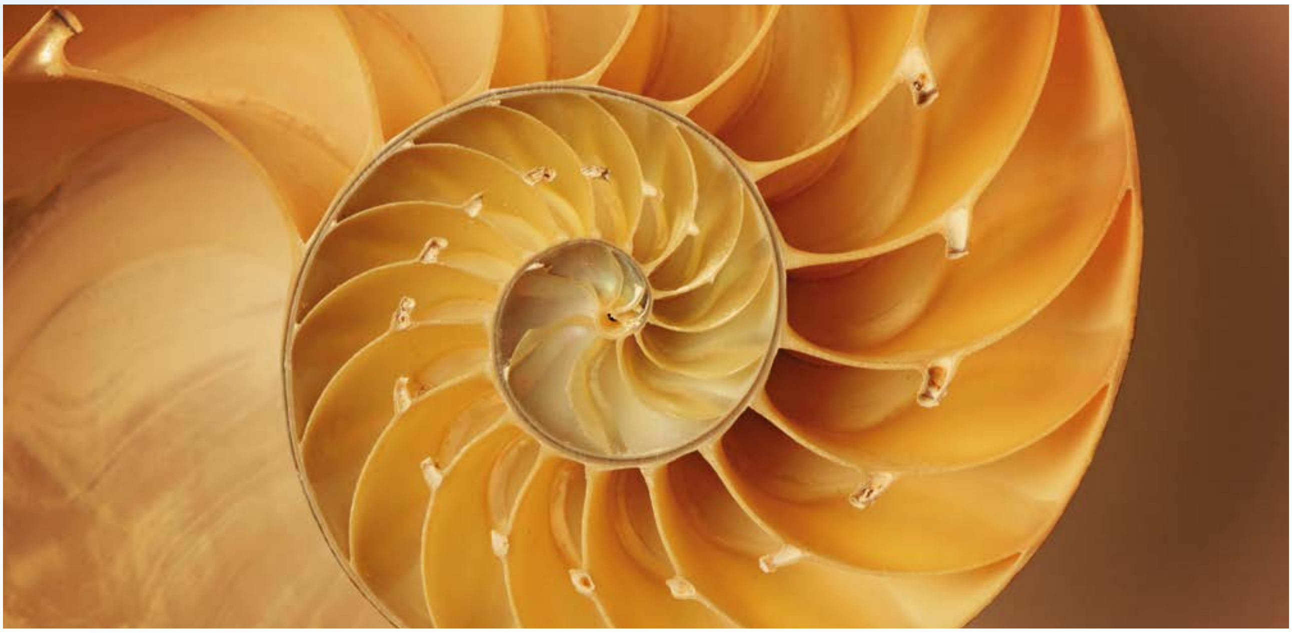
Inflexión y número de oro

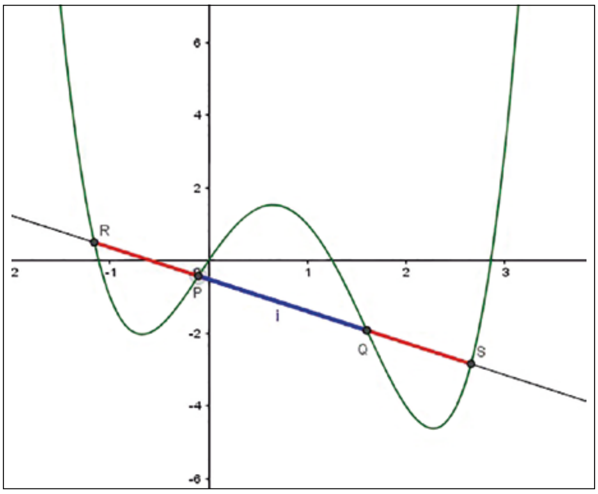
Relaciones métricas en las funciones polinómicas de cuarto grado

José Mª Chacón Íñigo
IES LLanes, Sevilla

Con esta actividad se pretende comprobar, que no demostrar, una curiosa y sorprendente relación entre las medidas de los segmentos determinados por una función polinómica de 4º grado y la recta que pasa por sus puntos de inflexión.



Sea $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ una función polinómica de cuarto grado con dos puntos de inflexión P y Q. Sea r la recta que une P y Q. Sean R y S los puntos en los que r corta a $f(x)$ (además de P y Q).



Entonces los segmentos $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$ son iguales y además $\frac{|PQ|}{|PR|} = \varphi$, siendo φ el número de oro.

PROBLEMA

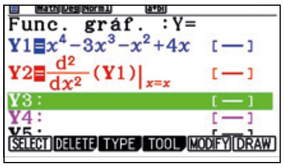
Dada la función $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 4x$ comprobar lo anteriormente descrito.

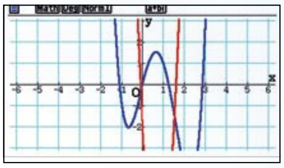
SOLUCIÓN

Para calcular los puntos de inflexión de $f(x)$, desde el menú ***Gráfico*** se definen las funciones:

$$Y1 = x^4 - 3x^3 - x^2 + 4x \text{ e } Y2 = \frac{d^2}{dx^2}(Y1)\Big|_{x=x}$$

(para escribir la segunda derivada se pulsa OPTN, **CALC** (F2) , d^2 / dx^2 (F2))

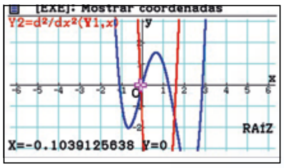




Los puntos donde se anula la segunda derivada son los puntos de inflexión de $f(x)$.

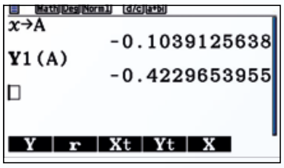
Con la función **G-Solv**(F5) calculamos los puntos de corte de $Y2$ con el eje de abscisas.

Para ello pulsamos **ROOT**(F1), seleccionamos $Y2$ (▼) y pulsamos EXE.



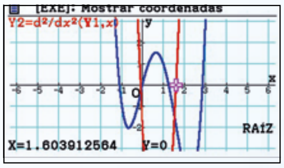
Abrimos el menú ***Ejec-Mat***, guardamos la abscisa del primer punto de inflexión en la variable A (X,θ,T → ALPHA X,θ,T) y calculamos $f(A)$.

(Para escribir la función Y pulsamos: VARS, **GRAPH** (F4), **Y** (F1)).

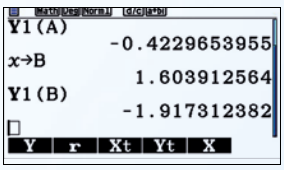


El primer punto de inflexión es $P(-0.1039, -0.4230)$

Abrimos el menú ***Gráfico*** y repetimos el procedimiento para calcular el segundo punto de inflexión, Q:



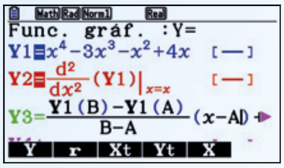
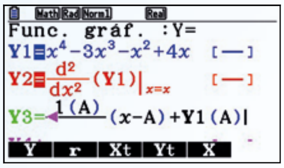
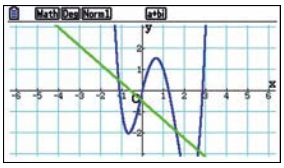
Desde el menú ***Ejec-Mat***, definimos el valor $x \to B$ y calculamos $f(B)$, la ordenada del segundo punto de inflexión:



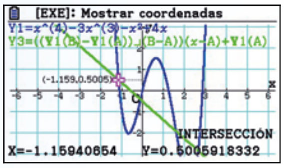
El segundo punto de inflexión es $Q(1.6039, -1.9173)$

Dibujamos la recta $Y3$ que pasa por los puntos P, Q desde el menú ***Gráfico***:

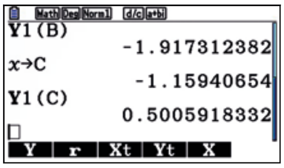
$$Y3 = \frac{Y1(B) - Y1(A)}{B - A}(x - A) + Y1(A)$$

Con **G-Solv** y **INTSECT** (**F5**),calculamos el primer punto de intersección, R, de $f(x)$ con la recta:

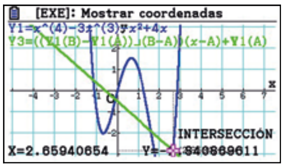


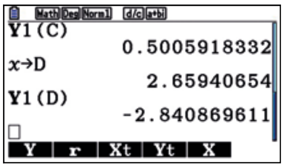
En el menú ***Ejec-Mat***, guardamos la abscisa del primer punto de intersección en la variable C y calculamos $f(C)$:



El primer punto de intersección es $R(-1.1594, 0.5006)$

De la misma manera que antes, desde los menús ***Gráfico*** y ***Ejec-Mat***, calculamos el cuarto punto de intersección, S, de la función $f(x)$ y la recta:

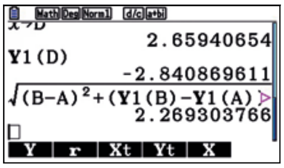




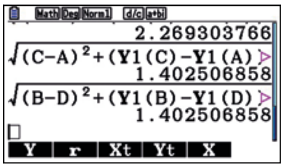
El cuarto punto de intersección es: $S(2.6594, -2.8409)$

Para terminar, calculamos las medidas de los segmentos $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$:

$$K = \overline{PQ} = \sqrt{(B - A)^2 + (Y1(B) - Y1(A))^2}\ ,\ M = \overline{PR} = \sqrt{(C - A)^2 + (Y1(C) - Y1(A))^2}\ ,\ N = \overline{QS} = \sqrt{(B - D)^2 + (Y1(B) - Y1(D))^2}$$



$K = 2.2693$

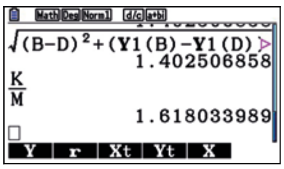


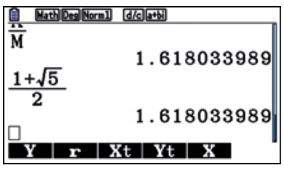
$M = 1.4025$

$N = 1.4025$

Se observa que $M = N$.

Calculamos $\frac{K}{M}$:





Y observamos que se obtiene el número de oro $\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} = \frac{K}{M} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$.