06 Paradojas
Coincidencias. La paradoja del cumpleaños

El Museo de las Matemáticas de Cataluña (MMACA) está concebido de manera que cualquier visitante pueda tocar y experimentar con las matemáticas. El siguiente módulo del museo: "Coincidencias", con 15 agujeros y 8 huevos (imagen adjunta) se ha diseñado para realizar la siguiente experiencia:

Se invita a ocho visitantes, de manera que cada uno de ellos coja un huevo (piedra) y, sin haber visto dónde han colocado el suyo los anteriores participantes, debe introducirlo en uno de los 15 agujeros del módulo. Una vez los ochos participantes han introducido el huevo, se alzan las puertas de los 15 agujeros y se comprueba si ha habido coincidencias.

https://www.mmaca.cat

1 Halla la probabilidad de que los 8 huevos se encuentren en distintos agujeros.

2 ¿Qué probabilidad habrá de que haya alguna coincidencia?

3 Simula con la calculadora la experiencia 10 veces, comparte con tus compañeros los resultados, aglutínalos y contrasta los resultados totales obtenidos con el cálculo probabilístico.

4 Simula varias veces la experiencia y comprueba si obtienes coincidencias.

La paradoja del cumpleaños.
Una vez realizada la experiencia anterior y constatar que la probabilidad de que al poner al azar 8 huevos, algunos huevos hayan coincidido en un mismo agujero, es muy alta, podemos afrontar el problema del cumpleaños: *¿Cuál será la probabilidad de que en una clase de 30 alumnos, haya como mínimo dos personas con la misma fecha de cumpleaños?*
Para simplificar el problema, supón que no existen los años bisiestos.

5 Calcula la probabilidad de que en una clase de 30 alumnos haya como mínimo dos con la misma fecha de cumpleaños.

6 Como sabes, no todas las clases tienen 30 alumnos. Realiza una tabla donde se muestre qué probabilidad habrá de encontrar una coincidencia en clases desde 15 hasta 35 alumnos.

7 En el Mundial de futbol de 2014 participaron 32 equipos nacionales, cada uno con 23 jugadores. Usando las fechas de nacimiento de la lista oficial de equipos de la FIFA, resultó que 16 equipos tenían al menos un cumpleaños compartido, algunos de ellos con dos pares de coincidencias: Argentina (x2), Australia, Bosnia Herzegovina, Brasil, Camerún, Colombia, Corea del Sur (x2), España, Estados Unidos, Francia (x2), Holanda, Honduras, Irán (x2), Nigeria, Rusia y Suiza (x2).

En vista del estudio probabilístico realizado en las actividades anteriores, ¿qué opinas al respecto? ¿Puedes afirmar que en el próximo mundial se dará está misma situación?

8 En cualquier reunión de más de 50 personas, la probabilidad que haya dos que celebren el cumpleaños el mismo día es prácticamente 1.

¿Puedes corroborar está afirmación?

Coincidencias. La paradoja del cumpleaños

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con esta actividad se puede analizar cómo, en términos de probabilidad, la intuición no siempre nos lleva al resultado correcto.
- El uso de la regla de Laplace y la combinación de probabilidades nos llevará a un resultado a primera vista no compatible con la intuición, pero cierto matemática y casuísticamente.
- El uso de la calculadora favorece la simulación de la experiencia y que la atención se centre en la toma de decisiones, en la formulación de conjeturas y en su validación.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

La probabilidad de que, aleatoriamente, los 8 huevos se encuentren en distintos agujeros es aproximadamente del 10%:

$$\frac{15}{15}\times\frac{14}{15}\times\frac{13}{15}\times\frac{12}{15}\times\frac{11}{15}\times\frac{10}{15}\times\frac{9}{15}\times\frac{8}{15}$$

0.1012369383

o bien:

$$\frac{15!}{(15-8)!\times 15^8}$$

0.1012369383

2

El resultado anterior conduce a que la probabilidad de que haya alguna coincidencia es:

1 – 0,101 = 0,899, es decir, prácticamente del 90%.

Este resultado puede sorprender, puesto que prácticamente 9 de cada diez veces que se realice la experiencia, se obtendrán coincidencias.

3

La función aleatoria *RanInt#* permite simular la experiencia tantas veces como se quiera:

RanInt#(1,15) genera aleatoriamente un número entero entre 1 y 15, que corresponde al número del agujero donde se coloca la piedra (huevo). Pulsando la tecla = sucesivamente hasta 8 veces emulando la experiencia:

ALPHA · 1 SHIFT) 1 5) = = = = = = = =

RanInt#(1,15)

7 11 3 11 9 2 3 8

Para una mejor visualización de la experiencia, se cambia la configuración de la calculadora:

SHIFT MENU 1

```
1:Entrada/Salida
2:Unidad angular
3:Formato número
4:Result fracción
```

3

```
1:E Mat/S Mat
2:E Mat/S Decimal
3:E Línea/S Línea
4:E Línea/S Decim
```

SHIFT MENU ▼ ▼ ▼ 3

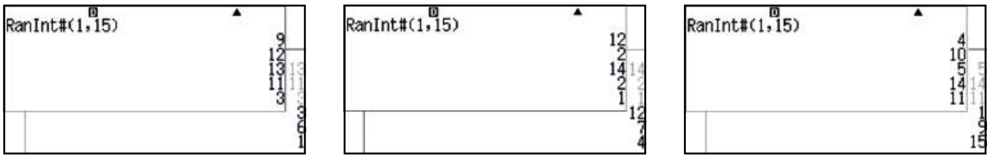
```
1:Símbolo decimal
2:Separar dígitos
3:Fuente multilín
4:Idioma
```

2

```
1:Fuente normal
2:Fuente pequeña
```

Coincidencias. La paradoja del cumpleaños

Se muestran como ejemplo tres simulaciones:



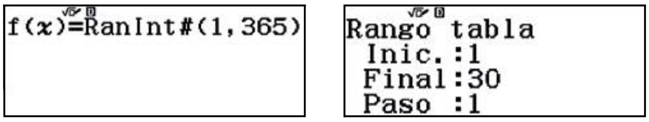
Se comprueba que en la primera experiencia existe una coincidencia, en la segunda hay dos y, en la tercera no hay coincidencia. El alumnado puede repetir tantas veces como quiera la experiencia y comprobar el cálculo de probabilidades.

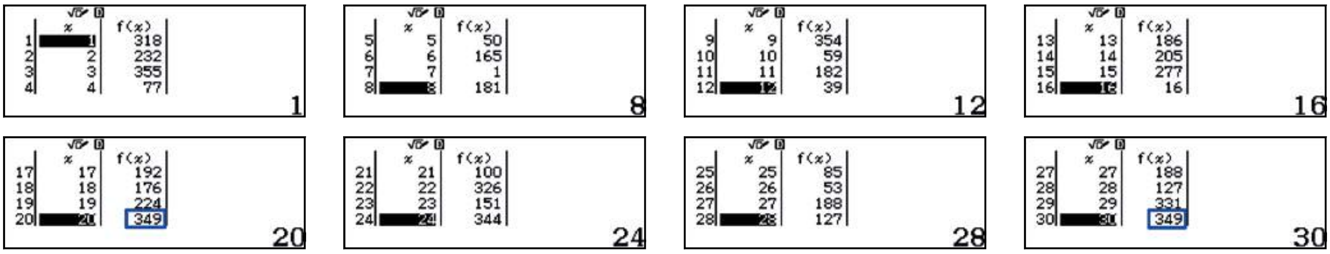
La razón de la suma de todas las simulaciones con al menos una coincidencia y el total de las simulaciones realizadas por el grupo clase debería acercarse al valor teórico (0,899) del **apartado 2**.

4

La solución a esta cuestión es análoga a la anterior, basta con cambiar los agujeros por los días del año y las piedras (huevos) por personas. Para simplificar el problema, se supondrá que no existen los años bisiestos.

En esta ocasión se debe generar un número entero aleatorio entre 1 y 365, pulsando 30 veces consecutivas la tecla ⊟. Esta operativa no resulta demasiado cómoda, motivo por el que se aprovecha el menú *Tabla* para simular la experiencia:





Se observa que más de la mitad de las veces se encuentra al menos una coincidencia. En concreto esa probabilidad es aproximadamente del 71%.

5

¿Qué ocurrirá con los cumpleaños de n personas distribuidos entre los 365 días del año?

El número de n cumpleaños sin que haya coincidencias viene dado por:

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)$$

Esto es debido a que para el primer cumpleaños existen 365 posibles fechas, para el segundo 364 y así sucesivamente hasta n cumpleaños.

El número total de n cumpleaños sin tener ningún tipo de restricción es 365^n, debido a que hay 365 posibles fechas para cada uno de los n cumpleaños.

Por consiguiente, la probabilidad de que no haya dos personas con la misma fecha de cumpleaños viene dada por la expresión:

$$Q(n) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

La probabilidad $P(n)$ de que al menos dos personas tengan la misma fecha de cumpleaños (día y mes) viene dada por:

$$P(n) = 1 - Q(n) = 1 - \left(\frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}\right) = 1 - \left(\frac{365!}{(365 - n)! \cdot 365^n}\right)$$

Para $n = 30$ alumnos, realizar el cálculo a partir de la primera expresión presenta la dificultad de introducir 30 factores, que puede llevar a cometer algún error. Tampoco es útil la segunda expresión debido a que el cálculo del factorial de 365 se encuentra fuera del rango de operatividad de la calculadora.

Con el operador productorio (ALPHA x ($\prod$)) se calcula la probabilidad $P(30)$ a partir de la primera expresión:

$$1-\prod_{x=1}^{30}\left(\frac{365-x+1}{365}\right)$$
$$0.7063162427$$

o bien:

$$1-\frac{\prod_{x=1}^{30}(365-x+1)}{365^{30}}$$
$$0.7063162427$$

$$P(30) \cong 71\%$$

6

En una tabla de valores se pueden hallar las distintas probabilidades de obtener una coincidencia en función del número de alumnos:

$$f(x)=1-\frac{\prod_{x=1}^{x}(365-x+1)}{365^{x}}$$

Rango tabla
Inic. :15
Final :35
Paso :1

	x	$f(x)$
1	15	0.2529
2	16	0.2836
3	17	0.315
4	18	0.3469

15

	x	$f(x)$
7	21	0.4436
8	22	0.4756
9	23	0.5072
10	24	0.5383

24

	x	$f(x)$
15	29	0.6809
16	30	0.7063
17	31	0.7304
18	32	0.7533

32

7

En un grupo de 23 personas la probabilidad de que al menos dos de ellas hayan nacido en la misma fecha (día y mes) es del 50% tal y como se muestra en el **apartado anterior**.

En este caso, en el mundial de fútbol del 2014, los datos reales concuerdan con los resultados teóricos.

En el próximo mundial de fútbol no se puede asegurar que se repetirá la situación, puesto que la teoría de la probabilidad se basa en la ley de los grandes números. No se puede considerar que 32 equipos es un número 'grande' de sucesos en términos probabilísticos.

8

La probabilidad de coincidencia en un grupo de 50 personas es:

$$1-\prod_{x=1}^{50}\left(\frac{365-x+1}{365}\right)$$
$$0.9703735796$$

Es decir, la afirmación es correcta.

OBSERVACIÓN

Si desea consultar información sobre el Museu Matemàtiques de Catalunya, lo puede hacer a través de los siguientes enlaces:

https://mmaca.cat

https://mmaca.cat/moduls/