08 | Regularidades numéricas
Números poligonales y números piramidales

Una sucesión $\{a_n\}n\in\mathbb{N}$ es **polinomial de grado n** cuando el término general de dicha sucesión es un polinomio de grado n.

- Las progresiones aritméticas son sucesiones polinomiales de grado 1.

- La sucesión de término general $a_n = n^2 + 1$ es polinomial de grado 2.

Una sucesión $\{a_n\}n\in\mathbb{N}$ es una **progresión aritmética** de orden k si la sucesión que se obtiene al realizar k veces las diferencias sucesivas de sus términos es constante.

Analicemos, por ejemplo, el caso de la sucesión $a_n = n^2 + 1$.

$a_n = n^2 + 1$	2		5		10		17		26
Primera diferencia sucesiva		3		5		7		9	
Segunda diferencia sucesiva			2		2		2		

Como se observa, la segunda diferencia sucesiva es constante, por lo que se trata de una progresión aritmética de orden 2.

Las sucesiones polinomiales de grado n son progresiones aritméticas de grado n.

1 Comprueba que la sucesión de números triangulares T_n = {1, 3, 6, 10, 15, ...} es una progresión aritmética de orden superior y encuentra su expresión polinomial.

2 Utilizando la técnica anterior, halla el término general de los números cuadrados, pentagonales, hexagonales, heptagonales y octogonales.

3 Fíjate ahora solamente en los coeficientes líderes de los polinomios que has obtenido. ¿Existe alguna relación entre ellos? Responde a esta cuestión analizando el resto de coeficientes.

4 Ensaya una fórmula para los números decagonales.

5 Vamos a pensar ahora en 3D. Los números piramidales se obtienen si formamos pirámides con los correspondientes números poligonales, de forma que una pirámide de cuatro alturas y base triangular es la reconstrucción del número 20 = 1 + 3 + 6 + 10, o lo que es lo mismo, la suma de los cuatro primeros números triangulares. Comprueba que la sucesión de los números piramidales triangulares es una sucesión aritmética de orden tres y obtén su término general. Haz lo mismo con la sucesión de números piramidales cuadrados.

CASIO División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

08 | Regularidades numéricas
Números poligonales y números piramidales

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
1º de Bachillerato

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- Aunque a priori pueda parecer que los sistemas de ecuaciones que se derivan de esta actividad son de tediosa resolución, incluso cuando se usa la calculadora, hay que resaltar el hecho de que los distintos sistemas solo se diferencian entre sí por los términos independientes, por lo que su resolución es solo cuestión de segundos.
- Para resolver los sistemas de ecuaciones que aparecen en la actividad se hará uso del modo *Ecuación/Función*.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

En primer lugar, hay que comprobar que la sucesión de los números triangulares es una progresión aritmética de orden superior.

Números triangulares	1		3		6		10		15
Primera diferencia sucesiva		2		3		4		5	
Segunda diferencia sucesiva			1		1		1		

La segunda diferencia sucesiva es constante, por lo que se trata de una progresión aritmética de orden 2. El término general de dicha sucesión es de la forma: $T_n = an^2 + bn + c$. Para determinar los coeficientes basta con resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

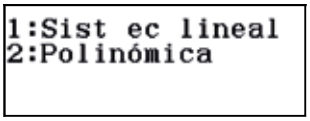
$$\left.\begin{array}{l} T_1 \longrightarrow 1 = a + b + c \\ T_2 \longrightarrow 3 = 4a + 2b + c \\ T_3 \longrightarrow 6 = 9a + 3b + c \end{array}\right\}$$

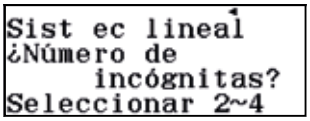
Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Si en lugar de utilizar las incógnitas a, b y c se usan las incógnitas x, y y z, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = x + y + z \\ 3 = 4x + 2y + z \\ 6 = 9x + 3y + z \end{array}\right\}$$

Para resolver el sistema se accede al menú *Ecuación/Función*, se selecciona la opción *Sistema de ecuaciones* lineales y se indica el número de incógnitas:

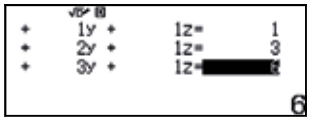
MENU (−) 1 3



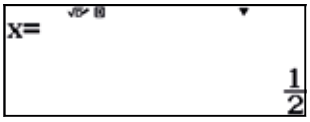


Seguidamente se introduce el sistema y se resuelve:

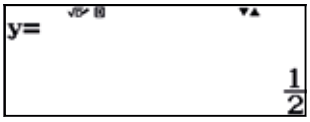
=



=



=



=

En consecuencia, el término general de la sucesión de números triangulares resulta:

$$T_{3,n} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

08 | Regularidades numéricas
Números poligonales y números piramidales

2

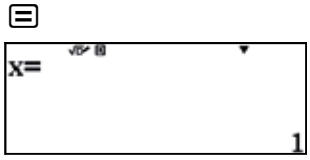
Para resolver esta actividad se puede recurrir a las tablas que se obtuvieron en la actividad 05 Números poligonales.

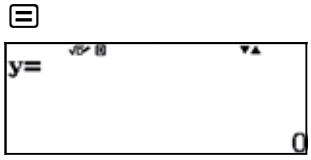
			n			
			1	2	3	4
Lados del polígono (p)	3	Triangulares	1	3	6	10
	4	Cuadrados	1	4	9	16
	5	Pentagonales	1	5	12	22
	6	Hexagonales	1	6	15	28
	7	Heptagonales	1	7	18	34
	8	Octogonales	1	8	21	40

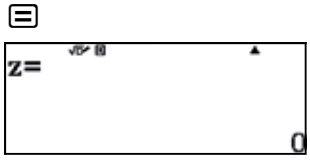
Se plantea, en cada caso, el sistema de ecuaciones y se resuelve de forma análoga a la actividad 1.

Cuadrados:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 4x+2y+z=4 \\ 9x+3y+z=9 \end{array}\right\}$$

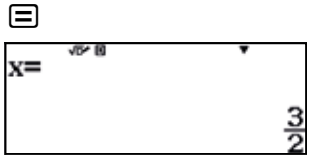


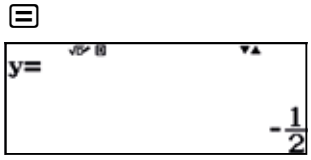


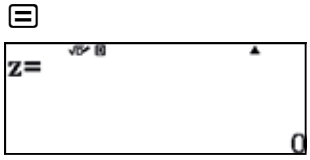


Pentagonales:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 4x+2y+z=5 \\ 9x+3y+z=12 \end{array}\right\}$$

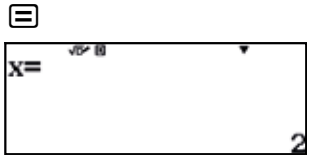


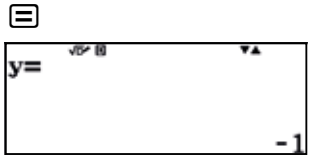


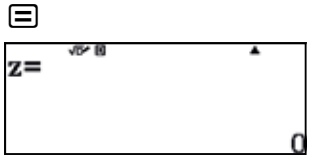


Hexagonales:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 4x+2y+z=6 \\ 9x+3y+z=15 \end{array}\right\}$$

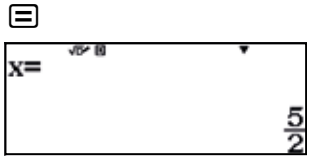


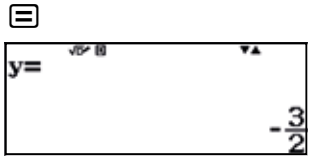


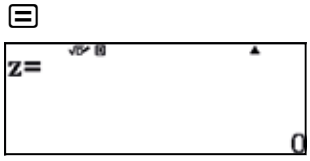


Heptagonales:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 4x+2y+z=7 \\ 9x+3y+z=18 \end{array}\right\}$$

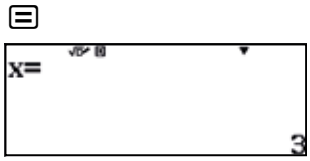


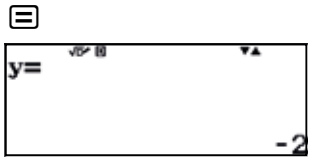


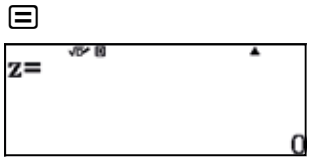


Octogonales:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 4x+2y+z=8 \\ 9x+3y+z=21 \end{array}\right\}$$







3

Los coeficientes de los términos generales son:

	Triangular	Cuadrado	Pentagonal	Hexagonal	Heptagonal	Octogonal	...	p
Coeficiente de n^2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3		$\frac{p-2}{2}$

	Triangular	Cuadrado	Pentagonal	Hexagonal	Heptagonal	Octogonal	...	p
Coeficiente de n	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2		$-\frac{p-4}{2}$

CASIO División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

4

El alumnado no debe tener ninguna dificultad en encontrar el término general de la sucesión de números decagonales, es más, llegado el caso y dependiendo de cómo se haya desarrollado la unidad, se puede ensayar una fórmula para el término general de la sucesión de números *p*-agonales.

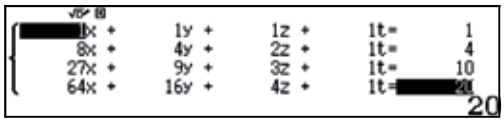
$$T_{p,n} = \frac{p-2}{2} \cdot n^2 - \frac{p-4}{2} \cdot n$$

Que para el caso de $p = 10$ quedaría de la siguiente forma:

$$T_{10,n} = 4n^2 - 3n$$

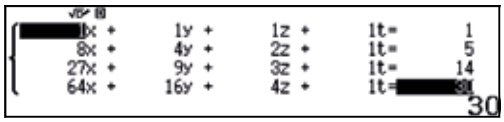
5

Para el caso de los números piramidales triangulares, una vez comprobado que se trata de una sucesión aritmética de orden tres, el sistema a resolver es:



, quedando como término general $P_{3,n} = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{13}$

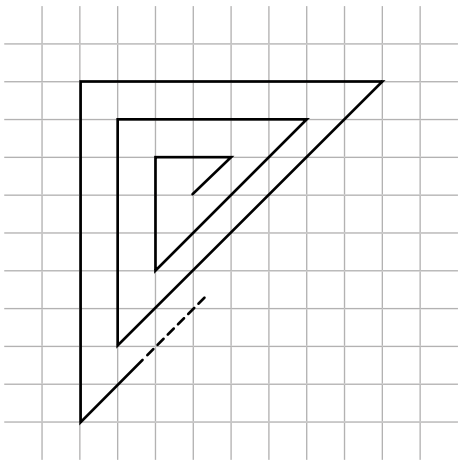
Para el caso de los números piramidales cuadrangulares se obtiene:



, quedando, en este caso, $P_{4,n} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$

Ampliación

1 En un papel cuadriculado se ha dibujado la siguiente cenefa de 999 segmentos.
(Cada cuadrícula mide 5 mm de lado)



a) Calcula la longitud de la línea poligonal.

b) Calcula la longitud de la línea poligonal con una aproximación a metros.