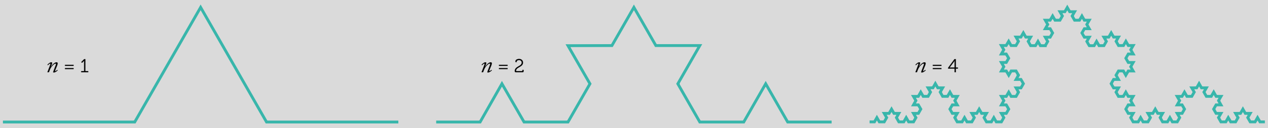
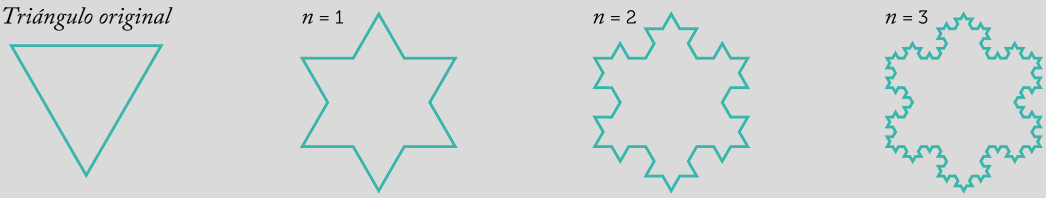
10 Fractales: la curva de Koch
Fractales en copos de nieve

En 1904 el matemático sueco Helge von Koch dividió un segmento en tres partes iguales, eliminó el segmento central y construyó un triángulo equilátero cuya base era el segmento eliminado.

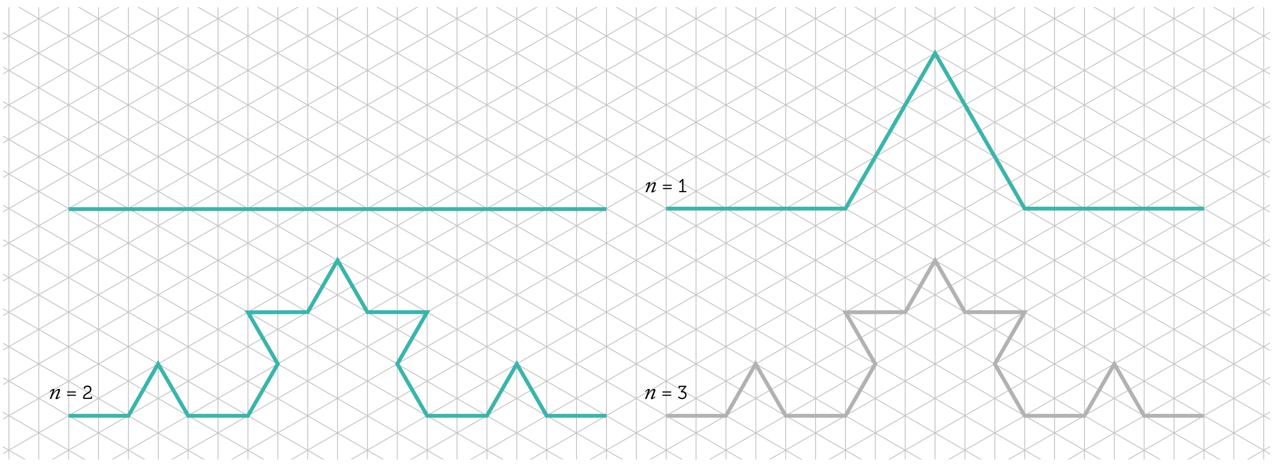
Repitió el proceso anterior de forma indefinida y obtuvo una curva poligonal conocida como *curva de Koch*.



La aplicación de este proceso reiterativo sobre los lados de un triángulo equilátero da lugar al conocido como *copo de nieve de Koch*.



1 Dibuja sobre la plantilla la tercera iteración.



2 Completa la siguiente tabla, partiendo de un segmento de 1 unidad de longitud:

Iteración	1	2	3	4	5	6	...	k	...
Nº de segmentos	4						...		...
Longitud de segmentos	$\frac{1}{3}$						...		...
Suma de todos los segmentos	$\frac{4}{3}$						...		...

a) Halla la ley de recurrencia que permite conocer el número de segmentos que se obtienen en la k-ésima iteración.

b) ¿Puedes obtener una ley que permita conocer la longitud de los segmentos? ¿Y la suma de todos los segmentos en la k-ésima iteración? ¿Y el número de triángulos que se añaden en cada iteración?

c) Las fórmulas que has obtenido en el apartado anterior, ¿se parecen a algún modelo que hayas estudiado en clase?

10 | Fractales: la curva de Koch
Fractales en copos de nieve

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
3º de ESO

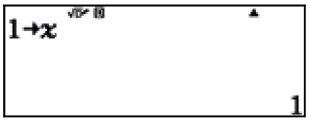
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- Con esta actividad se pretende que el alumno estudie de forma manipulativa (dibujando) el comportamiento de regularidades sencillas y que sea capaz de caracterizar algebraicamente estas regularidades.
- Es conveniente que el alumnado haya trabajado anteriormente en el aula con regularidades y expresiones simbólicas que describen sucesiones numéricas sencillas.
- La tabla se puede rellenar por filas, utilizando la tecla [Ans], o por columnas, escribiendo las expresiones que se quieren evaluar, separadas por dos puntos, y asignado un valor inicial a la variable.
- Para saber cómo se utiliza la tecla [Ans], a la hora de rellenar la tabla, se puede consultar la ficha 09 ¿Sabes qué son los fractales?

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

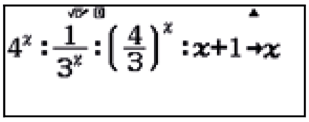
2

Para rellenar la tabla, se asigna el valor 1 a la variable x, seguidamente, se escriben las expresiones que se desean evaluar, separadas por el signo de los dos puntos, y, a continuación, se asigna a la variable x el valor $x + 1$.

[1] [STO] [)]

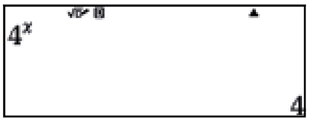


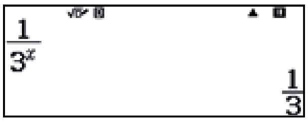
[4] [x■] [x] [▶] [ALPHA] [∟] [1] [▭/▭] [3] [x■] [x] [▶] [▶] [ALPHA] [∟] [(] [▭/▭] [3] [▼] [4] [▶] [)] [x■] [x] [▶] [ALPHA] [∟] [x] [+] [1] [STO] [)]

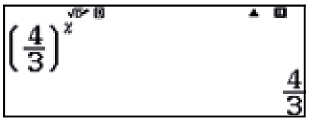


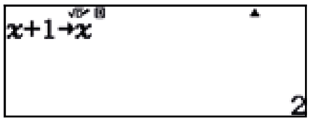
De esta forma, cada vez que se pulse [=], se obtendrá el valor numérico de las expresiones y se incrementará en una unidad el valor de la variable que corresponde al número de la iteración:

[=] [=] [=] [=]









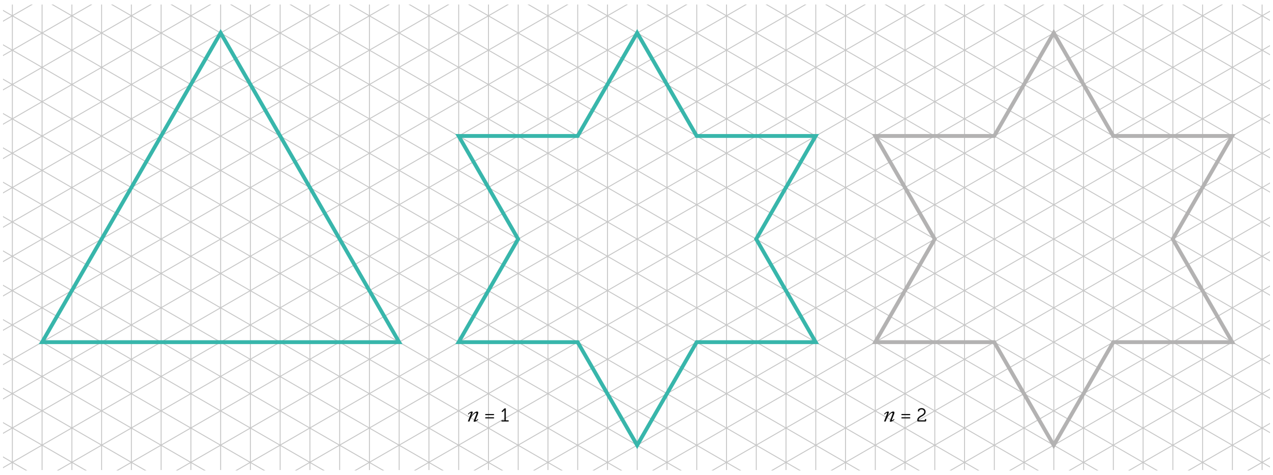
Pulsando [=] de manera reiterada, se irá rellenando la tabla, columna a columna, para cada iteración.

Iteración	1	2	3	4	5	6	...	k	...
Nº de segmentos	4	16	64	256	1024	4906	...	4^k	...
Longitud de segmentos	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{729}$	...	$\frac{1}{3^k}$	...
Suma de todos los segmentos	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{64}{27}$	$\frac{256}{81}$	$\frac{1024}{243}$	$\frac{4906}{729}$	...	$\left(\frac{4}{3}\right)^k$	...

Fractales en copos de nieve

Ampliación

1 Dibuja la segunda iteración partiendo de un triángulo equilátero:



2 Completa la tabla siguiente partiendo de un triángulo equilátero de 1 unidad de lado:

Iteración	0	1	2	3	4	5	...	k	...
Nº de lados	3						...		...
Longitud de cada lado	1						...		...
Perimetro de la figura	3						...		...
Nº de nuevos triángulos	1						...		...

a) ¿Puedes calcular una ley de recurrencia que te permita conocer el número de lados que se obtienen en la k-ésima iteración? ¿Y para conocer la longitud de cada lado? ¿Y para calcular el perímetro?

b) ¿Las fórmulas que has obtenido en el apartado anterior, ¿se parecen a algún modelo que hayas estudiado en clase?

c) Cómo se comporta el perímetro a medida que va aumentando el número de iteraciones?

3 Calcula el área de las figuras obtenidas en las iteraciones 0 y 1. ¿Crees que el área se comportará de la misma forma que el perímetro a medida que va aumentando el número de iteraciones? Justifica tu respuesta.