Números poligonales

Laura apila sus lápices de colores en filas de forma que cada lápiz de una fila se coloca entre dos lápices de la fila inferior. Ha construido con los lápices una pirámide de diez filas y se pregunta cuántos lápices tiene y cuántos lápices necesitaría para apilar 15 filas.

En matemáticas, decimos que un número es poligonal si su representación mediante puntos, piedras, monedas, etc. puede recomponerse en forma de polígono regular. Existen números triangulares, cuadrados, pentagonales, hexagonales… A continuación los descubriremos y trabajaremos con alguna de sus propiedades.

1 Observa las figuras adjuntas y completa la tabla con el número de puntos que hay en cada figura según el valor de n:



			n						
			1	2	3	4	5	6	7
Lados del polígono (p)	3	Triangulares	1	3	6	10	15	21	
	4	Cuadrados	1	4	9				
	5	Pentagonales	1	5	12				
	6	Hexagonales	1	6	15				

2 Considera ahora el número de puntos que se añade a cada figura respecto de la figura anterior y completa la tabla.

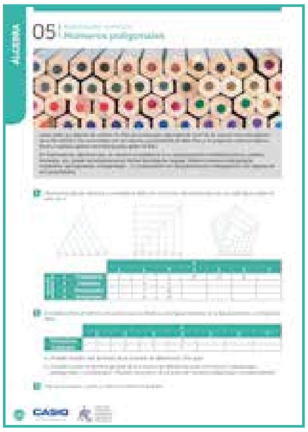
	n						
	1	2	3	4	5	6	7
Triangulares	1	2	3	4			
Cuadrados	1	3	5	7			

a) ¿Puedes escribir más términos de la sucesión de diferencias? ¿Por qué?

b) ¿Puedes escribir el término general de la sucesión de diferencias para los números hexagonales, heptagonales y octogonales? ¿Puedes reconstruir la sucesión de números poligonales correspondiente?

3 Calcula el octavo, noveno y décimo número triangular.

05 | Regularidades numéricas
Números poligonales



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

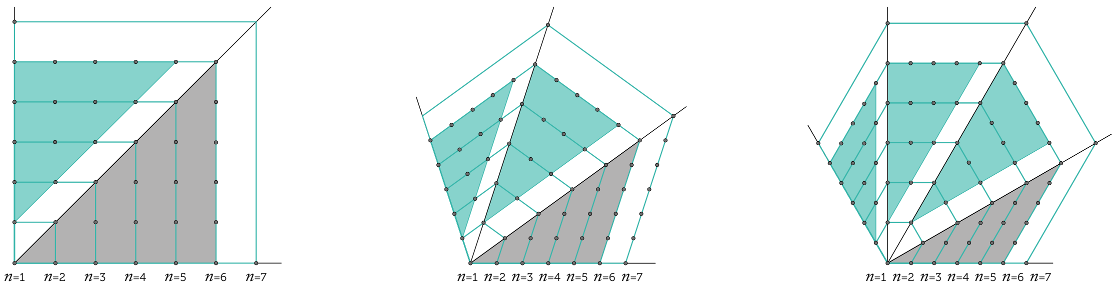
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Esta actividad tiene dos partes. La primera está diseñada para que el alumnado descubra que cualquier número poligonal se puede calcular a partir de dos números triangulares, según la siguiente fórmula:

$$Tp,n = T3,n + (p - 3) \cdot T3,n - 1$$

Donde Tp,n es el n-ésimo número p-agonal y $T3,n$ y $T3,n - 1$ son los n-ésimo y n-1-ésimo números triangulares.

- Se trata de aprovechar el conocimiento que tiene el alumnado sobre progresiones para construir la tabla de números poligonales por columnas, conocida la sucesión de números triangulares. Si se estima oportuno, se pueden utilizar imágenes parecidas a las siguientes, como apoyo visual a los razonamientos.



- Se puede trabajar con la fórmula para la suma de los términos de una sucesión aritmética para obtener el término general de cualquier sucesión de números poligonales a partir de la progresión de las diferencias de términos sucesivos. En este caso, se trabajará con la tabla de números poligonales por filas.
- Para facilitar la automatización de los cálculos, se rellenará la tabla haciendo uso de la función CALC. La tecla (Σ) permite obtener los números poligonales como la suma de los n términos de una progresión aritmética.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Para rellenar la cuarta columna de la tabla (n = 4), hay que calcular el valor de la expresión

$$Tp,4 = T3,4 + (p - 3) \cdot T3,3 \text{ para } p = 3, 4, 5 \text{ y } 6, \text{ donde } T3,4 = 10 \text{ y } T3,3 = 6.$$

Para ello, hay que introducir en la calculadora la expresión:

$$Tp,4 = 10 + (p - 3) \cdot 6$$

1 0 + (x − 3) × 6

```
10+(x−3)×6
```

Seguidamente, se calculan los valores numéricos correspondientes:

CALC 4 =

```
10+(x−3)×6
x =4
```

⇓

```
10+(x−3)×6
                16
```

CALC 5 =

```
10+(x−3)×6
x =5
```

⇓

```
10+(x−3)×6
                22
```

CALC 6 =

```
10+(x−3)×6
x =6
```

⇓

```
10+(x−3)×6
                28
```

Números poligonales

Procediendo análogamente con el resto de columnas, se obtiene la tabla siguiente:

			n						
			1	2	3	4	5	6	7
Lados del polígono (p)	3	Triangulares	1	3	6	10	15	21	28
	4	Cuadrados	1	4	9	16	25	36	49
	5	Pentagonales	1	5	12	22	35	51	70
	6	Hexagonales	1	6	15	28	45	66	91

Opcionalmente, se puede completar la tabla hasta los números decagonales:

			n						
			1	2	3	4	5	6	7
Lados del polígono (p)	7	Heptagonales	1	7	18	34	55	81	112
	8	Octogonales	1	8	21	40	65	96	133
	9	Nonagonales	1	9	24	46	75	111	154
	10	Decagonales	1	10	27	52	85	126	175

2

Hasta ahora se ha trabajado en la forma de completar la tabla de arriba hacia abajo, relacionando los distintos tipos de números de una misma iteración y utilizando para ello solamente el concepto de progresión aritmética. Ahora se va a aprender a ampliar la tabla horizontalmente, considerando cada tipo de número de forma aislada, y descubriendo lo que tienen en común.

Se puede trabajar con tablas cómo las siguientes:

n	1	2	3	4	5	6	7	...	k
Triangulares	1	3	6	10	15	21	28	...	
Diferencias de términos sucesivos	1	2	3	4	5	6	7	...	k

n	1	2	3	4	5	6	7	...	k
Cuadrados	1	4	9	16	25	36	49	...	
Diferencias de términos sucesivos	1	3	5	7	9	11	13	...	$2k-1$

n	1	2	3	4	5	6	7	...	k
Pentagonales	1	5	12	22	35	51	70	...	
Diferencias de términos sucesivos	1	4	7	10	13	16	19	...	$3k-2$

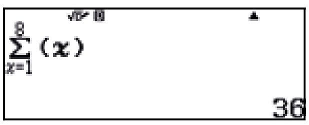
n	1	2	3	4	5	6	7	...	k
Octogonales	1	8	21	40	65	96	133	...	
Diferencias de términos sucesivos	1	7	13	19	25	31	37	...	$6k-5$

Los términos generales de las sucesiones de diferencias para los números hexagonales, heptagonales y octogonales son $4k-3$, $5k-4$ y $6k-5$, respectivamente.

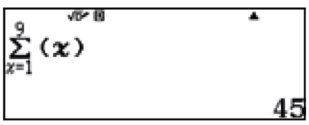
3

Para calcular los octavo, noveno y décimo números triangulares se hace uso de la tecla (Σ).

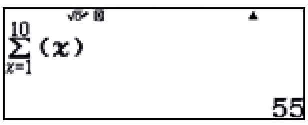
SHIFT x x ▶ 1 ▶ 8 =



◀ ◀ DEL 9 =



◀ ◀ DEL 1 0 =



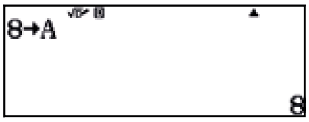
Los valores de n en el sumatorio se han modificado manualmente haciendo uso de los cursores.

OBSERVACIÓN

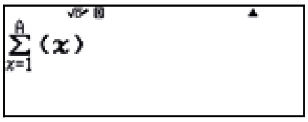
Se puede también hacer uso de las teclas [STO], ([Σ▬]) y la combinación [ALPHA] [∫▭] (que proporciona dos puntos ":").

Este método es algo más engorroso para series cortas, pero mucho más rápido cuando hay que generar un número elevado de términos.

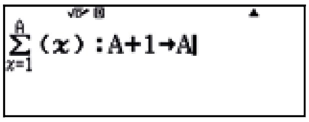
[8] [STO] [(–)]



[SHIFT] [x] [▶] [1] [▶] [ALPHA] [(–)] [▶]

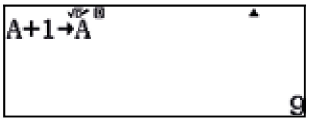


[ALPHA] [∫▭] [ALPHA] [(–)] [+] [1] [STO] [(–)]

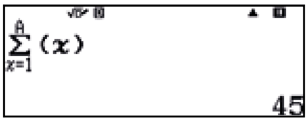


Lo que se hace es asignar el primer valor de n a la variable A y a continuación se escribe la fórmula, utilizando los dos puntos ":" para ejecutar dos cálculos en una misma línea. Seguidamente, se asigna a A el valor $A + 1$. La calculadora realiza de forma automática el primer cálculo para el valor original de A.

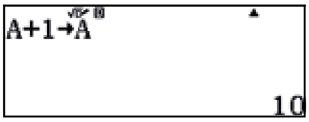
[=]



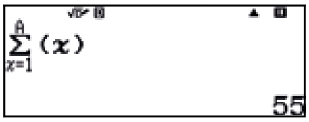
[=]



[=]

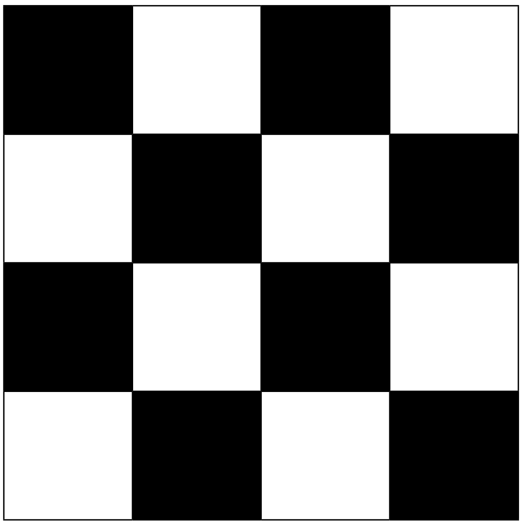


Al presionar a la tecla [=], se realiza la asignación de un nuevo valor a la variable A, después se calcula nuevamente la suma para el nuevo valor de A, y así sucesivamente.



Ampliación

1 Considera el tablero 4 x 4 de la figura:



a) ¿Cuántos cuadrados se pueden formar en el tablero? (cada uno de los cuadrados formados tiene que contener cuadrados completos blancos o negros).

b) Si se dispusiera de un tablero 8 x 8, ¿cuántos cuadrados se podrían formar?

c) Si se dispusiera de un tablero n x n, ¿cuántos cuadrados se podrían formar?