

16 | Operaciones

Descomposición de fracciones continuas

Una fracción continua es una expresión del tipo:

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{\dots}}}$$

Donde a, b, c, \dots son números enteros positivos denominados cocientes.

Cualquier número racional, es decir, cualquier número que pueda representarse mediante una fracción $\frac{p}{q}$, puede expresarse en forma de **fracción continua finita**.

En cuanto a los números irracionales, pueden expresarse en forma de **fracción continua infinita**.

En el caso particular de los números irracionales cuadráticos, es decir, aquellos que pueden expresarse de la forma $a + \sqrt{b}$, los cocientes de las fracciones continuas correspondientes se repiten periódicamente. Por ejemplo, el número irracional $\sqrt{2}$ puede expresarse en forma de fracción continua infinita como:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}$$

En este caso, los cocientes de la fracción continua (1;2,2,2,2,...) se repiten periódicamente y se representan como $(1;\bar{2})$.

1 Escribe en forma de fracción continua la fracción $\frac{37}{13}$.

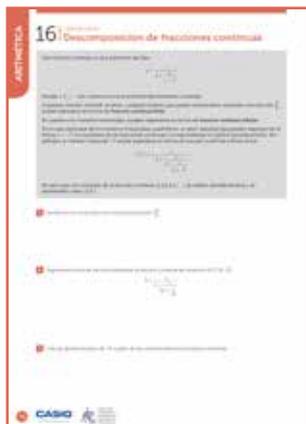
2 Expresa en forma de fracción irreducible la fracción continua de cocientes (6; 3, 12, 17):

$$6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{12 + \frac{1}{17}}}$$

3 Calcula aproximaciones de $\sqrt{2}$ a partir de las correspondientes fracciones continuas.

16 Operaciones

Descomposición de fracciones continuas



MATERIALES

Calculadoras CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

3º de ESO

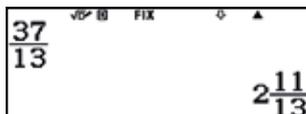
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

- Con estas actividades se pretende que el alumno repase y consolide las operaciones con números racionales.
- Conviene estudiar las aproximaciones de números irracionales antes de realizar las actividades que se plantean.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

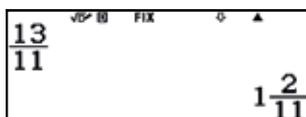
1

En primer lugar, se escribe la fracción impropia $\frac{37}{13}$ como número mixto:



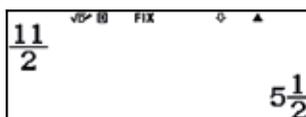
De manera que, $\frac{37}{13} = 2 + \frac{11}{13} = 2 + \frac{1}{\frac{13}{11}}$.

Seguidamente, se escribe la fracción impropia $\frac{13}{11}$ como número mixto:



En consecuencia, $\frac{37}{13} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{11}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{11}{2}}}$.

Finalmente, se escribe la fracción impropia $\frac{11}{2}$ como número mixto:

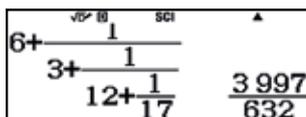


En consecuencia, $\frac{37}{13} = 2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}$.

Los cocientes de la fracción continua son (2; 1, 5, 2).

2

Se introduce en la calculadora la fracción continua y se presiona



En consecuencia, finalmente se tiene que:

$$6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{12 + \frac{1}{17}}} = \frac{3997}{632}$$

Como se puede observar, la fracción continua de un número racional es finita.

16 | Operaciones

Descomposición de fracciones continuas

3

Algunas aproximaciones de $\sqrt{2}$ son:

$$1 + \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} \quad 1.5$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} \quad \frac{7}{5}$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} \quad 1.4$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} \quad \frac{17}{12}$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} \quad 1.41\bar{6}$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} \quad \frac{41}{29}$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} \quad 1.41379310344827\bar{}$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}} \quad \frac{99}{70}$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}} \quad 1.4142857\bar{}$$

Se puede comprobar que los cocientes de las fracciones continuas infinitas correspondientes a números irracionales cuadráticos son periódicos.

- $\sqrt{3}$ → cocientes $(1; \overline{1, 2})$
- $\sqrt{11}$ → cocientes $(3; \overline{3, 6})$
- $\sqrt{19}$ → cocientes $(4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8})$
- $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$ → cocientes $(1; \overline{1})$