

11 | Regularidades numéricas

Números metálicos

Los números metálicos son el conjunto de números que tienen, entre una serie de características comunes, la propiedad de que llevan el nombre de un metal. El más conocido de la familia es el número de oro (número áureo), que ha sido utilizado como base de proporciones para componer música y diseñar esculturas, pinturas y edificios.

- 1 Considera la sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... dada por la ley de recurrencia $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ y calcula los cocientes $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.
- 2 Generaliza el resultado anterior, tomando como valores de a_1 y a_2 los números que consideres oportuno y calculando 25 o 30 términos (utiliza la ley de recurrencia $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$). Comenta los resultados que obtengas.
- 3 Considerada la sucesión dada por la ley de recurrencia $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$, donde $a_1 = 3$ y $a_2 = 7$, y calcula los treinta primeros términos. A continuación, considera la sucesión de los cocientes $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ y comprueba que converge al número de cobre $\sigma_{Cu} \cong 2$.
- 4 Estudia la sucesión de cocientes $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Parte de los valores $a_1 = 4$ y $a_2 = 9$ y utiliza la ley de recurrencia $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$. Comprueba que se obtiene el número de plata.
- 5 Elige distintos valores de b_1 y b_2 para la ley de recurrencia $b_{n+1} = 3b_n + b_{n-1}$ y comprueba que la sucesión de cocientes $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ tiende al número de bronce.
- 6 Utiliza la ley de recurrencia $b_{n+1} = b_n + 3b_{n-1}$ a partir de dos generadores arbitrarios y comprueba que la sucesión de cocientes genera un nuevo número metálico.
- 7 A partir de los valores $a_1 = 5$ y $a_2 = 1$ y la ley de recurrencia $a_{n+1} = 2a_n + 2a_{n-1}$, comprueba que la sucesión de cocientes genera el número de platino.
- 8 Generaliza los resultados obtenidos en las actividades anteriores. Comprueba que se obtienen los mismos resultados, independientemente de los elementos generadores y del número de términos de la sucesión y observa que el número obtenido depende únicamente de la ley de recurrencia.
- 9 Resuelve distintas ecuaciones cuadráticas del tipo $x^2 - px - q = 0$ para diversos valores de p y q , siendo p y q números naturales. Comprueba que las soluciones de la ecuación son números irracionales y define la sucesión numérica que los genera.
- 10 Observa que los números de bronce y de níquel tienen la misma parte decimal. Comprueba si se puede generalizar la condición que has considerado, resolviendo distintas ecuaciones.

11 Regularidades numéricas

Números metálicos



MATERIALES

Calculadora CASIO fx 570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

3º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- El objetivo de esta actividad es que el alumno obtenga y manipule expresiones simbólicas que describen sucesiones numéricas.
- Se pretende que el alumno calcule términos de sucesiones usando una ley de formación a partir de datos anteriores y que observe regularidades que incluyen patrones recursivos.
- Se pretende que el alumno aprenda a utilizar la hoja de cálculo y que conozca distintos números irracionales que se generan mediante sucesiones particulares.

- En general, se observa que, con independencia de los números generadores de la serie, los resultados que se obtienen con distintas relaciones de recurrencia de la forma $a_{n+1} = p \cdot a_n + q \cdot a_{n-1}$, según algunos valores de p y q , son los números metálicos:

Nombre	p	q	Valor
Oro	1	1	$\Phi = \sigma_{Au} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398874988$
Plata	2	1	$\sigma_{Ag} = 1 + \sqrt{2} \approx 2,414213562$
Bronce	3	1	$\sigma_{Br} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \approx 3,302775638$
Cobre	1	2	$\sigma_{Cu} \approx 2$
Níquel	1	3	$\sigma_{Ni} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \approx 2,302775638$
Platino	2	2	$\sigma_{Pt} = 1 + \sqrt{3} \approx 2,732050808$

- Los miembros de la familia de números metálicos son, también, las soluciones positivas de ecuaciones cuadráticas del tipo $x^2 - px - q = 0$, siendo p y q números naturales.
- En esta actividad se hará uso de la *Hoja de cálculo* que incorpora la calculadora y de las opciones del menú *Ecuación/Función* que permiten resolver ecuaciones y sistemas.

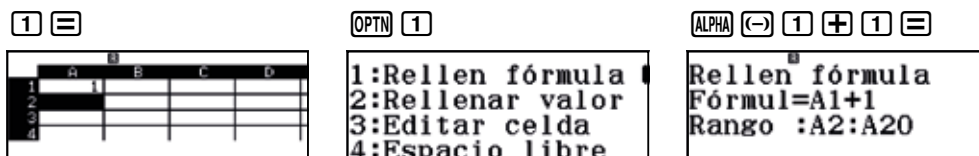
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

En primer lugar, se entra en el menú *Hoja de cálculo*:



Seguidamente se introduce el valor 1 en la celda A1 y se introduce en la celda A2 la fórmula A1+1, que se extiende en el rango A1:A20:



11 Regularidades numéricas

Números metálicos

Se completa, así, la columna A1:

A	B	C	D
1			
2	1		
3	2		
4	3		

=A3+1

A	B	C	D
5	5		
6	6		
7	7		
8	8		

=A7+1

A	B	C	D
9	9		
10	10		
11	11		
12	12		

=A11+1

A	B	C	D
13	13		
14	14		
15	15		
16	16		

=A15+1

A continuación se introduce un 1 en la celda B1 y otro 1 en la celda B2:

1

A	B	C	D
1	1		
2	1		
3			
4			

1

A	B	C	D
1	1	1	
2	2	1	
3	3		
4	4		

Seguidamente se introduce en la celda B3 la fórmula B1 + B2 y se extiende al rango B3:B20:

OPTN 1

1:Rellen fórmula
2:Rellenar valor
3:Editar celda
4:Espacio libre

ALPHA 1 + ALPHA 2

Rellen fórmula
Fórmula=B1+B2
Rango :B3:B20

A	B	C	D
1	1	1	
2	2	1	
3	3	2	
4	4	3	

=B1+B2

A	B	C	D
5	5	5	
6	6	8	
7	7	13	
8	8	21	

=B6+B7

A	B	C	D
9	9	34	
10	10	55	
11	11	89	
12	12	144	

=B10+B11

A	B	C	D
13	13	233	
14	14	377	
15	15	610	
16	16	987	

=B14+B15

A	B	C	D
17	17	1597	
18	18	2584	
19	19	4181	
20	20	6765	

=B18+B19

Para estudiar la sucesión de los cocientes $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ se introduce en la celda C1 la expresión B2:B1 y se extiende al rango C1:C20:

OPTN 1

1:Rellen fórmula
2:Rellenar valor
3:Editar celda
4:Espacio libre

ALPHA 2 ÷ ALPHA 1

Rellen fórmula
Fórmula=B2÷B1
Rango :C1:C20

A	B	C	D
1	1	1	
2	2	1	
3	3	2	
4	4	3	

=B2÷B1

A	B	C	D
5	5	5	1.6
6	6	8	1.625
7	7	13	1.6153
8	8	21	1.618

=B9÷B8

A	B	C	D
9	9	34	1.6176
10	10	55	1.6181
11	11	89	1.6179
12	12	144	1.618

=B13÷B12

A	B	C	D
13	13	233	1.618
14	14	377	1.618
15	15	610	1.618
16	16	987	1.618

=B17÷B16

A	B	C	D
17	17	1597	1.618
18	18	2584	1.618
19	19	4181	1.618
20	20	6765	1.618

=B21÷B20

Se observa que el cociente toma el valor del número de oro:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398874988$$

2

Respuesta abierta.

3

En este caso se introduce 3 en la celda B1 y 7 en la celda B2. Seguidamente se introduce en la celda B3 la expresión B2 + 2B1:

ALPHA 2 + 2 ALPHA 1

Rellen fórmula
Fórmula=B2+2B1
Rango :B3:B30

A	B	C	D
1	3		
2	7		
3	13		
4	27		

A continuación, se considera la sucesión de los cocientes $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ y se comprueba que converge al número $\sigma_{Cu} \approx 2$.

A	B	C	D
1	3	2.3333	
2	7	1.8571	
3	13	2.0769	
4	27	1.9629	

=B2÷B1

A	B	C	D
5	53	2.0188	
6	107	1.9905	
7	213	2.0046	
8	427	1.9976	

=B9÷B8

A	B	C	D
9	853	2.0011	
10	1707	1.9994	
11	3413	2.0002	
12	6827	1.9998	

=B13÷B12

A	B	C	D
13	13553	2	
14	27107	1.9999	
15	54213	2	
16	108427	1.9999	

=B17÷B16

Como se observa, la sucesión tiende al número de cobre.

11 Regularidades numéricas

Números metálicos

4

En este caso se obtiene:

	A	B	C	D
1	1	4	2,25	
2	2	9	2,4444	
3	3	22	2,409	
4	4	53	2,415	

=2B2+B1

	A	B	C	D
5	5	128	2,414	
6	6	309	2,4142	
7	7	745	2,4142	
8	8	1801	2,4142	

=2B7+B6

	A	B	C	D
9	9	4348	2,4142	
10	10	10497	2,4142	
11	11	25342	2,4142	
12	12	61181	2,4142	

=2B11+B10

	A	B	C	D
14	14	355589	2,4142	
15	15	880882	2,4142	
16	16	2...*	2,4142	
17	17	5...*	2,4142	

=2B15+B14

Como se observa, la sucesión de los cocientes tiende al número de plata.

5

En este caso se obtiene:

	A	B	C	D
1	1	4	2,25	
2	2	9	3,4444	
3	3	31	3,2903	
4	4	102	3,3039	

=B2÷B1

	A	B	C	D
5	5	337	3,3026	
6	6	1113	3,3027	
7	7	3676	3,3027	
8	8	12141	3,3027	

=B9÷B8

	A	B	C	D
9	9	40099	3,3027	
10	10	132438	3,3027	
11	11	437413	3,3027	
12	12	1.4...*	3,3027	

=B13÷B12

	A	B	C	D
13	13	4.7...*	3,3027	
14	14	1.5...*	3,3027	
15	15	5.2...*	3,3027	
16	16	1.7...*	3,3027	

=B17÷B16

Como se observa, la sucesión de los cocientes tiende al número de bronce.

6

Respuesta abierta.

7

En este caso se obtiene:

	A	B	C	D
1	1	5	0,2	
2	2	1	1,2	
3	3	12	2,1666	
4	4	26	2,923	

=2B2+2B1

	A	B	C	D
5	5	76	2,6842	
6	6	204	2,745	
7	7	560	2,7285	
8	8	1528	2,7329	

=2B7+2B6

	A	B	C	D
9	9	4176	2,7318	
10	10	11408	2,7321	
11	11	31168	2,732	
12	12	85132	2,732	

=2B11+2B10

	A	B	C	D
13	13	232640	2,732	
14	14	634384	2,732	
15	15	1.7...*	2,732	
16	16	4.7...*	2,732	

=2B15+2B14

Como se observa, la sucesión de los cocientes tiende al número de platino.

8

Respuesta abierta.

9

Respuesta abierta.

10

Respuesta abierta.