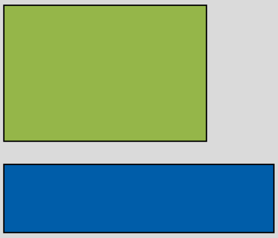
10 | Función lineal, función afín y función cuadrática
Rectángulos isoperimétricos



Se llaman rectángulos isoperimétricos a los rectángulos que tienen el mismo perímetro.

Si el perímetro es P, ¿cómo puedes averiguar la longitud de la base b, en función de la altura a?

¿Cuál es la fórmula que proporciona el área, A, de los rectángulos isoperimétricos en función de la altura?

1 Antes de contestar a las preguntas analiza algunos casos particulares.

Completa la siguiente tabla con algunos valores:

Perímetro (cm)	Longitud de la altura (cm)	Longitud de la base (cm)	Área (cm²)
40			
40			
40			
40			
40			
40	a	$b =$	$A =$

2 Elige otro valor para el perímetro y vuelve a completar una tabla como la anterior.

3 Representa gráficamente la función de la longitud de la base para cada uno de los casos particulares que has analizado.

¿Qué tipo de funciones son?

¿Qué propiedades tienen en común ambas gráficas? ¿Para qué valores de x tiene sentido dibujar la gráfica en cada caso?

4 Representa gráficamente la función $f(x) = x$. ¿Qué transformaciones algebraicas hay que realizar para pasar de la función $f(x) = x$, a cada una de las gráficas obtenidas en el **apartado 3**?

5 De todos los rectángulos isoperimétricos de perímetro P, ¿cuál es el que tiene área máxima?

Representa gráficamente la función del área para cada uno de los dos casos particulares que has analizado.

¿Qué propiedades tienen en común ambas gráficas?

6 Representa gráficamente la función $f(x) = x^2$. ¿Qué transformaciones algebraicas hay que realizar para pasar de la función $f(x) = x^2$, a cada una de las gráficas obtenidas en el **apartado 5**?

10 | Función lineal, función afín y función cuadrática
Rectángulos isoperimétricos

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- Con esta actividad se pretende que los estudiantes se aproximen al estudio de las familias de las funciones lineales y cuadráticas a partir del análisis de casos particulares y de su generalización en un contexto geométrico.
- Se pretende que el alumnado investigue sobre el efecto que producen en las gráficas de las funciones $f(x) = a \cdot f\left(\frac{x-c}{b}\right) + d$ los cambios en los parámetros c y d, y las dilataciones verticales de factor $a = -1$.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Respuesta abierta.

Perímetro (cm)	Longitud de la altura (cm)	Longitud de la base (cm)	Área (cm²)
40	1	19	19
40	5	15	75
40	10	10	100
40	15	5	75
40	19	1	19
40	a	$b = 20 - a$	$A = (20 - a) \cdot a = 20a - a^2$

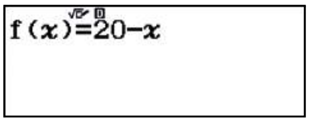
2

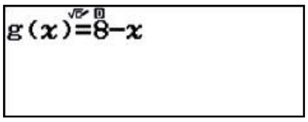
Respuesta abierta. Ejemplo: $P = 16$, $b = 8 - a$ y $A = (8 - a) \cdot a = 8a - a^2$.

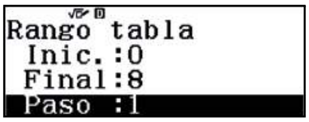
3

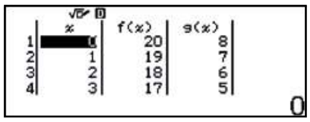
La longitud de la base se obtiene al despejar b en la expresión del perímetro de un rectángulo. Como la expresión del perímetro es $P = 2a + 2b$, $b = \frac{P}{2} - a$.

Las funciones $f(x) = 20 - x$ y $g(x) = 8 - x$ son afines. Para obtener sus gráficas se utiliza el menú *Tabla* (MENU 9) y se genera el código *QR* (SHIFT OPTN):





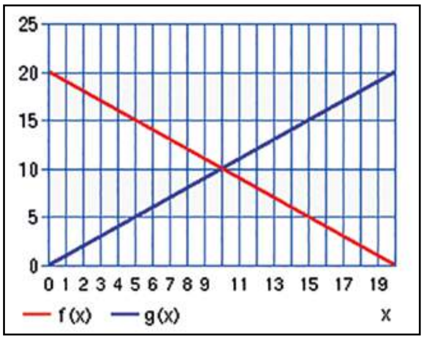


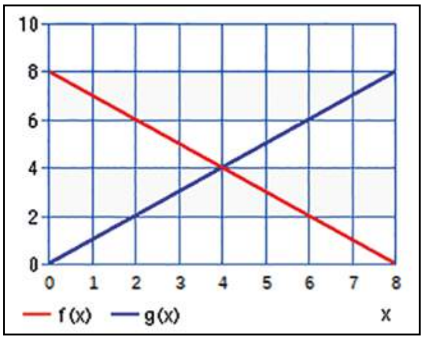


Ambas funciones tienen la misma pendiente y por tanto sus gráficas son rectas paralelas. Los valores de x para los que tiene sentido dibujar las gráficas son los que pertenecen al intervalo $\left[0, \frac{P}{2}\right]$.

4

En ambos casos se produce una dilatación vertical de factor –1. Hay una traslación vertical hacia arriba de 20 unidades para $f(x) = 20 - x$ y de 8 unidades para $g(x) = 8 - x$:



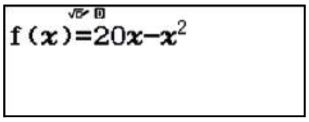


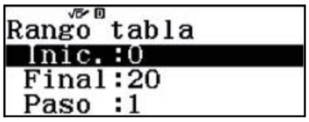
5

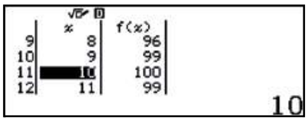
El área en los casos particulares analizados es $A = (20 - a) \cdot a = 20a - a^2$ para un rectángulo de perímetro 40 cm y $A = (8 - a) \cdot a = 8a - a^2$ si el perímetro es 16 cm. Generalizando, se obtiene que el área de un rectángulo de perímetro P es $A = \left(\frac{P}{2} - a\right) \cdot a = \frac{P}{2}\,a - a^2$. Todas las gráficas son parábolas convexas.

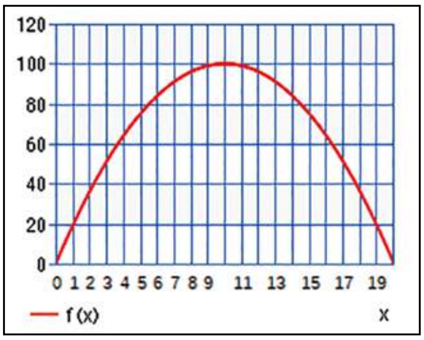
El área máxima se obtiene analizando los valores a partir de la tabla y de la gráfica o calculando el vértice de las parábolas mediante el menú *Ecuación/Función* (MENU ALPHA (–)).

Para P = 40 cm, (A = $20a - a^2$), se obtiene el área máxima con la tabla y la gráfica:

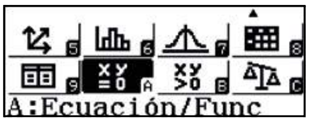


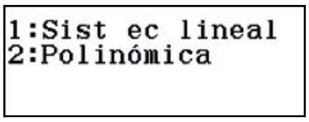


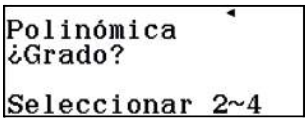


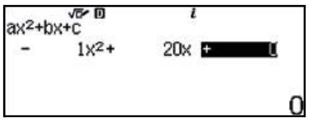


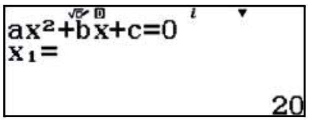
Con el menú *Ecuación/Función* además de las soluciones de la ecuación, se calcula también el vértice:

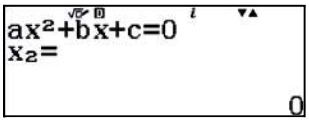


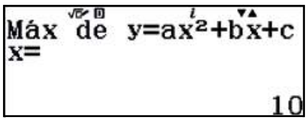


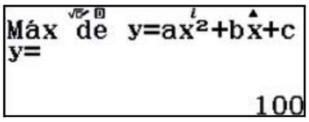






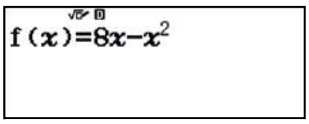


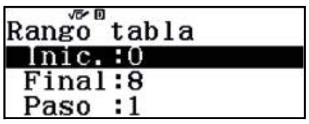


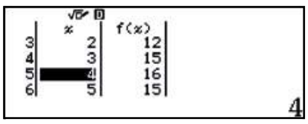


De las dos maneras, se obtiene que el área máxima se alcanza en x = 10 cm y su valor es 100 cm^2.

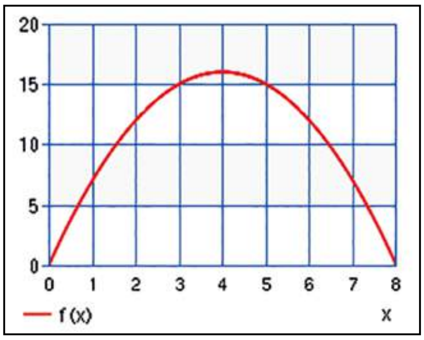
Al igual que antes, para P = 16 cm, ($A = 8a - a^2$), se utilizan los dos menús:

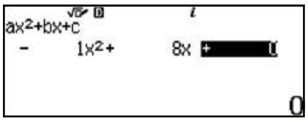


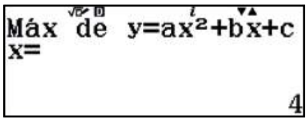


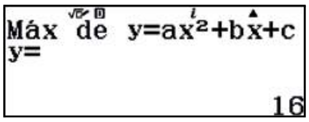


Rectángulos isoperimétricos









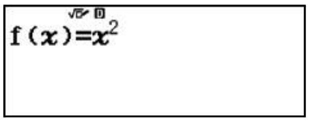
El área máxima se alcanza en $x = 4$ cm y su valor es 16 cm^2.

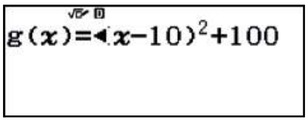
Generalizando, el área máxima se alcanza en $x = \frac{P}{4}$, es decir, cuando el rectángulo es un cuadrado y su valor es $\left(\frac{P}{4}\right)^2$. El dominio de definición es $\left(0, \frac{P}{2}\right]$.

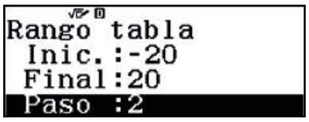
6

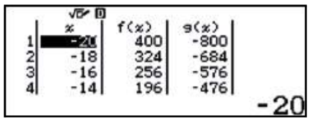
En ambos casos hay que hacer una dilatación vertical de factor –1, una traslación horizontal de $\frac{P}{4}$ unidades a la derecha y otra vertical de $\left(\frac{P}{4}\right)^2$ unidades hacia arriba.

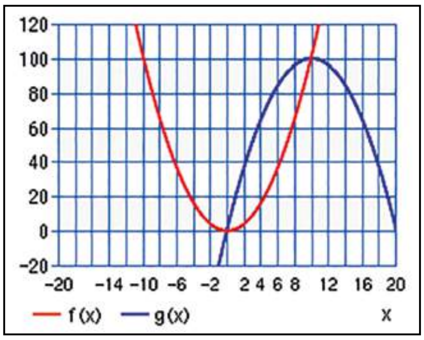
Perímetro = 40 cm. Área: $A = 20a - a^2 = -(a - 10)^2 + 100$





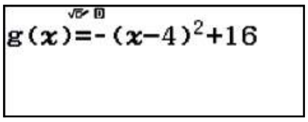


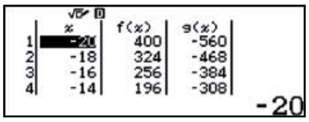


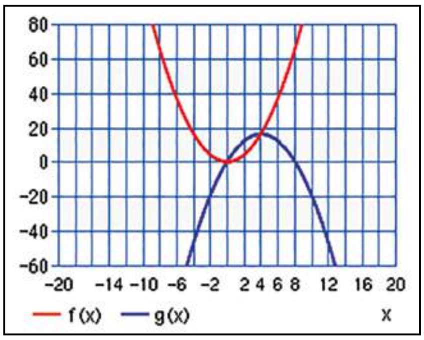


Traslación horizontal: 10 unidades a la derecha. Traslación vertical: 100 unidades hacia arriba.

Perímetro = 16 cm. Área: $A = 8a - a^2 = -(a - 4)^2 + 16$







Traslación horizontal: 4 unidades a la derecha. Traslación vertical: 16 unidades hacia arriba.