

Star Wars

Antonio Gascón Roldán

IES Antonio Menárguez Costa (Los Alcázares, Murcia)

El siguiente problema se plantea a todos los alumnos, padres y compañeros docentes del IES Antonio Menárguez Costa que estén dispuestos a aceptar el reto de resolverlo. El problema, en su versión completa, se publica en los pasillos del centro y los interesados presentan las respuestas que se les van ocurriendo para su resolución al profesor Antonio Gascón. Esta idea la tuvo al ver la película "El indomable Will Hunting", lo que le impulsó a publicar retos, con la intención de buscar mentes inquietas dispuestas a resolverlos.



PROBLEMA

Hace mucho tiempo, en una galaxia muy, muy lejana... los años de paz y prosperidad han pasado. Al Ejército Rebelde le ha llegado la noticia de que el Imperio Galáctico está diseñando una nueva Estrella de la Muerte mucho más letal que la anterior y con un tamaño mucho mayor (900 km de diámetro y $1,5 \cdot 10^{22}$ kg de masa). Los rebeldes saben que no pueden esperar, hay que pensar como desbaratar los planes del malvado Palpatine y para conseguirlo han de actuar antes de la culminación de la imponente estación espacial.

Los mejores ingenieros informáticos del ejército rebelde se han puesto a trabajar intentando interceptar información dentro de la nueva red de comunicación del Imperio. Tras varias semanas de investigación, se ha conseguido interceptar parte de la información que podría resultar crucial en el plan de ataque rebelde. La idea principal del Imperio se centra en la vigilancia de la superficie de la Estrella antes de sus últimos retoques. El Imperio ha situado en órbita sobre la superficie de la estación espacial el menor número de cazas tipo TIE/In posible, de forma que los pilotos divisen, entre todos, toda la superficie de la nueva estación, estando lo más cerca posible de ella. Para el ejército rebelde es fundamental conocer la disposición, el número y la distancia entre dichos cazas para intentar introducirse en la estación galáctica con éxito. Para llevar a cabo este plan han de estudiar detenidamente la situación orbital del escuadrón de defensa. Saben que estos pilotos desempeñan un papel de vigía que podría alarmar al resto de tropas imperiales y esto acabaría en una derrota segura para el ejército rebelde. De no conseguir el acceso al interior de la Estrella de la Muerte, es muy probable que sea la última posibilidad en la que los rebeldes puedan imponerse al Imperio. Si los cálculos fallan y no consiguen acabar con la nueva estación espacial, los años de paz y prosperidad acabarán para siempre en la galaxia y ésta quedará sumida en una eternidad dominada por el lado oscuro de la fuerza.

Para ayudar al ejército rebelde, se han de resolver las siguientes cuestiones:

1. Número mínimo de cazas TIE/In necesarios para poder controlar visualmente toda la superficie de la Estrella de la Muerte.
2. Altura mínima, respecto a la superficie, a la que el Imperio ha puesto los cazas alrededor de la Estrella de la Muerte.
3. Distancia entre cada par de cazas TIE/In situados en órbita.
4. Número máximo de cazas que podrán aprovechar la fuerza de la gravedad para orbitar alrededor de la Estrella sin gastar ningún tipo de combustible.
5. Velocidad a la que deberían girar los cazas, que puedan aprovechar la fuerza de la gravedad, para mantenerse en órbita.

SOLUCIÓN

1

Teniendo en cuenta que la estrella de la muerte tiene forma esférica, el número mínimo de cazas que el Imperio Estelar necesitará para controlar, sobrevolándola, toda la superficie, será de 4. Los cazas deberán sobrevolar la superficie formando un tetraedro.

2

Analizando los datos, se observa que el único relevante para calcular la distancia planteada es el diámetro de la Estrella de la Muerte (900 km).

En la Imagen 1 se puede ver, destacado con un trazo más grueso, el segmento que hay que calcular, que no es otro que la altura del caza a la superficie.

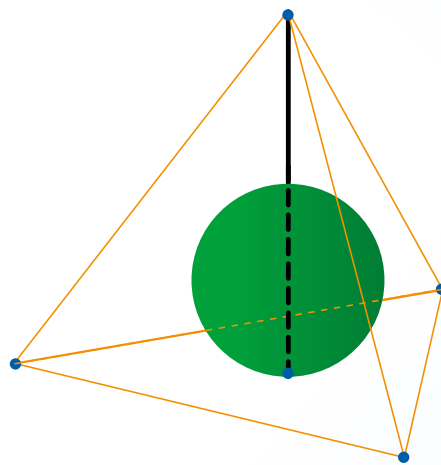


Imagen 1

Colocando el dibujo en una perspectiva lateral (Imagen 2) y teniendo en cuenta que las medianas de un triángulo equilátero se cortan en un punto cuya distancia al punto medio de los lados es un tercio de la distancia que hay hasta los vértices de dicho triángulo, el dibujo nos queda:

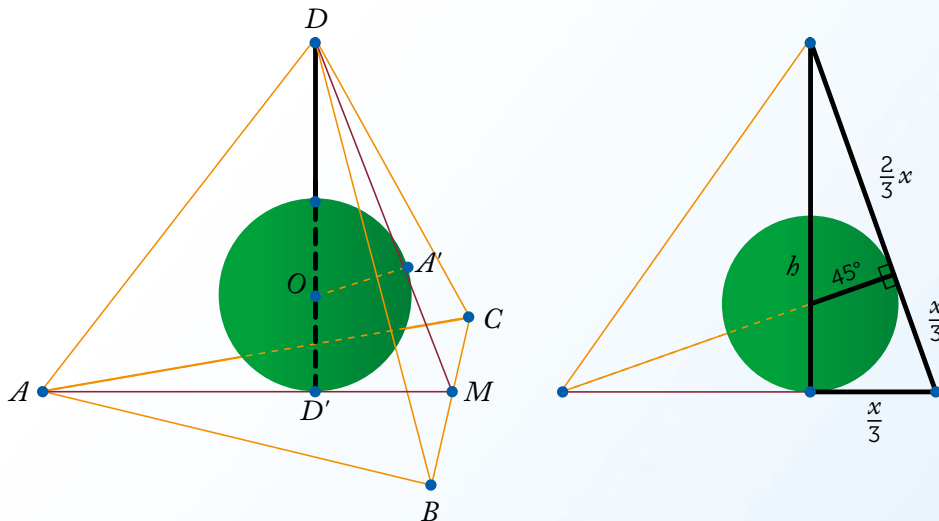


Imagen 2

Con la semejanza de triángulos y despejando incógnitas, se halla h .

Se utiliza el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo más grande para expresar h en función de x :

$$x^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{9}} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{8x^2}{9}}$$

Expresión 1

Estableciendo una relación de semejanza entre el triángulo rectángulo grande y el que tiene como hipotenusa el segmento que une el vértice superior con el punto tangente a la esfera:

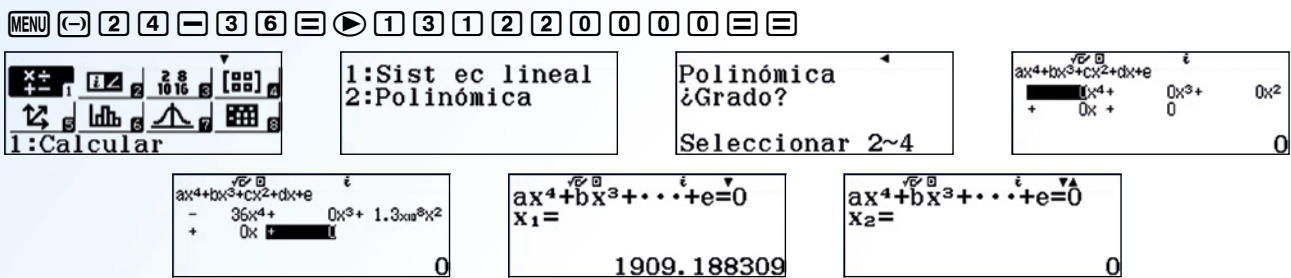
$$\frac{2x}{\frac{3}{450}} = \frac{h}{x} \Rightarrow \frac{2x}{1350} = \frac{3h}{x} \Rightarrow h = \frac{2x^2}{4050}$$

Expresión 2

Sustituyendo la expresión de h despejada (Expresión 1), en la Expresión 2, se calcula el valor de x :

$$\sqrt{\frac{8x^2}{9}} = \frac{2x^2}{4050} \Rightarrow \frac{8x^2}{9} = \left(\frac{2x^2}{4050}\right)^2 \Rightarrow \frac{8x^2}{9} = \frac{4x^4}{16402500} \Rightarrow 131220000x^2 = 36x^4 \Rightarrow -36x^4 + 131220000x^2 \Rightarrow x^2(36x^2 - 131220000) = 0$$

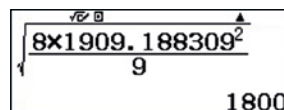
Expresión 3



Se observa que el único resultado factible es $x = 1\,909,188309$ km.

Se calcula ahora el valor de h :

$$h = \sqrt{\frac{8x^2}{9}} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{8 \cdot 1\,909,188309^2}{9}} = 1\,800 \text{ km}$$



Dado que h es la suma del diámetro de la Estrella de la Muerte más la altura a la que se encuentra el caza sobrevolando la superficie, se concluye que los cazas sobrevolarán en formación a una altura de 900 km:

$$h = 1\,800 \text{ km} = \text{diámetro} + \text{altura de vuelo} = 900 \text{ km} + 900 \text{ km}$$

3

Para contestar esta cuestión, como se puede ver en la Imagen 3, se trata de calcular la distancia " d ". Para ello, se utilizan las razones trigonométricas. Cada cara del tetraedro, es un triángulo equilátero, por lo que sus ángulos son de 60° . Teniendo en cuenta que se conoce el valor de x , calculado en la cuestión 2, se puede utilizar el valor de este cateto y, con el seno de 60° calcular el valor de la hipotenusa. La hipotenusa es la distancia entre los cazas que sobrevuelan la estación espacial.

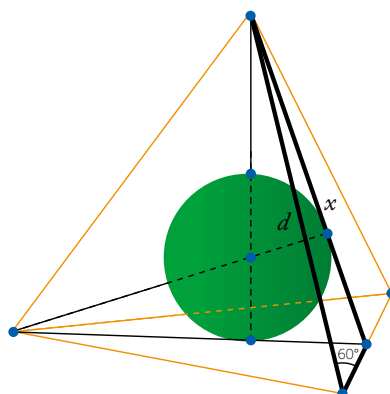


Imagen 3

Se calcula d :

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{x}{d} \Rightarrow \text{sen } 60^\circ = \frac{1\,909,188309}{d} \Rightarrow d = \frac{1\,909,188309}{\text{sen } 60^\circ}$$

Los cazas se encuentran a una distancia entre ellos de 2 204,540768 km.

4

Como los cazas tienen que describir una circunferencia completa alrededor de un círculo máximo o "ecuador" de la Estrella de la Muerte, para poder aprovechar su fuerza de atracción gravitatoria, y sin romper la formación de tetraedro para vigilar en todo momento la estación espacial, el número máximo de cazas que girarán sin gastar combustible será de 2 unidades.

5

La velocidad orbital de un objeto alrededor de un cuerpo celeste es:

$$V_o = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Con $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, M = masa del objeto sobre el cual se orbita y r = distancia entre los objetos de centro a centro.

De esta forma, resulta sencillo calcular la velocidad solicitada. Se dispone de los siguientes datos:

M = masa de la Estrella de la Muerte = $1,5 \cdot 10^{22} \text{ kg}$.

r = distancia entre los objetos de centro a centro = $900 + 450 = 1\,350 \text{ km} = 1\,350\,000 \text{ m}$.

Utilizando las constantes de las que dispone la calculadora:

$$V_o = \sqrt{\frac{G \cdot 1,5 \cdot 10^{22}}{1\,350\,000}} = 861,125878 \text{ m/s} = 3\,100,053161 \text{ km/h}$$

Los cazas que puedan utilizar la velocidad orbital, se moverán a 861,125878 m/s.

Se espera que con todos estos datos el Ejército Rebelde venza al Imperio Galáctico y devuelva la paz y la prosperidad a toda la galaxia.

QUE LA FUERZA TE ACOMPAÑE