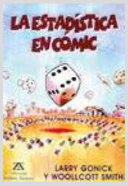
10 | Cálculo de probabilidades. Probabilidad condicionada

Juego justo. El origen de la probabilidad



"En la vida, nada es seguro. En todas nuestras acciones, calculamos siempre las posibilidades de un buen resultado. Tanto en el mundo de los negocios como en la medicina o el clima. Sin embargo, en la historia de la humanidad, la probabilidad, el estudio formal de las leyes del azar, se ha utilizado para una sola cosa: el juego"

Larry Gonick y Woollcott Smith, 1993

1 El juego se remonta a tiempos ancestrales, durante la Edad Media los juegos de dados se hicieron muy populares. En el Renacimiento, el Caballero De Mére propuso el siguiente enigma matemático:

¿Qué es más probable, sacar un seis en cuatro tiradas con un solo dado o sacar al menos un doble seis en 24 tiradas con dos dados?

Y tú, ¿qué crees que es más probable?

2 Repite 20 veces cada juego, lanzando los dados o simulando los lanzamientos con tu calculadora, y recoge tus datos en una tabla.

	Sale 6	No sale 6
4 tiradas Dado cúbico		

	Sale doble 6	No sale doble 6
24 tiradas Dos dados cúbicos		

Pon en común tus resultados con el resto de la clase. ¿Qué crees ahora que es más probable? Justifica tu respuesta.

3 De Mére estaba hecho un lío, por una parte, justificó que la probabilidad de obtener una tirada ganadora era la misma en ambos juegos:

$P(\textit{Sale 6}) = \frac{1}{6}$ $\quad$ $P(\textit{Sale un 6 en 4 tiradas}) = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

$P(\textit{Sale doble 6}) = \frac{1}{36}$ $\quad$ $P(\textit{Sale doble 6 en 24 tiradas}) = 24 \cdot \frac{1}{36} = \frac{2}{3}$

Por otra parte, había observado que perdía más a menudo con la segunda apuesta.

Para salir de su embrollo, De Mére acudió a Blaise Pascal y este a su vez escribió a su amigo Pierre de Fermat y en el transcurso de la correspondencia que mantuvieron, ambos desarrollaron la teoría de la probabilidad. Con esta teoría pudieron resolver el conflicto de De Mére calculando la probabilidad de cada juego y demostrando que no tenían la misma probabilidad.

¿Cuál es la probabilidad de cada juego? Justifica tu respuesta.

Juego justo. El origen de la probabilidad

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP XII Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con esta actividad se puede iniciar la probabilidad condicionada y revisar conceptos como sucesos equiprobables y sucesos independientes. El uso de árboles puede facilitar la comprensión de dichos conceptos.
- El uso de la calculadora favorece que la atención se centre en la toma de decisiones, en la formulación de conjeturas y en su validación.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Respuesta abierta.

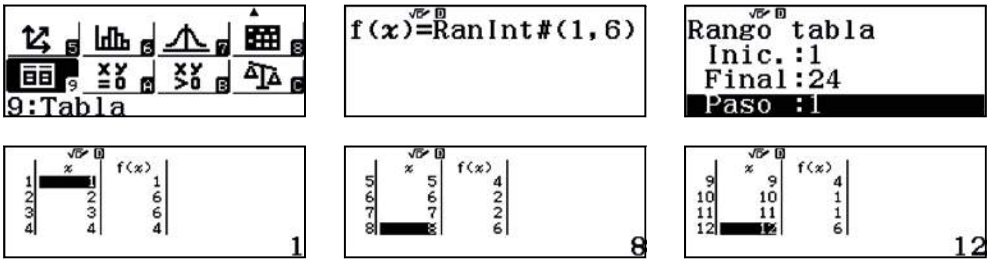
2

Respuesta abierta.

La simulación con la calculadora se puede hacer de varias maneras. En esta ocasión, se ha elegido el uso de las tablas.

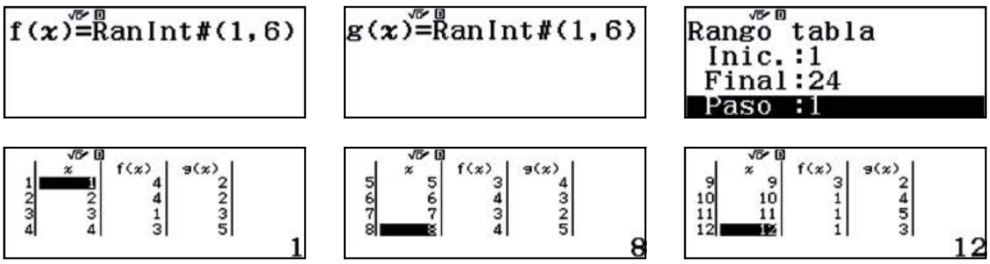
Lanzamiento de un dado cúbico:

MENU ▼ ▼ = ALPHA · 1 SHIFT) 6) = = ▼ 2 4 = = ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼



Lanzamiento de dos dados cúbicos:

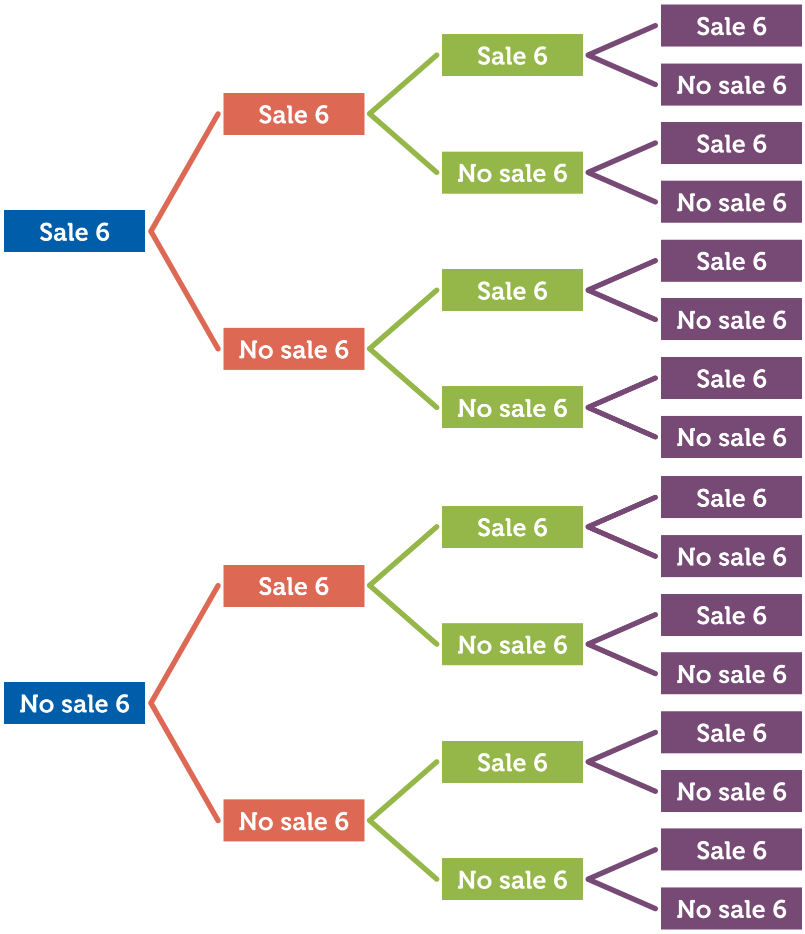
MENU ▼ ▼ = ALPHA · 1 SHIFT) 6) = ALPHA · 1 SHIFT) 6) = ▼ 2 4 = =
▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼



Juego justo. El origen de la probabilidad

3

Se puede calcular la probabilidad de ganar en el primer juego utilizando un diagrama de árbol:



En cada tirada se tiene:

$$P(\textit{Sale 6}) = \frac{1}{6}$$

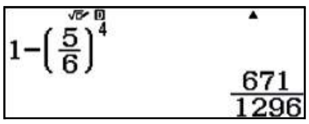
$$P(\textit{No sale 6}) = \frac{5}{6}$$

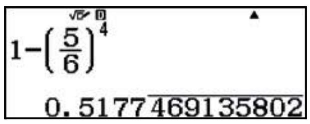
Lo más fácil es calcular la probabilidad de que no salga ningún 6 en cuatro tiradas:

$$P(\textit{No sale 6 en 4 tiradas}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Por tanto,

$$P(\textit{Sale al menos un 6 en 4 tiradas}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \approx 0{,}518$$





Razonando de la misma forma en el segundo juego, se obtiene en cada tirada:

$$P(\textit{Sale 6}) = \frac{1}{36}$$

$$P(\textit{No sale doble 6}) = \frac{35}{36}$$

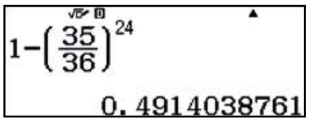
La probabilidad de que no salga ningún doble 6 en 24 tiradas:

$$P(\textit{No sale doble 6 en 24 tiradas}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

CASIO División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Por tanto,

$$P(\textit{Sale al menos un doble 6 en 24 tiradas}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}491$$



Aunque la diferencia de las probabilidades sea pequeña, es más probable que salga al menos un 6 en cuatro tiradas que un doble seis en 24. Ahora bien, para darse cuenta de la diferencia a través de la experimentación, se tienen que jugar muchas partidas y registrar los resultados. Por ello, no es descabellado pensar que De Mére era un gran jugador y, además, registraba los resultados de sus partidas.

Ampliación

Juego interrumpido.

Luisa y Antonio apuestan, respectivamente, a cara o cruz lanzando una moneda.

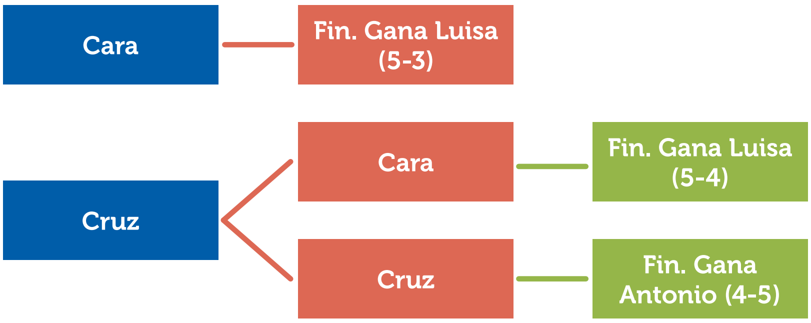
El primero que consigue cinco caras o cinco cruces gana la partida.

El juego se interrumpe cuando Luisa tiene 4 caras y Antonio 3 cruces.

Si cada uno ha apostado 5 €, ¿cómo deben repartir la cantidad apostada para que el juego sea justo?

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

En un diagrama de árbol se analizan las diferentes opciones de ganar si no se hubiera interrumpido el juego:



$$P(\textit{Gana Luisa}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$P(\textit{Gana Antonio}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

En consecuencia, Luisa ganaría 3 de cada 4 partidas y Antonio, 1 de cada 4. El reparto más justo es 3 a 1 a favor de Luisa.

Como la cantidad total apostada es de 10 euros, a Luisa le corresponden $\frac{3}{4}$ de 10 = 7,50 € y a Antonio $\frac{1}{4}$ de 10 = 2,50 €.