Tema 1.
OPERACIONES BÁSICAS CON LA CALCULADORA CLASSPAD

- Introducción.
- Acceso a la ClassPad.
- Menú de aplicaciones en la ClassPad.
- Menú principal de la ClassPad.
- Primeras operaciones con la ClassPad.
- Teclados virtuales.
- Representación de los resultados.
- Captura de pantallas de la ClassPad.
- Actividades propuestas.

INTRODUCCIÓN

En general con cualquier nuevo recurso y en particular con la calculadora, será imposible llegar a un acuerdo entre los docentes de Matemáticas, incluso si a nuestros compañeros les planteamos la pregunta ¿eres partidario del uso de la calculadora en el aula como recurso didáctico? obtendríamos respuestas y justificaciones para todos los gustos.

En sus distintas versiones, siempre será posible obtener o diseñar alguna aplicación didáctica para las calculadoras.

Por ejemplo, las calculadoras básicas permitirán reforzar las operaciones básicas con números enteros y decimales; con las calculadoras científicas será posible trabajar las operaciones con fracciones sin olvidar que resultarán imprescindibles para explorar y calcular logaritmos y razones trigonométricas, salvo que tengamos intención de volver a las famosas y antiguas tablas de logaritmos, además de considerar su utilidad en cualquier cálculo estadístico.

El siguiente escalón lo componen las calculadoras gráficas que resultarán de gran utilidad en niveles educativos como el Bachillerato e incluso para el último curso de la Educación Secundaria Obligatoria.

Avanzando un escalón, llegaríamos a las calculadoras simbólicas, con las que resultará sencillo obtener una función derivada, una primitiva, resolver un sistema de ecuaciones con parámetros, entre otras tareas, de las que hasta la fecha, es de agradecer que no se hayan prohibido su uso en determinadas pruebas de acceso a la Universidad.

La competencia entre los distintos fabricantes de calculadoras hacen que cada vez ofrezcan más posibilidades, que incrementen el número de aplicaciones y sobre todo que permitan la interrrelación entre los distintos módulos que incorporan.

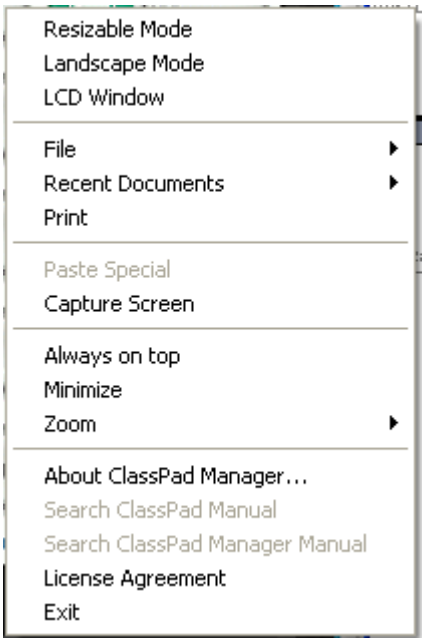
Esto ha ocurrido con la última calculadora presentada por **CASIO**, la que responde al modelo **ClassPad fx-CP400**, de la que resulta complicado indicar a que tipo corresponde, más bien abre un nuevo grupo de calculadoras, aquellas que amplían las posibilidades de cálculo simbólico con nuevas aplicaciones y se aproximan a las conocidas **PDA**.

EMULADOR DE LA CALCULADORA CLASSPAD fx-CP400

Para acceder al emulador de la **ClassPad** bastará con pulsar sobre el acceso directo creado previamente durante el proceso de instalación:

Aparecerá la imagen de la calculadora:

Aunque podemos trabajar sobre ella, es conveniente ampliar su pantalla. Para ello, situamos el puntero del ratón sobre la calculadora y pulsamos el botón derecho. Aparecerá el siguiente menú:



Al seleccionar la opción **LCD Window** conseguiremos la ampliación de la pantalla de la calculadora.

La calculadora **ClassPad** dispone de un puntero para facilitar la selección de las distintas opciones y la realización de tareas, cuyo efecto conseguiremos en el emulador (**ClassPad Manager**) con ayuda del puntero del ratón.

Antes de iniciar cualquier tarea, es conveniente conocer que a través del puntero podemos realizar las dos acciones siguientes:

- **Clic**: realiza una operación o tarea.
- **Arrastre**: selecciona o desplaza un elemento previamente creado.

Ya estamos preparados para conocer algunos elementos de esta calculadora y por tanto, sacarle el máximo rendimiento a las posibilidades que ofrece.

MENÚ DE APLICACIONES DE LA CLASSPAD

Al ampliar la pantalla de la calculadora ha aparecido una ventana con distintas opciones que corresponden al **menú de aplicaciones**, en la que en la parte inferior hay dos barras que permiten visualizar el resto de opciones de este menú.

Lo primero que tenemos que realizar es configurar la calculadora a través de la opción correspondiente a **Sistema** para conseguir, entre otras cosas, que aparezca en castellano, aunque como ocurrirá con otras opciones, sólo están disponibles en la versión completa del simulador y en la propia calculadora.

Aparecerán las opciones siguientes:

En la barra superior encontramos distintas opciones cuyo significado es evidente.

Pulsando sobre la opción  estableceríamos el **Español** como lenguaje de comunicación de la calculadora con el usuario, aunque por ahora tendremos que conformarnos con el inglés.

Para volver al **menú de aplicaciones** bastará con pulsar sobre la opción **Def**. o pulsar sobre la opción **Menú** que aparece en la barra de iconos de la parte inferior de la calculadora.

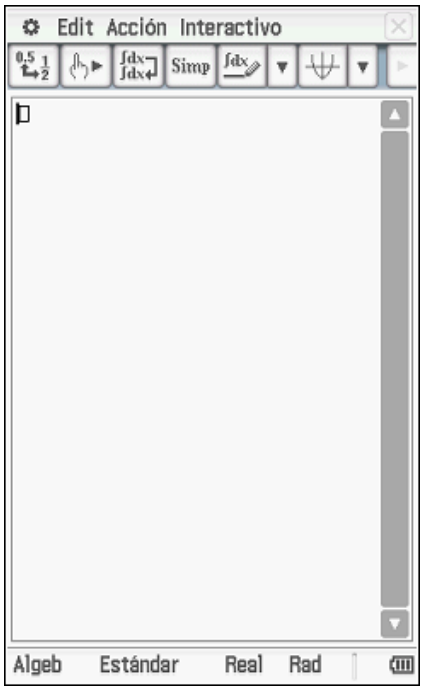
MENÚ PRINCIPAL DE LA CLASSPAD

Accederemos a través de la opción:

disponible en el menú de aplicaciones o a través de la opción 

del panel de iconos.

La pantalla cambiará y aparecerá una nueva ventana en la que realizaremos cualquier cálculo en la que además utilizaremos funciones como expondremos a continuación.



En esta ventana que denominamos *activa*, al estar disponible para introducir cualquier expresión, distinguimos varios elementos:

- **Barra de menú**: contiene menús desplegables con opciones comunes a las distintas ventanas y opciones específicas de la ventana activa.

- **Barra de herramientas**: contienen nuevos menús desplegables para realizar acciones específicas en esta ventana.

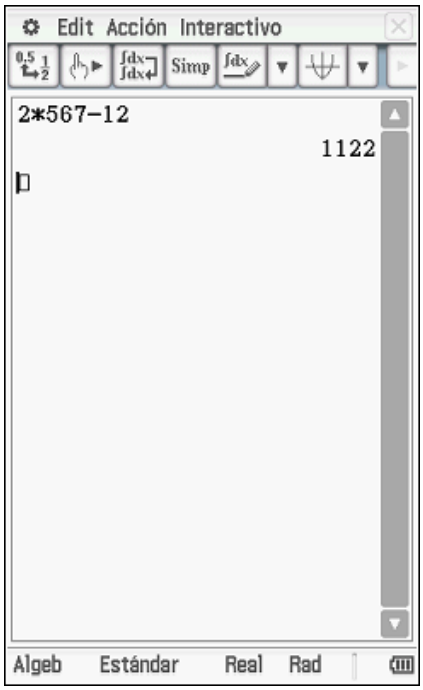
- **Área de trabajo**: espacio dedicado a la realización de cálculos y en el que se obtendrán los resultados.
- **Barra de estado**: información sobre determinadas opciones de configuración de la ventana activa.

Las distintas opciones de cada uno de los elementos anteriores las conoceremos con los ejemplos que realizaremos en este tema.

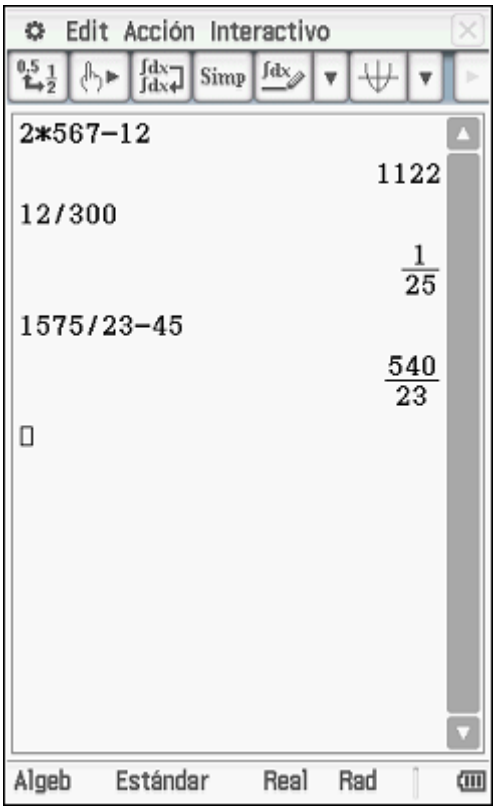
PRIMERAS OPERACIONES CON LA CLASSPAD

Para realizar cualquier cálculo numérico bastará con escribir los valores y operaciones, pulsando la tecla **Enter** (**EXE** en la calculadora real).

Un ejemplo aparece en la imagen siguiente:



Realicemos varias operaciones antes de exponer las opciones para corregir o modificar una expresión.



Una diferencia importante con respecto a otras calculadoras la encontramos en la edición de las expresiones previamente introducidas cuya corrección se realiza de manera directa, llevando el cursor sobre ellas de manera análoga a como lo haríamos con cualquier software de cálculo simbólico.

Por ejemplo, para modificar el denominador en la penúltima expresión:

$$\frac{1575}{23} - 45$$

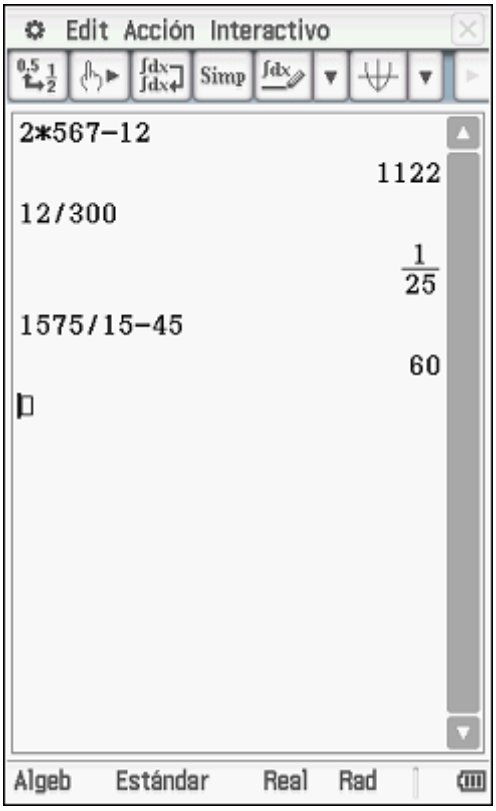
cambiando 23 por 15, situamos el cursor a continuación del 3, como aparece en la expresión siguiente:

1575/23|−45

Utilizando la tecla **Retroceso** o la tecla  borramos las cifras correspondientes a 23 y escribimos el nuevo denominador:

1575/15−45

Para obtener el nuevo resultado bastará con pulsar la tecla **Enter**.

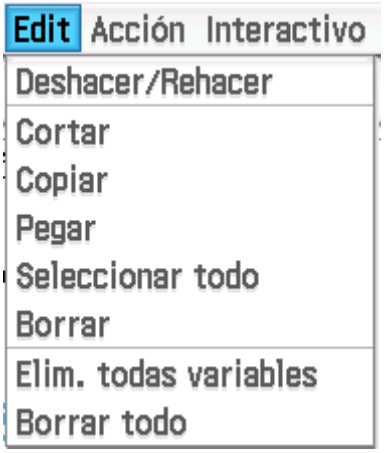


Como hemos podido observar, por defecto está activo el modo de inserción para facilitar la corrección de cualquier expresión.

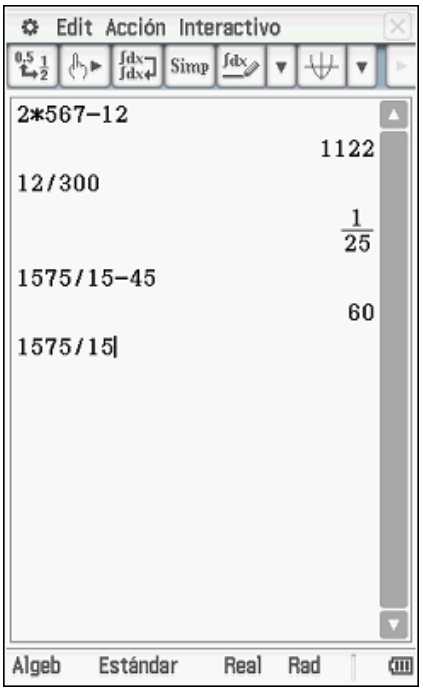
Tareas como copiar, cortar o pegar se podrán realizar en la **ClassPad** de manera análoga a como estamos habituados en cualquier otro software.

Para copiar o cortar será necesario realizar una selección previa. Para seleccionar bastará con realizar una acción de arrastre, es decir mantener pulsado el botón izquierdo del ratón mientras señalamos los objetos que se van a seleccionar.

A continuación abrimos el menú **Edit** para seleccionar la opción **Copiar** o **Cortar**, según corresponda.



Por último, si lo que necesitamos es pegar el contenido en otro lugar o en otra ventana, llevamos el cursor a la posición deseada, abrimos el menú **Edit** y seleccionamos la opción **Pegar**.



También, es posible arrastrar los objetos seleccionados para soltarlos en la nueva posición para conseguir el mismo efecto que se logra con las opciones correspondientes a **Copiar** y **Pegar**.

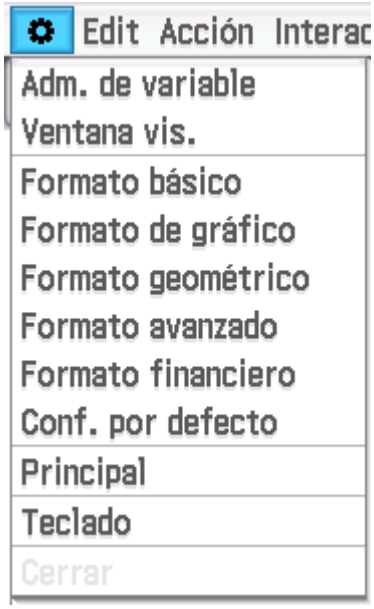
En el menú **Edit** además encontramos las opciones **Borrar** y **Borrar todo**, de las que la acción que realiza la segunda es evidente, mientras que la primera borra el contenido de la línea en la que se encuentra el cursor.

Al introducir una expresión podemos omitir el signo de multiplicación cuando se escriba delante de una constante, de un paréntesis, de una función o de **EXP**.

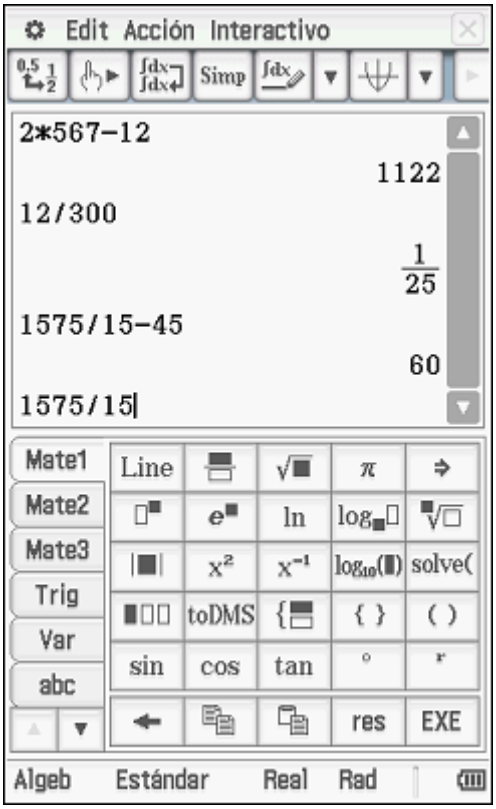
Como es evidente, el orden de prioridad en las operaciones es el habitual en el cálculo en matemáticas.

TECLADOS VIRTUALES

Para ayudar en la introducción de datos y expresiones la calculadora ofrece distintos teclados a los que se accede a través de la opción **Teclado** disponible en el menú o al pulsar la tecla **Keyboard** que aparece en la calculadora.

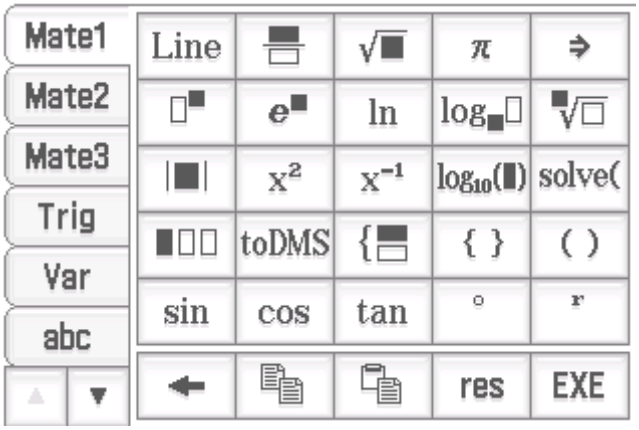


La pantalla aparecerá dividida para presentar uno de los cuatro teclados disponibles.



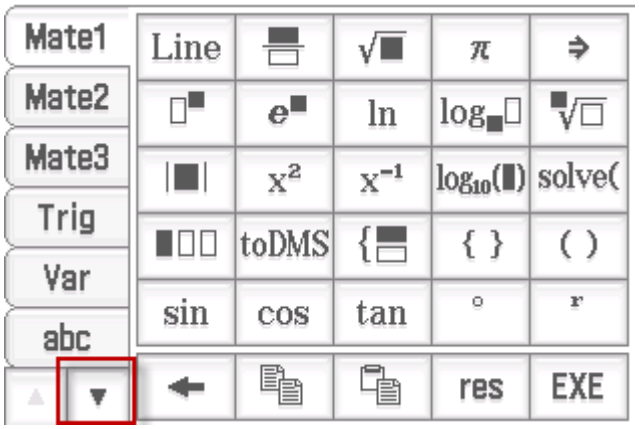
Estos teclados son:

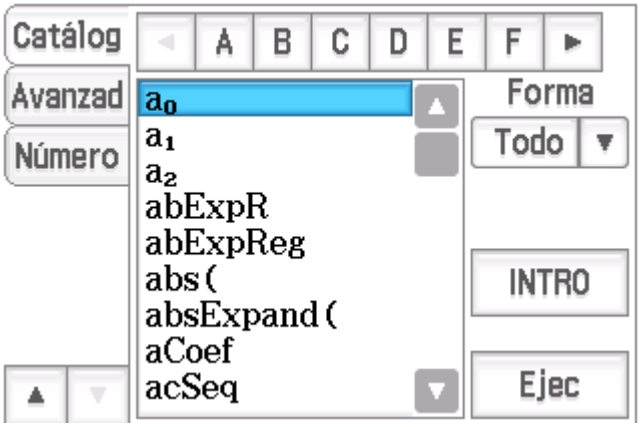
- **Teclados matemáticos**: **Mate1**, **Mate2**, **Mate3** con distintas plantillas y funciones; **Trig** y **Var** que ofrece los caracteres que se pueden utilizar para definir variables.



- **Teclado alfabético** (**abc**): simula un teclado QWERTY, incluyendo pestañas para caracteres griegos, símbolos matemáticos y otros símbolos.

- **Teclado de catálogo** (**Catalog**): presenta, por orden alfabético la relación de funciones disponibles en la calculadora. Se accede pulsando sobre el símbolo





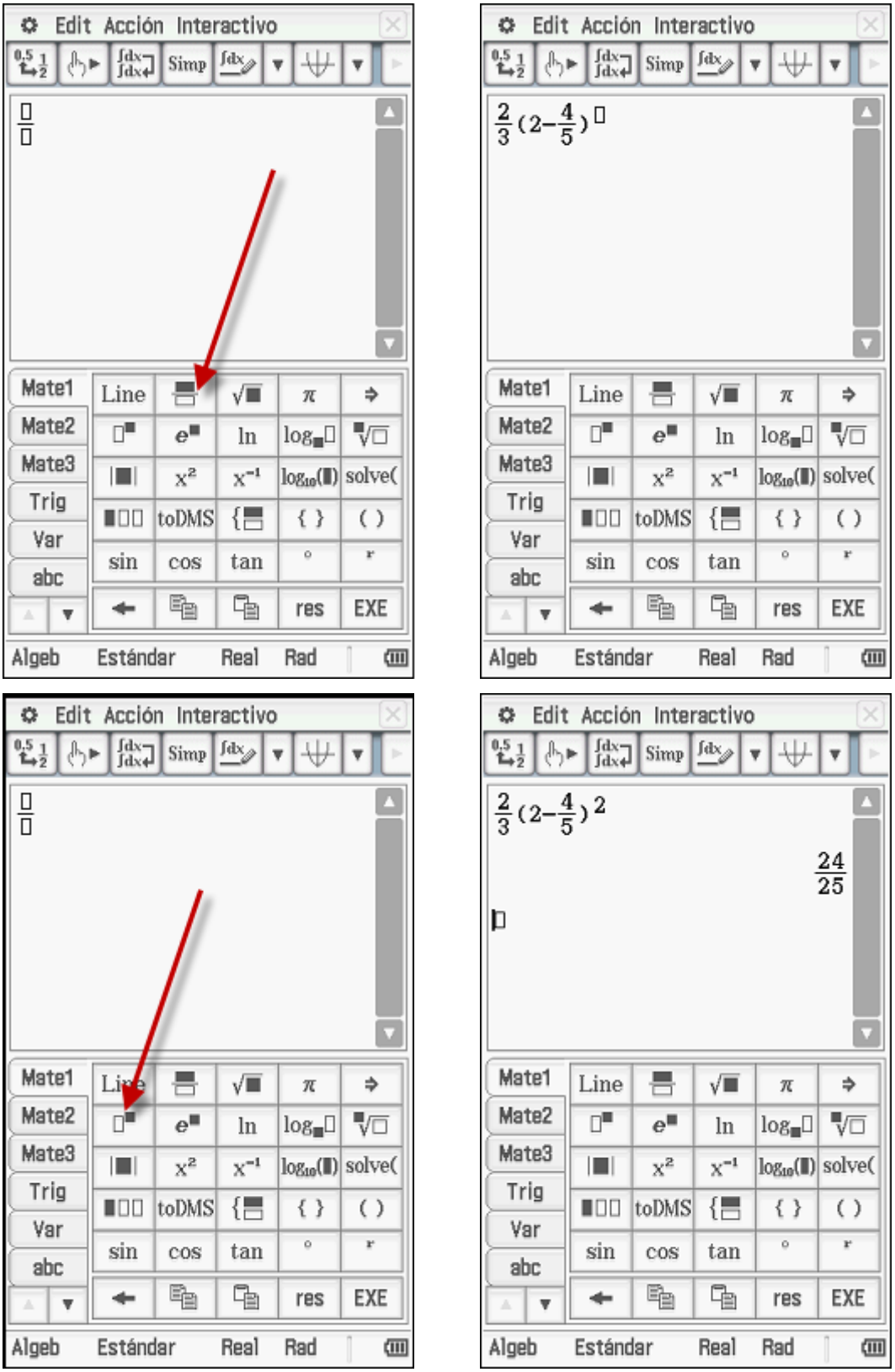
Para que desaparezcan los teclados virtuales hay que volver a pulsar la tecla **Keyboard** o seleccionar la opción **Teclado** en el menú .

Ejemplo 1.

Hallar el valor de la expresión

$$\frac{2}{3}\left(2-\frac{4}{5}\right)^2$$

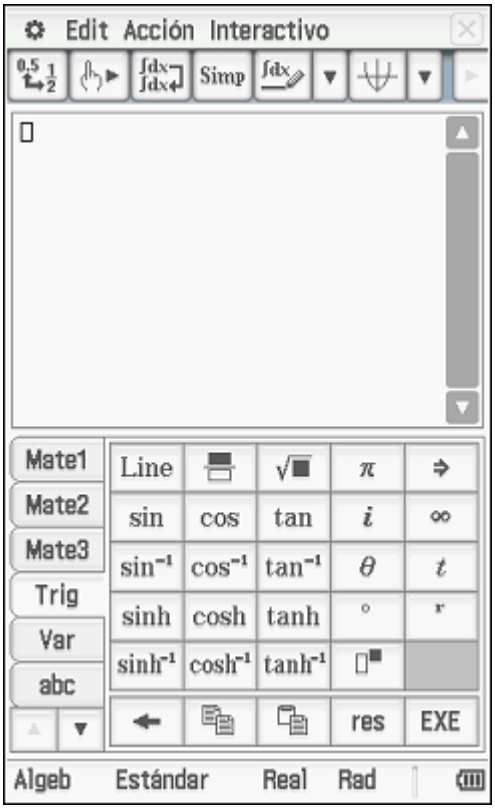
Utilizaremos el teclado **Mate1** para introducir las expresiones, pulsando sobre las opciones correspondientes a fracciones, paréntesis y potencias.

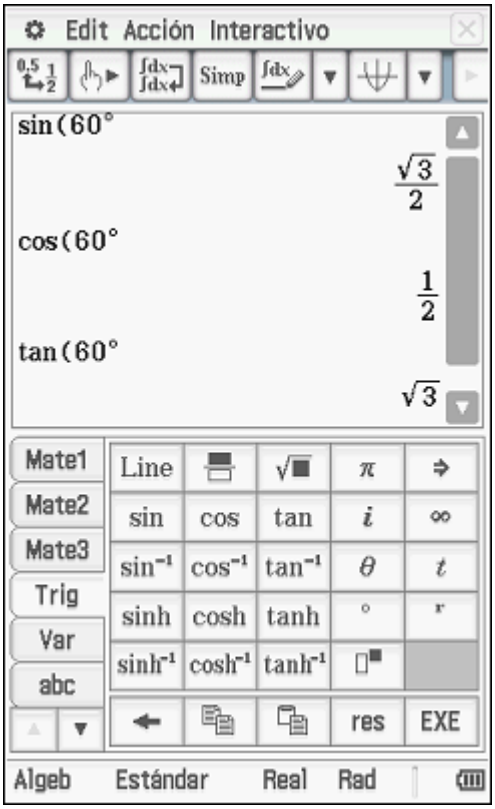


Ejemplo 2.

Hallar las razones trigonométricas del ángulo de 60º.

Una vez abierto el teclado accederemos a las funciones trigonométricas pulsando sobre **Trig**, seleccionando la razón sin olvidar incluir el símbolo º para indicar que el ángulo está expresado en grados.





Ejemplo 3.

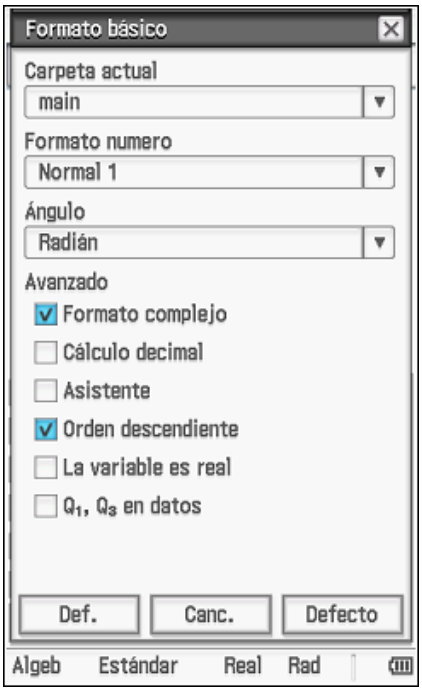
Calcula:

$$(2+i)(3-4i) \qquad (1-i)^5 \qquad \frac{2+i}{1+i}$$

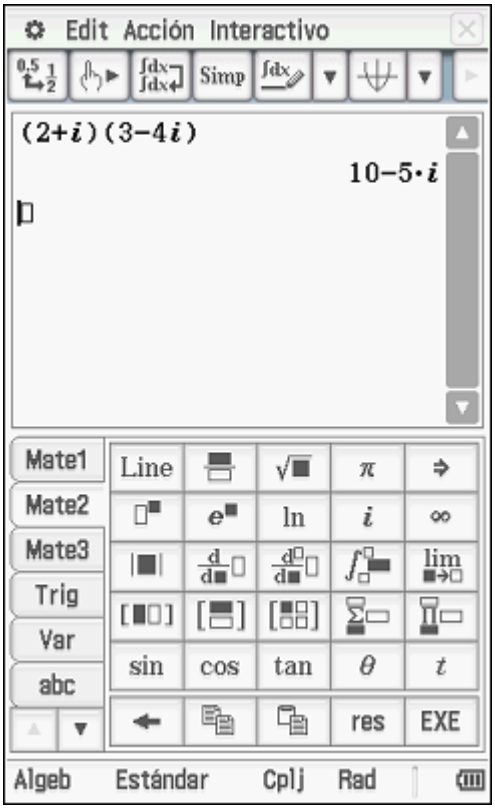
En el teclado **Mate2** encontramos la unidad imaginaria **i** que facilitará la introducción de las expresiones anteriores.

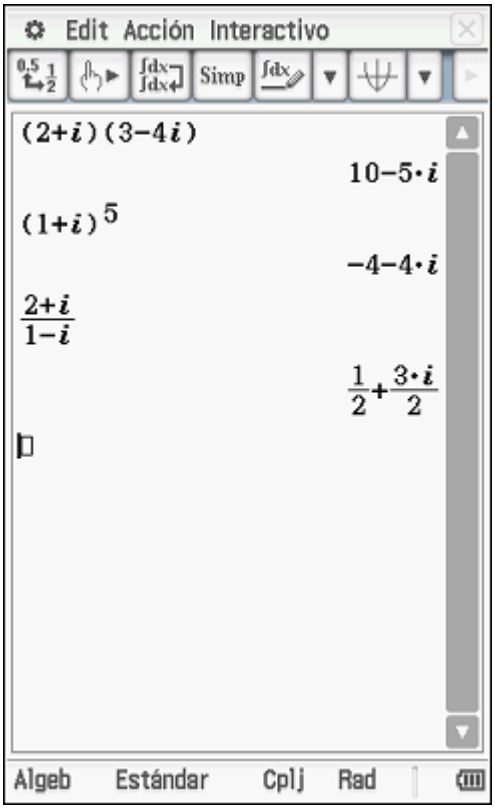
Al pulsar **Intro** o **EXE** aparece el siguiente mensaje de error:

Por defecto la calculadora no realiza las operaciones con números complejos, por lo que es necesario activar la opción correspondiente. Pulsando sobre **Formato básico** que encontramos en el menú  bastará con activar la opción **Formato complejo** para comenzar a operar con este tipo de números.



Una vez activada está opción se obtendrá el resultado de cualquier operación con números complejos.





Podemos observar que la barra d estado ha cambiado, apareciendo la opción **Cplj**.

Para cambiar el modo de trabajo, también es posible pulsar directamente sobre la barra de estado para que las opciones cambien.

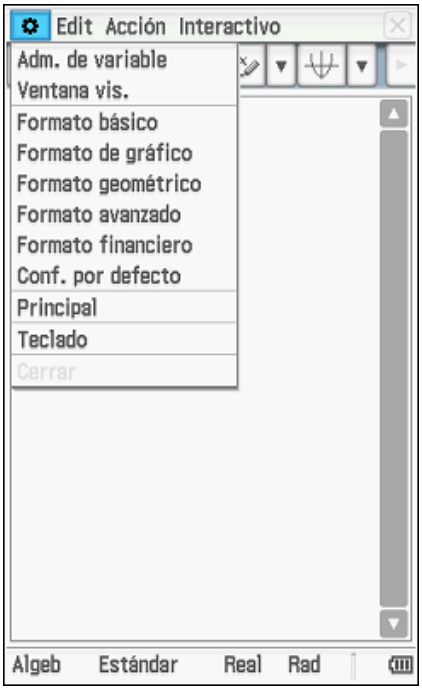
REPRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

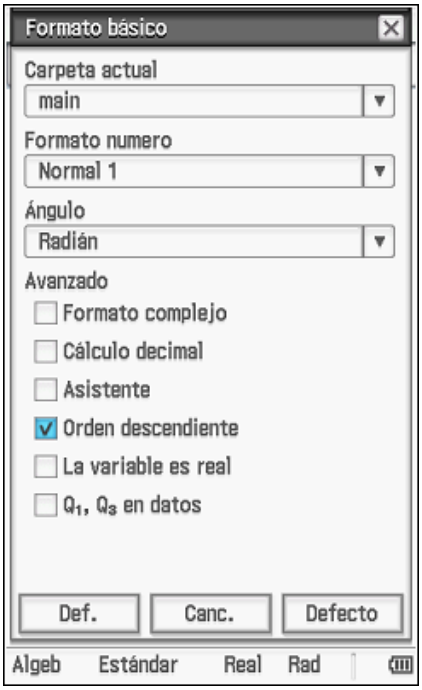
Como se ha podido observar, los resultados de los cálculos realizados anteriormente aparecen expresados en modo exacto, aunque es posible cambiar a modo aproximado o al contrario, pulsando sobre la opción


.

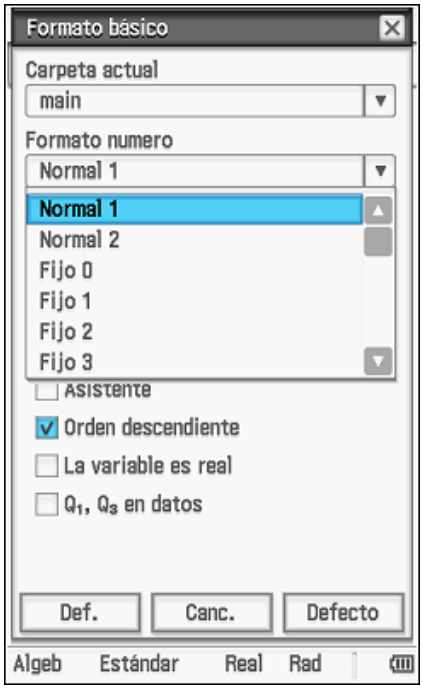
Esta acción cambia el modo de representación en el último resultado obtenido.

Para establecer las características del modo aproximado es necesario abrir el menú , seleccionar **Preferencias**, **Configuración** y **Formato básico**.





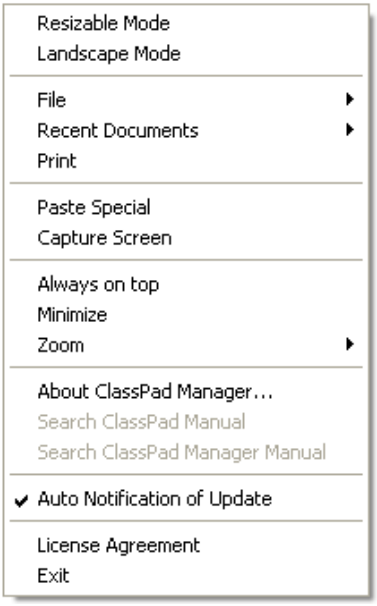
En las opciones que aparecen en **Formato básico**, abrimos la pestaña correspondiente a **Formato número** para establecer el modo de representación de los resultados de las distintas operaciones que realicemos a continuación.



En cualquier caso, siempre nos queda la opción **Defecto** para volver a la configuración inicial de la calculadora.

CAPTURA DE PANTALLAS DE LA CLASSPAD

Para capturar una pantalla de la calculadora basta con pulsar el botón derecho del ratón para acceder al menú:



Al pulsar sobre **Capture Screen** se captura la pantalla actual que para llevarla a cualquier otra aplicación a través de la opción **Pegar**.

Para finalizar este primer tema tan sólo indicar que para salir de la aplicación **ClassPad Manager** será necesario pulsar las teclas 

, de manera análoga a como lo haríamos en la calculadora para desconectarla.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Calcula el valor de las expresiones siguientes:

   a. $9-\frac{20}{3}-4^2$

   b. $\frac{2}{5}-\left(\frac{8}{3}-9\right)$

   c. $5\left(3-\left(\frac{4}{9}+3\right)\right)$

2. Simplifica la expresión $\frac{4}{11}-\left[2-\left(\frac{3}{22}+\frac{1}{2}\right)\right]$

3. Halla el valor de las expresiones siguientes:

   a. $\sqrt{50}-3\sqrt{32}+4\sqrt{8}$

   b. $\sqrt[4]{1024}$

   c. $\sqrt[8]{1679616}$

4. Calcula el valor de $\dfrac{3^{19}-2^{16}}{4^{14}}$

5. Halla, cambiando el modo de representación, varias aproximaciones decimales de las expresiones numéricas:

   a. $\dfrac{100}{33}$

   b. $5^{\frac{1}{9}}+7^{\frac{12}{5}}$

   c. $\sqrt{7+5^3}$

6. Calcula $5\sqrt{\dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{1}{5}}}}$

7. Halla

   a. $(1+i)(3-4i)$

   b. $\dfrac{-4+2i}{1+5i}$

   c. i^{203}

8. Efectúa $\dfrac{1}{(2+\sqrt{3}i)(1+i)}$

9. Calcula $\left(\dfrac{1+2i}{3-i}\right)^4$

10. Halla el valor de $(1+i)^{25}$

Tema 2.

FUNCIONES, VARIABLES Y CARPETAS EN LA CALCULADORA CLASSPAD

- Introducción.
- Funciones disponibles en la Classpad.
- Variables y carpetas.
- Actividades propuestas.

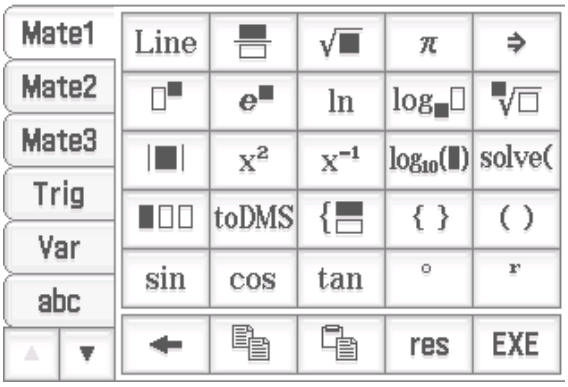
INTRODUCCIÓN

En los siguientes apartados expondremos algunas de las funciones disponibles en la calculadora para realizar operaciones con expresiones numéricas, dejaremos para temas posteriores las funciones específicas para trabajar con listas así como las existentes para realizar cálculos con matrices.

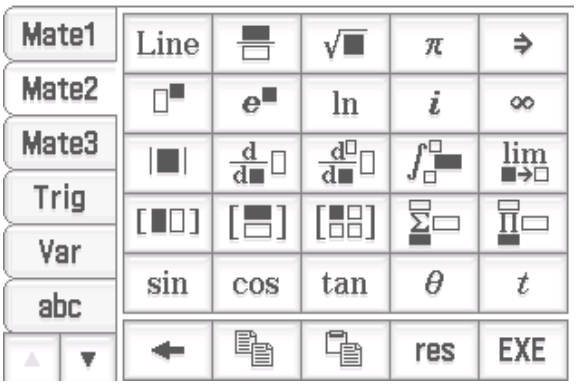
FUNCIONES DISPONIBLES EN LA CLASSPAD

La calculadora **Classpad 400** ofrece una amplia relación de funciones a las que, en su mayoría se accede desde los distintos teclados.

Mate1

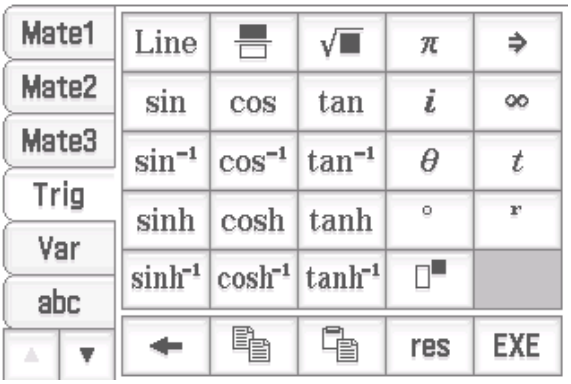


Mate2

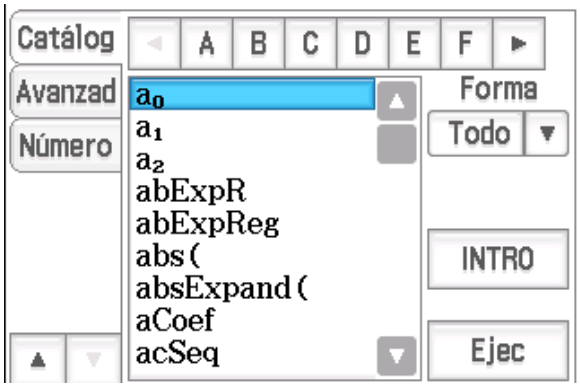


Encontramos, entre otras, las siguientes funciones:

- Función valor absoluto |■|
- Función raíz cuadrada √■
- - Función raíz n-ésima ■√□
- Función logaritmo neperiano y logaritmo en cualquier base ln log■□
- Función exponencial e■
- Función cuadrado e inverso de un número x² x⁻¹
- Funciones trigonométricas y trigonométricas inversas que aparecerán al pulsar sobre **Trig**.
- Funciones hiperbólicas e hiperbólicas inversas.

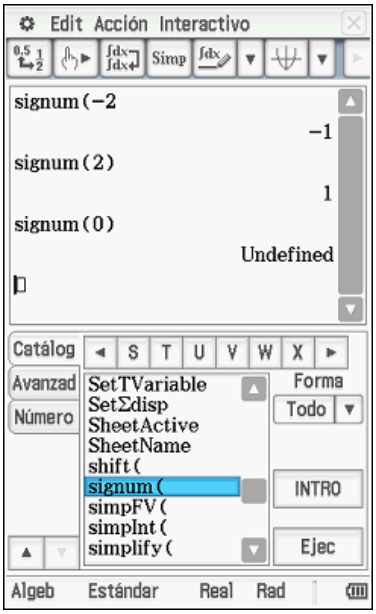


A través de ▼ se accede al catálogo que muestra todas las funciones disponibles en la calculadora, de las que algunas exponemos a continuación.

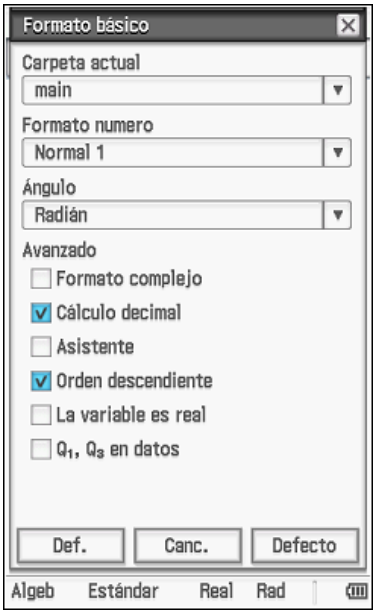


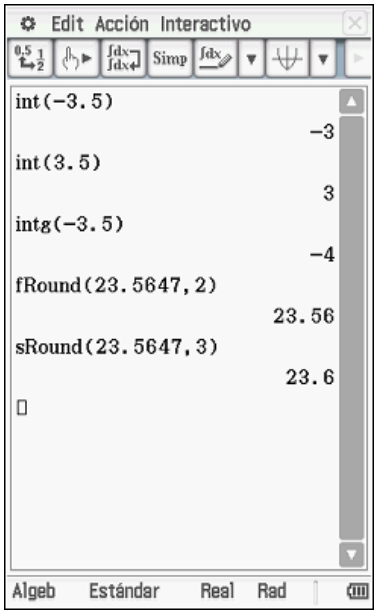
Funciones genéricas

- Valor absoluto se expresa mediante los caracteres **abs** 
- Función signo representada por **signum** devuelve 1 para argumentos positivos y –1 para valores negativos, no está definida para 0.



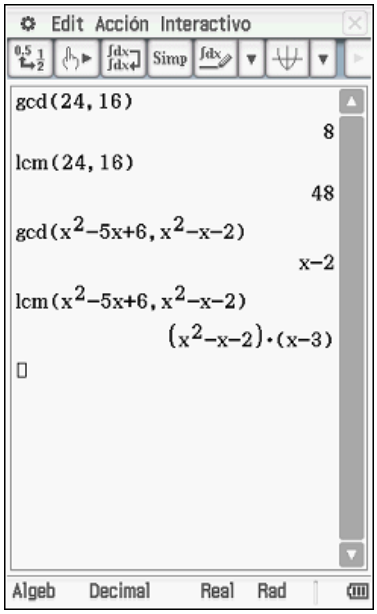
- Parte decimal y parte no decimal se obtienen a partir de las funciones **frac** e **int**, respectivamente.
- Parte entera corresponde a la función **intg**.
- Redondeo: está representado por las funciones **fRound** y **sRound** que admiten como segundo argumento el número de cifras decimales en el primer caso y el número total de cifras del número que se desea obtener en el segundo caso. Activamos previamente la opción **Cálculo decimal**.





- Funciones máximo común divisor y mínimo común múltiplo corresponden a las expresiones **gcd** y **lcm**, respectivamente.

  Pueden utilizarse con argumentos numéricos o polinómicos.

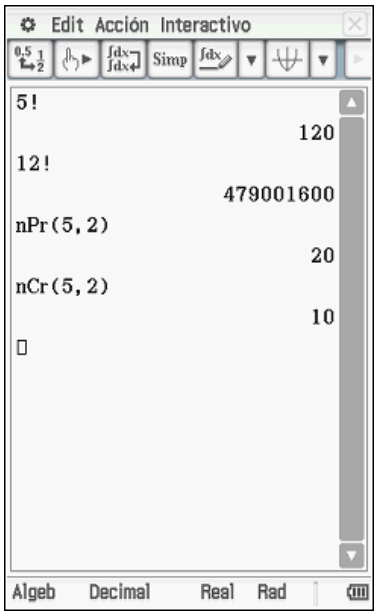


- Función módulo representada por **mod**, devuelve el resto de una división entera cuyos argumentos serán números enteros.

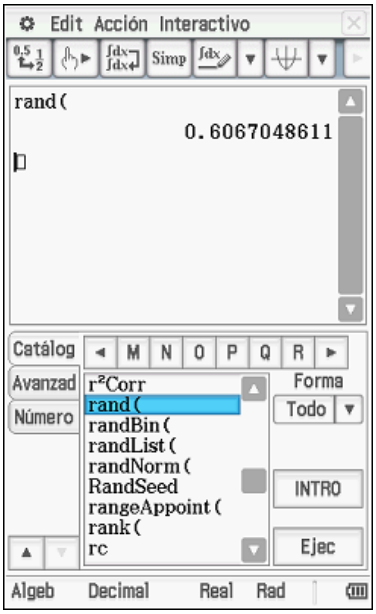
Funciones para números aleatorios y combinatoria

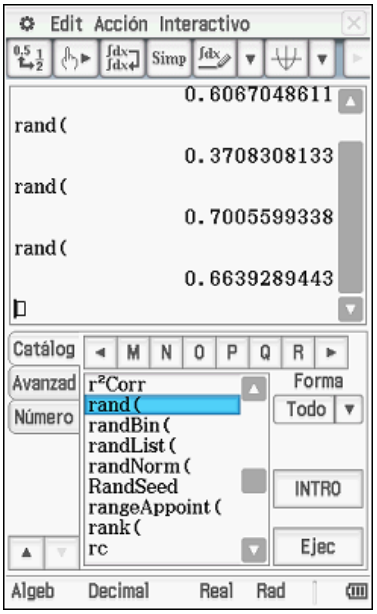
- Factorial de un número: se expresa mediante el símbolo **!**

- Variaciones de m elementos tomados de n en n: **nPr**.
- Combinaciones de m elementos tomados de n en n: **nCr**.



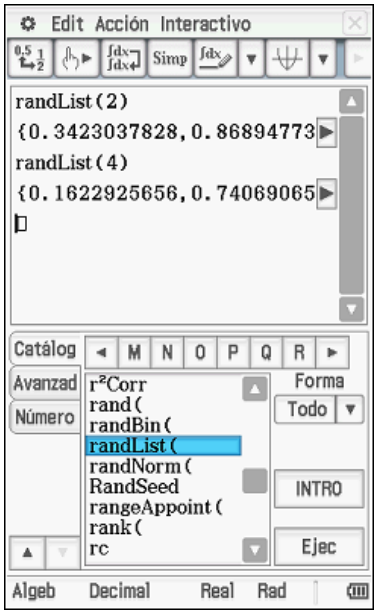
- Generar números aleatorios: para generar un número aleatorio mayor o igual que cero y menor que uno se utilizará la función **rand**. El número obtenido se expresa con diez cifras decimales.





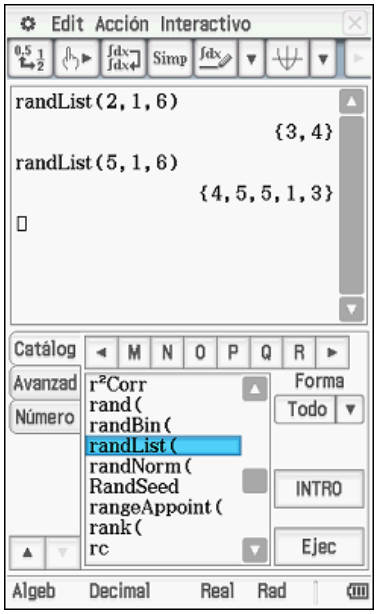
Para generar una lista con números aleatorios se utilizará la función **randList** cuya sintaxis es:

RandList(n)



Para generar una lista con n números aleatorios comprendidos entre a y b utilizaremos la misma función anterior con un los siguientes argumentos:

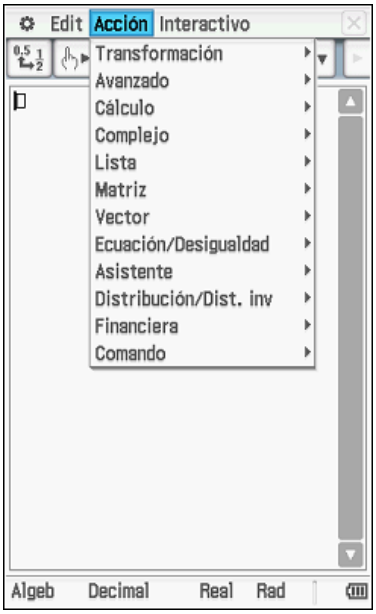
RandList(n,a,b)

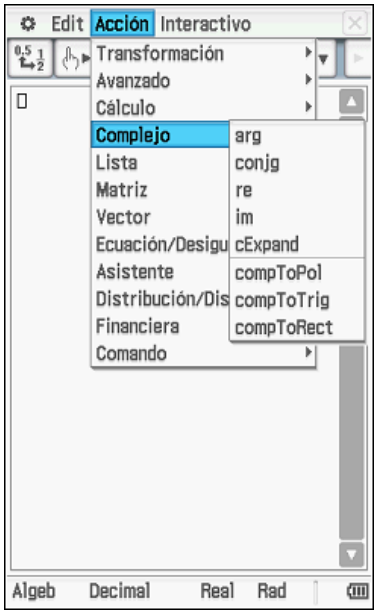


Para cambiar el valor de inicio en la relación de números aleatorios emplearemos la función **RandSeed**.

Funciones sobre números complejos

Estas funciones están disponibles en el menú **Complejo** al que se accede a través del menú **Acción**.

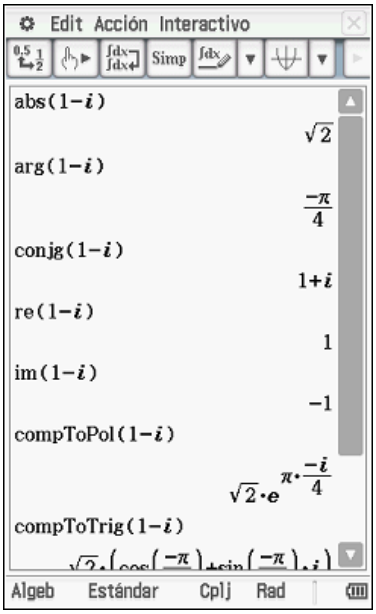




- Argumento de un complejo: **arg**
- Conjugado de un complejo: **conjg**
- Parte real de un complejo: **re**
- Parte imaginaria de un complejo: **im**
- Convertir una expresión compleja en forma binómica: **cExpand**
- Transforma un complejo de forma binómica a polar: **compToPol**
- Transforma un complejo de forma binómica a trigonométrica: **compToTrig**
- Transforma un complejo a su forma binómica: **compToRect**

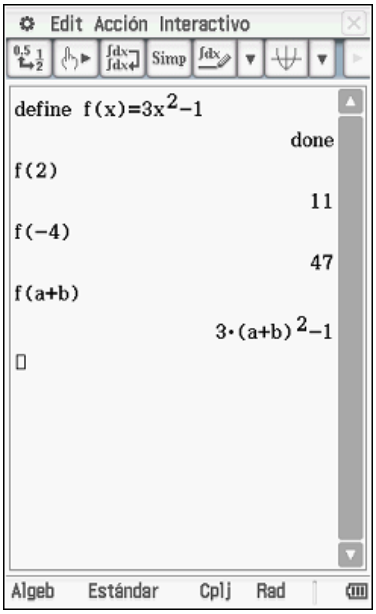
Además, disponemos de la función módulo de un complejo: **abs**

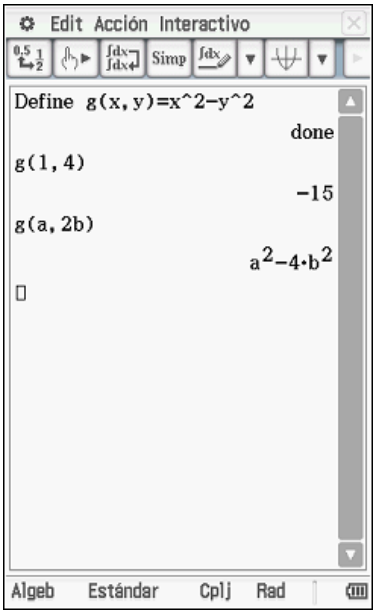
En la imagen siguiente aparecen algunos ejemplos en los que se han utilizado las funciones anteriores.



Funciones definidas por el usuario

La definición de una función propia se realiza utilizando el comando **Define**.





VARIABLES Y CARPETAS

La calculadora **Classpad** permite guardar cadenas de texto como variables para su utilización posterior.

Las variables se almacenan en *carpetas*.

Hay varios tipos de carpetas, unas propias del sistema y otras definidas por el usuario.

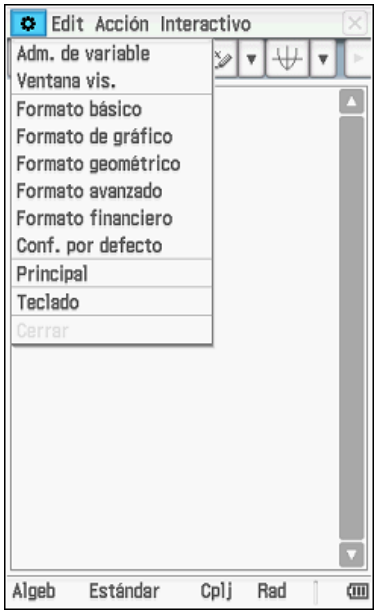
Los distintos tipos de carpetas son:

- Carpeta **sistema**: utilizada para guardar las variables del sistema utilizadas por las distintas aplicaciones de la calculadora.
- Carpeta **librería**: propia del sistema, se puede utilizar para guardar algunas variables creadas por el usuario.
- Carpeta **principal**: es una carpeta reservada por el sistema, al igual que las dos anteriores, es la carpeta por defecto en la que se guardarán todas las variables creadas por el usuario hasta que se indique una nueva carpeta.
- Carpetas de **usuario**: como su nombre indica serán las que el usuario vaya creando para almacenar sus propias variables.

La carpeta por defecto o carpeta actual es la denominada **principal** en la que se almacenarán todas las variables hasta que el usuario cree sus propias carpetas.

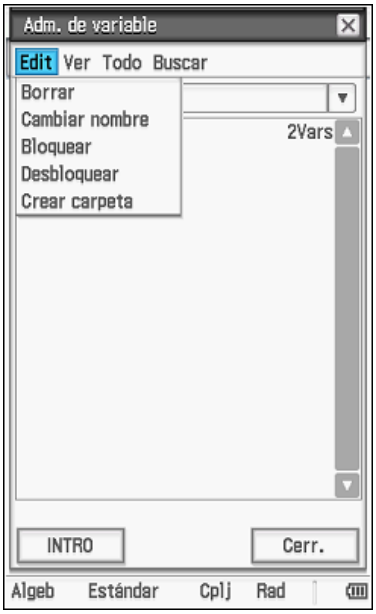
Los pasos para crear una carpeta en la aplicación **Principal** (**Main**) o en cualquier aplicación son:

- Pulse sobre la opción **Adm. de variable**.



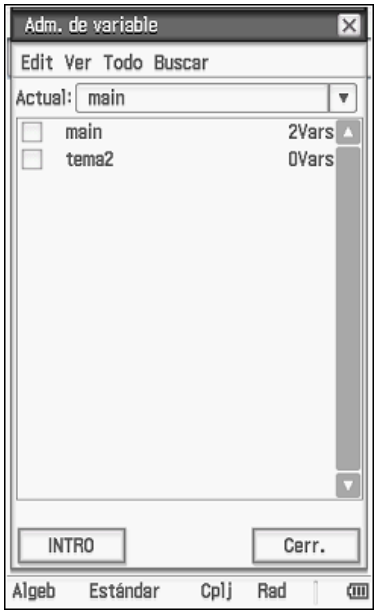
Aparecerá la pantalla con la carpeta actual (**main**).

- Seleccione la opción **Crear carpeta** en el menú **Edit**.

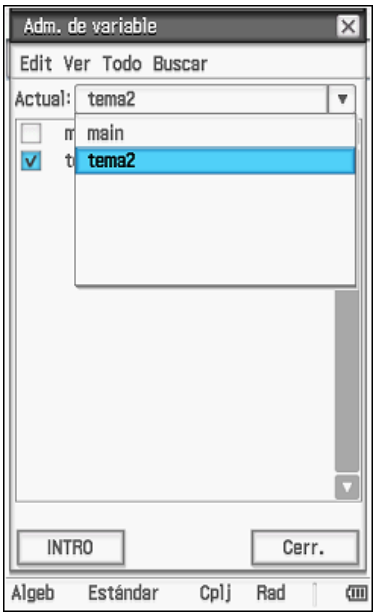


- Aparece una nueva ventana en la que es necesario introducir el nombre de la carpeta que se desea crear.

Una vez introducido el nombre de la carpeta, al pulsar el botón **Acep.**, aparecerá la pantalla siguiente:



Seleccionaremos la carpeta que acabamos de crear como carpeta actual para almacenar las variables que a continuación, se vayan creando.



Como reglas para asignar un nombre a una carpeta hay que tener en cuenta las siguientes:

- Los nombres tendrán un máximo de ocho caracteres.
- Podrán utilizarse caracteres en mayúsculas o minúsculas sin acentuar, números y subrayado.
- Los nombres distinguen entre mayúsculas y minúsculas.
- No es posible utilizar palabras reservadas por la calculadora como variables del sistema.

Las variables en la **Classpad** se pueden agrupar en tres tipos:

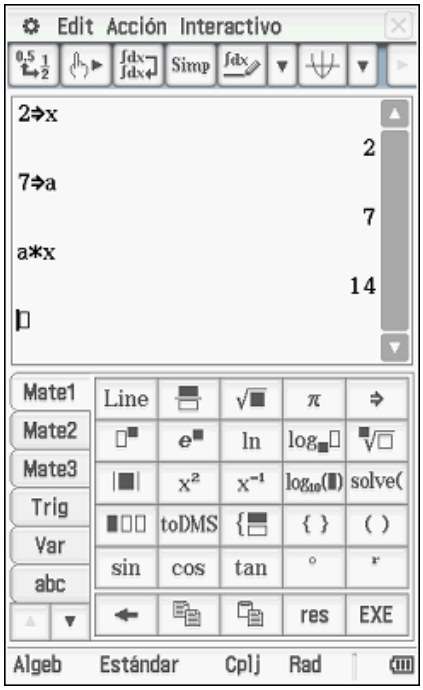
- *Variables generales* creadas por el usuario que se almacenarán, salvo que se indique lo contrario, en la carpeta actual.
- *Variables del sistema* utilizadas por las distintas aplicaciones de la calculadora, están almacenadas en la carpeta sistema (system).
- *Variables locales* creadas de manera temporal por una función o por un programa. Estas variables se borran una vez ejecutado el programa o realizada la función que la ha definido.

Las reglas para asignar nombres a las variables son identicas a las indicadas anteriormente para la creación de carpetas.

En los teclados aparece la opción **Var** para acceder a la relación de caracteres para asignar nombres a las variables, aunque es evidente que al trabajar con el **Classpad Manager** los nombres se pueden obtener a través del teclado del ordenador.

Para asignar un valor o una expresión a una variable se utilizará el símbolo ⇒.

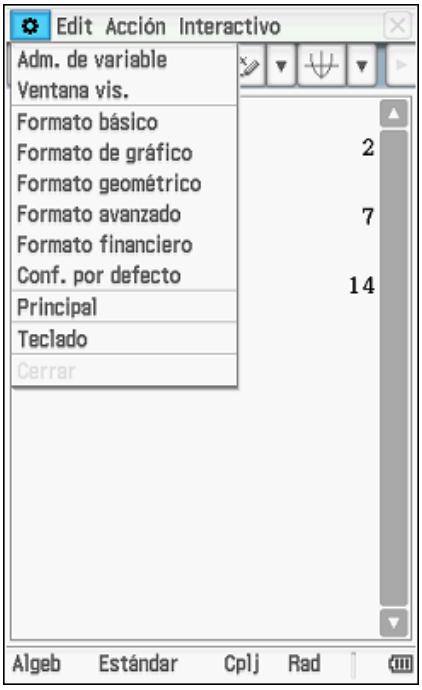
Por ejemplo, escribiremos **2** ⇒ **x** para introducir **x = 2**.

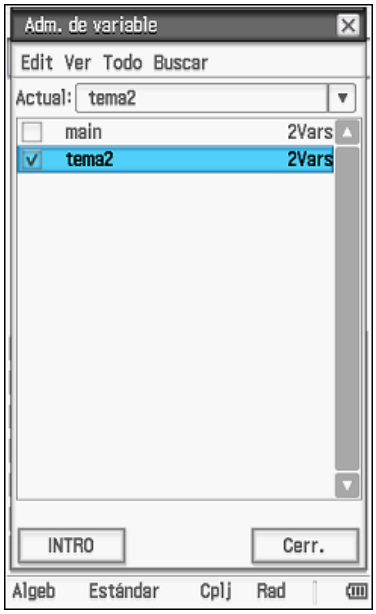


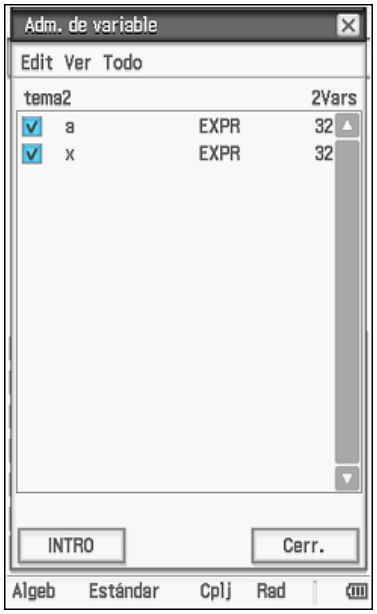
Recordemos que las variables creadas se guardan en la carpeta actual, en nuestro caso la carpeta es *tema2*.

Para cambiar el valor asignado a una variable basta con asignarle un nuevo valor y para borrar el valor asignado es necesario acceder a las opciones disponibles en **Variable Manager**.

Al admministrador de variable se accede de manera directa al pusar sobre

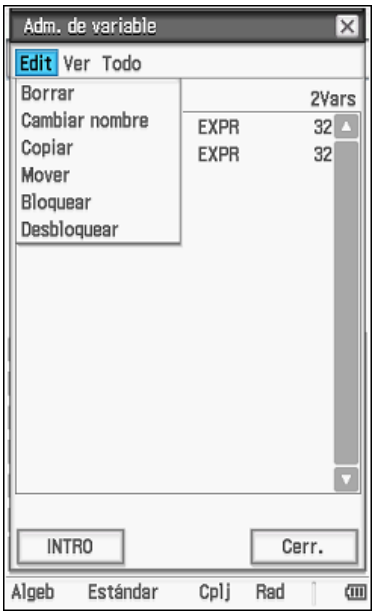


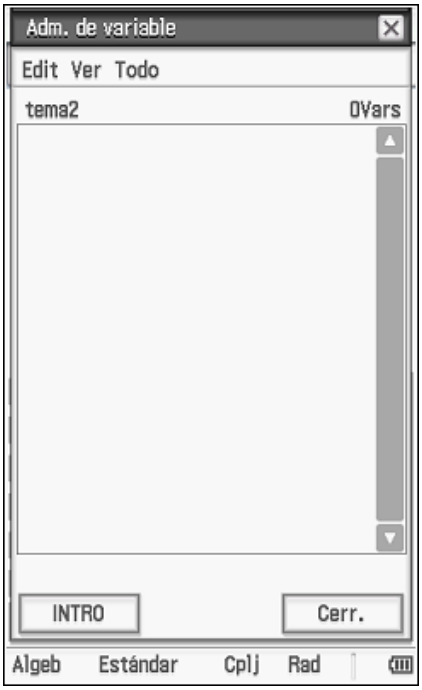




Para que aparezcan las variables de una carpeta es necesario hacer un doble clic en el nombre de la carpeta.

Una vez marcadas las variables que se desean borrar se accede a la opción **Borrar** disponible en el menú **Edit**.





ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Halla el m.c.d. y el m.c.m. de 2376150 y 432075.

2. Halla las razones trigonométricas del ángulo de 15°.

3. Calcula las razones trigonométricas del ángulo de $\frac{5\pi}{4}$ radianes.

4. Halla un número que al dividirlo por 18, 26 y 45 de 5 de resto.

5. Calcula 8!, $V_{7,3}$ y $C_{9,2}$

6. Genera una lista de 10 números naturales aleatorios comprendidos entre 1 y 10.

7. .Halla la parte real e imaginaria del complejo $(1+i)^{1-i}$.

8. Calcula el módulo y el argumento del complejo $(2-i)(3-2i)-\frac{2}{3-5i}$.

9. Halla el m.c.d y el m.c.m. de los polinomios:

$$3x^3-2x^2-12x+8 \qquad\qquad x^3+2x^2+x+2$$

Tema 3.

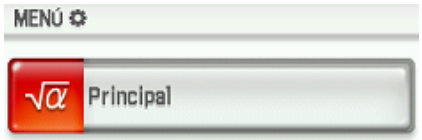
POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS. APLICACIONES AL CÁLCULO

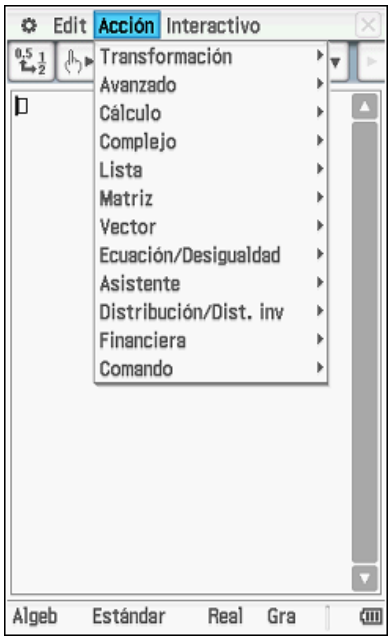
- Introducción.
- Simplificar expresiones.
- Desarrollar expresiones.
- Factorizar expresiones.
- Otras funciones del menú Transformación.
- Aplicaciones al cálculo.
- Cálculo diferencial.
- Cálculo integral.
- Cálculo de límites.
- Suma y producto de series.
- Polinomios de Taylor.
- Otras funciones del menú Cálculo.
- Actividades propuestas.

INTRODUCCIÓN

Hasta ahora, en los dos temas anteriores la mayoría de las operaciones las hemos realizado sobre argumentos numéricos; por lo que ahora expondremos los diferentes comandos disponibles en la calculadora para abordar la simplificación de expresiones algebraicas y las funciones disponibles para trabajar con polinomios.

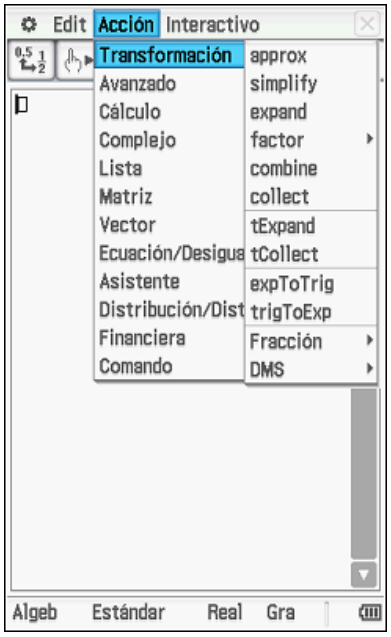
A estos comandos y funciones se accede a través del menú **Acción** que encontramos en el menú principal.





SIMPLIFICAR EXPRESIONES

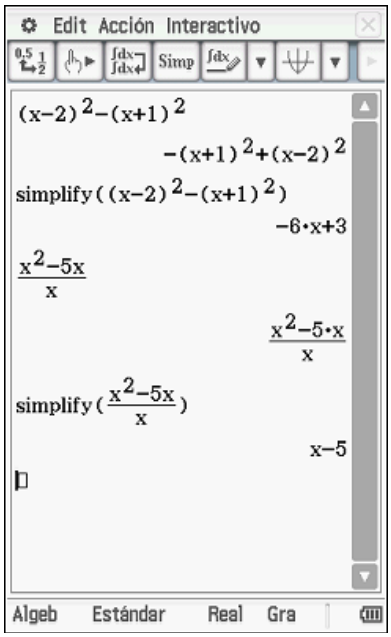
Una vez abierto el menú **Acción** seleccionamos **Transformación** para acceder al siguiente menú:



Una de las primeras funciones que encontramos es **simplify** cuyo significado es evidente, se utilizará para simplificar una expresión.

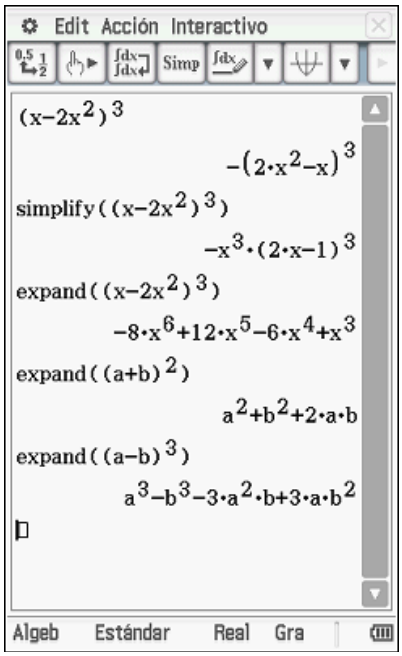
Esta función será necesaria cuando no se obtiene una expresión más sencilla

en la simplificación automática como por ejemplo:



DESARROLLAR EXPRESIONES

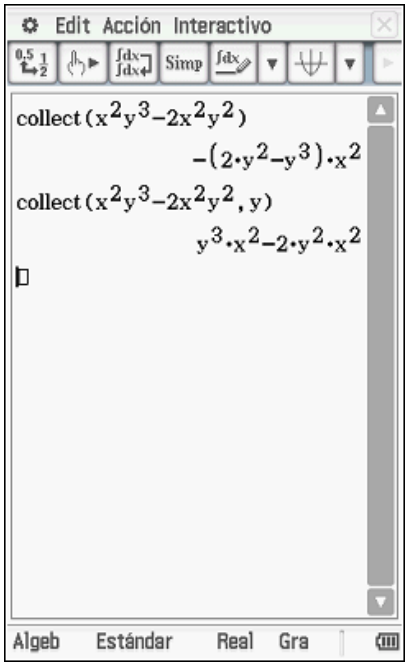
Para desarrollar una expresión se utilizará la función **expand** disponible en el mismo menú anterior. En el siguiente ejemplo se ve la diferencia entre definir la function, simplificarla (**simplify**) o desarrollarla (**expand**)



Para ordenar una expresión con respecto a una variable se utilizará la función **collect**.

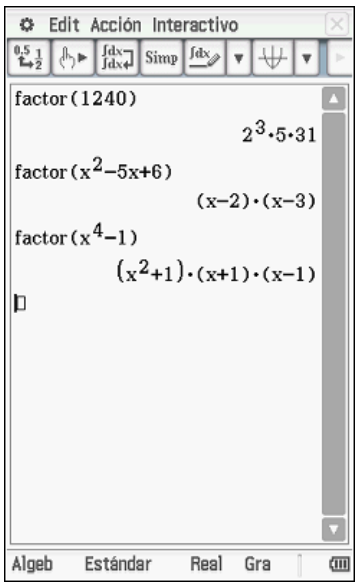
La sintaxis de esta función es: **collect(expresión, variable)**

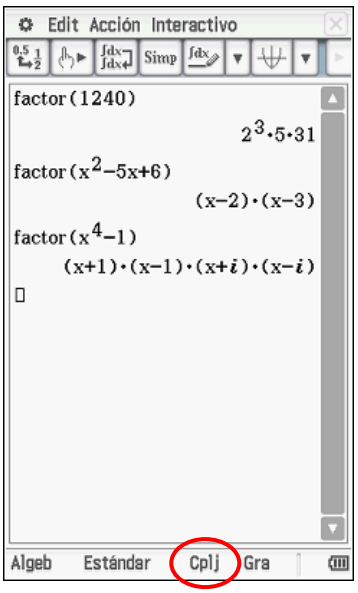
Cuando no se indica el segundo argumento tomará x como valor por defecto.



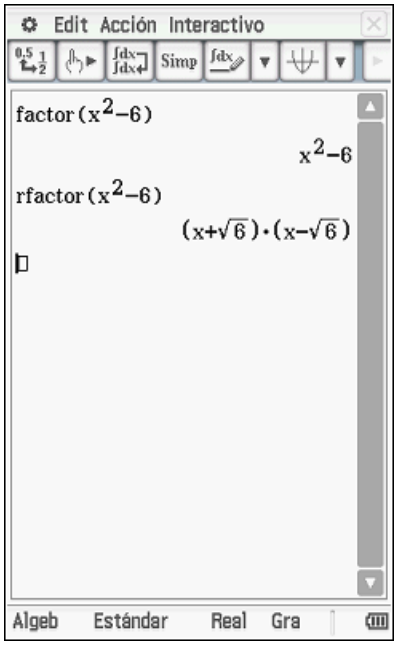
FACTORIZAR EXPRESIONES

Para factorizar un número en factores primos o una expresión se utilizará la función **factor**. Si queremos que nos de también las raíces complejas debemos cambiar la configuración a modo **Cplj**

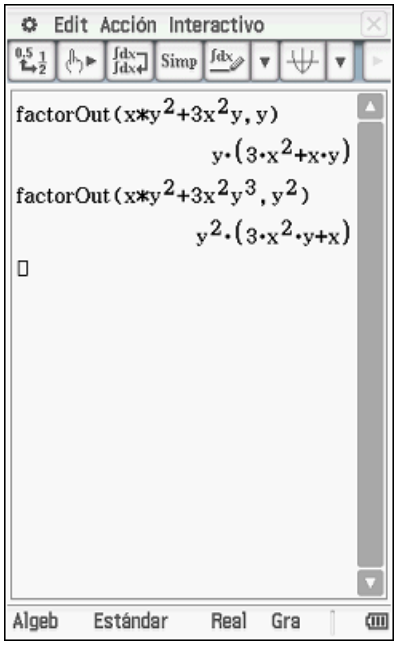




La función **rFactor** disponible en el menú **Transformación** permite factorizar una expresión hasta sus raíces reales si las tiene.



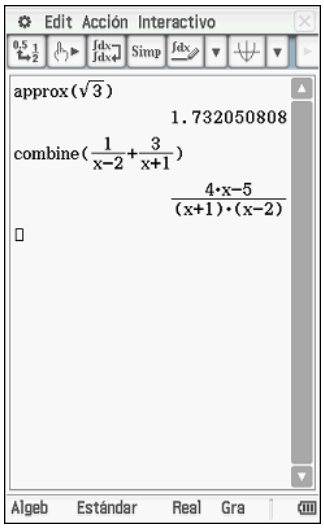
Además, la función **factorOut** permite incluir un segundo argumento para indicar el factor que se desea sacar factor común



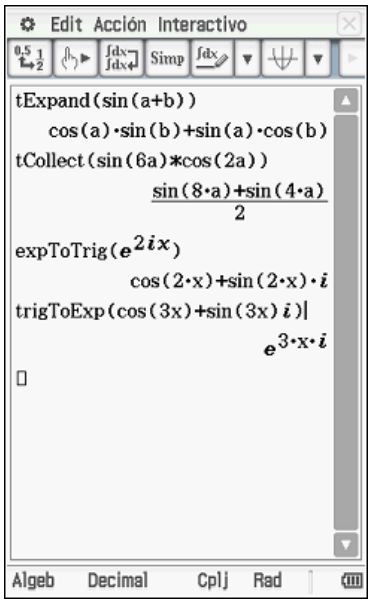
OTRAS FUNCIONES DEL MENÚ TRANSFORMACIÓN

Además, en este menú **Transformación** encontramos las siguientes funciones:

- **approx**: transforma una expresión en una aproximación numérica.
- **combine**: reduce a común denominador una suma de fracciones.

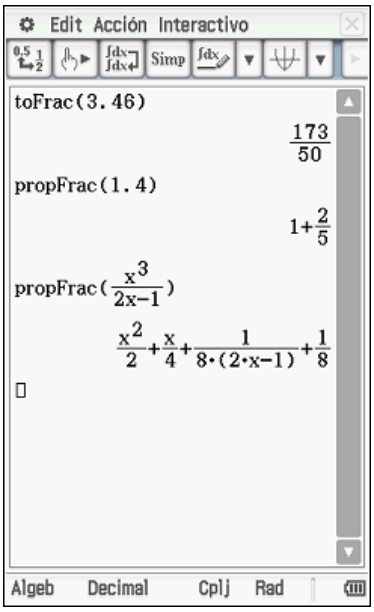


- **tExpand**: desarrolla una expresión trigonométrica utilizando las fórmulas de suma y diferencia.
- **tCollect**: transforma productos en sumas en una expresión trigonométrica.
- **expToTrig**: convierte una expresión exponencial en forma trigonométrica o hiperbólica.
- **triToExp**: realiza la conversión inversa a la anterior.



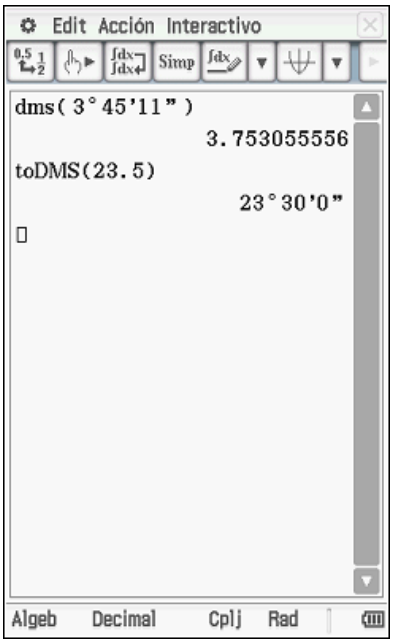
Tambíen encontramos en este menu las funciones para transformar fracciones (**Fracción**)

- **toFracc**: transforma un valor decimal en su expresión fraccionaria.
- **propFrac**: transforma un valor decimal en su fracción propia equivalente. Puede aplicarse sobre una fracción algebraica.



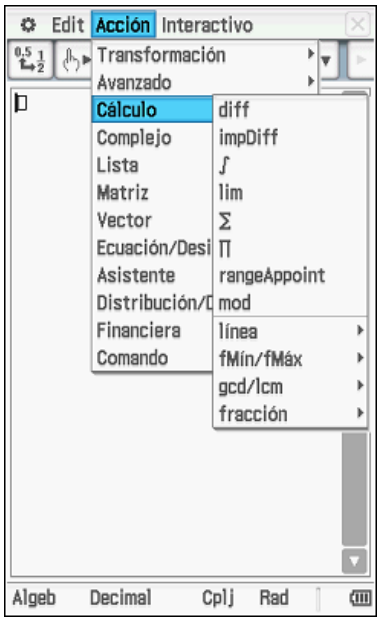
Y funciones para transformar ángulos en las distintas unidades:

- **dms** para pasar del sistema sexagesimal (grados, minutes y segundos), al sistema decimal
- **toDMS** para realizar la conversión inversa.



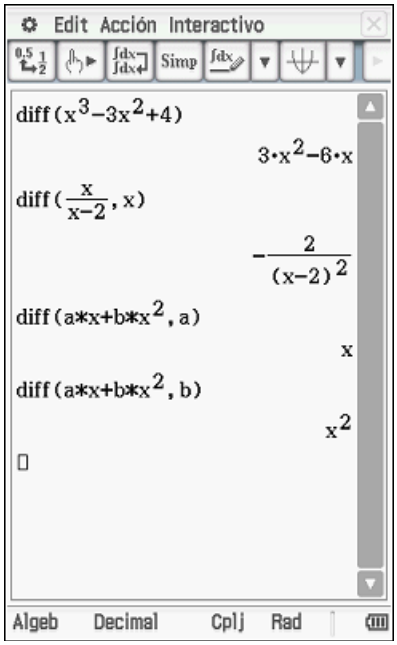
APLICACIONES AL CÁLCULO

Derivadas, límites, integrales, sumas de series y otras aplicaciones de cálculo simbólico se realizarán a través de las funciones disponibles en el menú **Cálculo** disponible en la opción **Acción** del menú principal.



CÁLCULO DIFERENCIAL

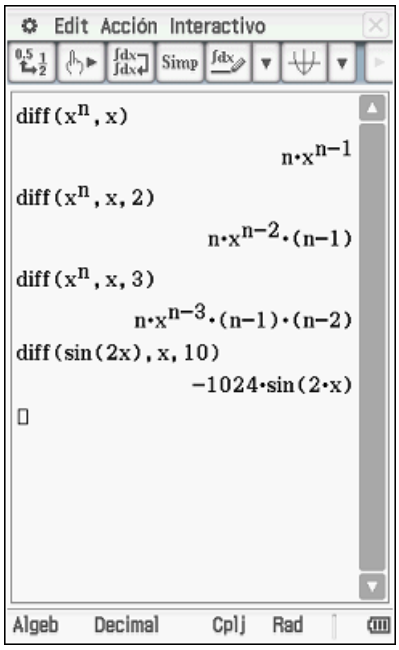
Para calcular la función derivada de una función f se obtiene a partir de la función **diff**, cuya sintaxis es: **diff(función, variable).**



Como se observa en la imagen anterior, al omitir la variable, la calculadora asume x como valor por defecto.

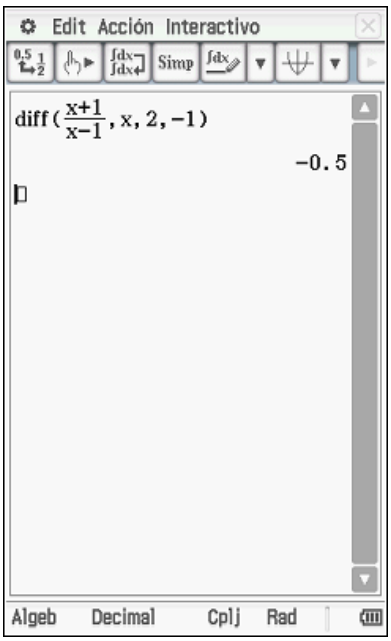
Esta misma función se utilizará para obtener derivadas de una función de orden mayor que 1.

diff(función, variable, orden)

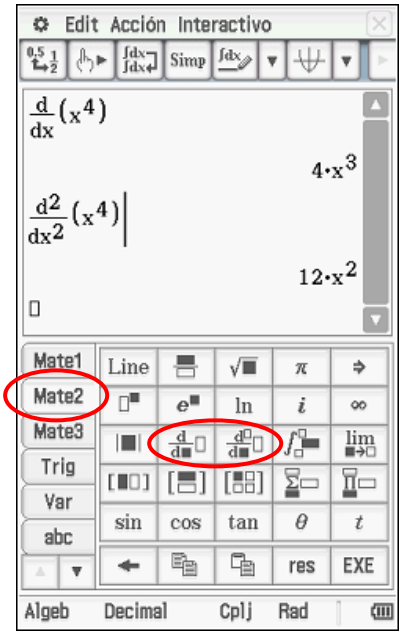


Si se añade un nuevo argumento, se obtendrá el valor de la derivada en el punto indicado:

diff(función, variable, orden, punto)

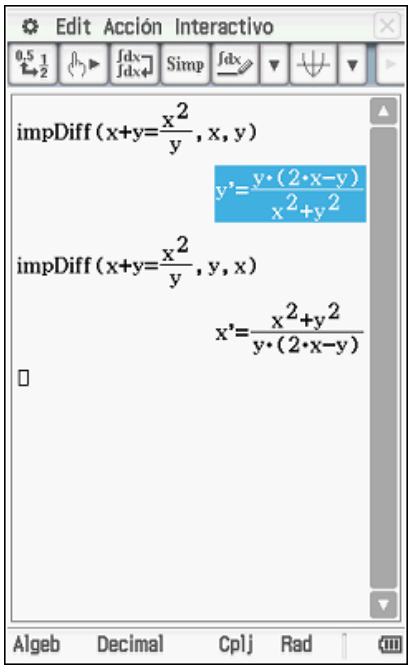


Quizás resulte más sencillo utilizar las opciones que ofrece **CÁLC** el teclado **2D** para escribir la función y argumentos anteriores.



La función **impDiff** permite calcular la diferencial de una ecuación o una expresión implícita con respecto a la variable indicada.

impDiff(expression, variable independiente, variable dependiente)



CÁLCULO INTEGRAL

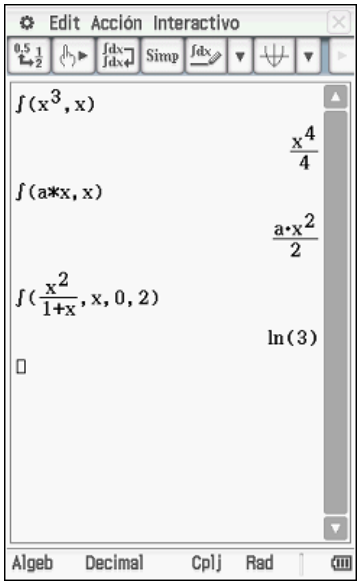
Tanto para calcular integrales indefinidas como definidas utilizaremos la función $\int$ cuya sintaxis para calcular una integral indefinida es:

$$\int \textbf{(función, variable)}$$

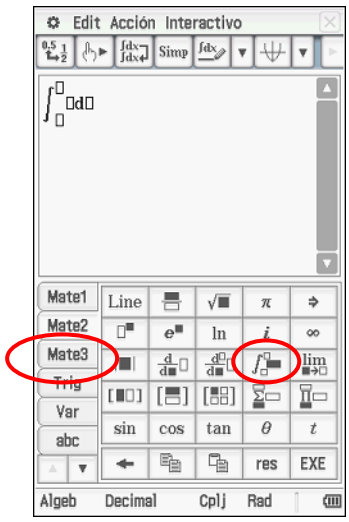
Y para hallar una integral definida sera:

$$\int \textbf{(función, variable, extremo inferior, extremo superior)}$$

Además, se podrá incluir un argumento más para indicar el error admitido al calcular una integral definida.



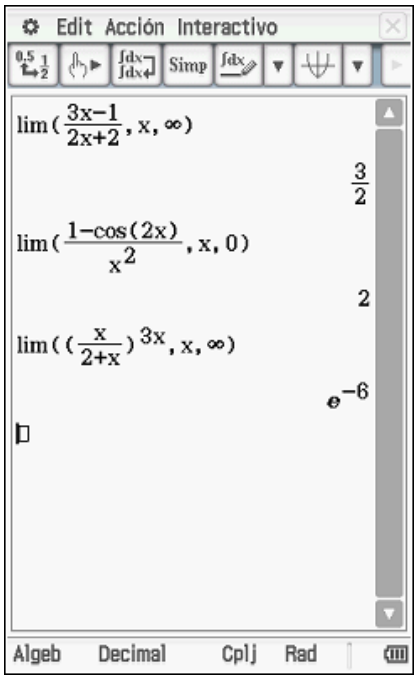
Estas opciones también están disponibles en el teclado **2D**.



CÁLCULO DE LÍMITES

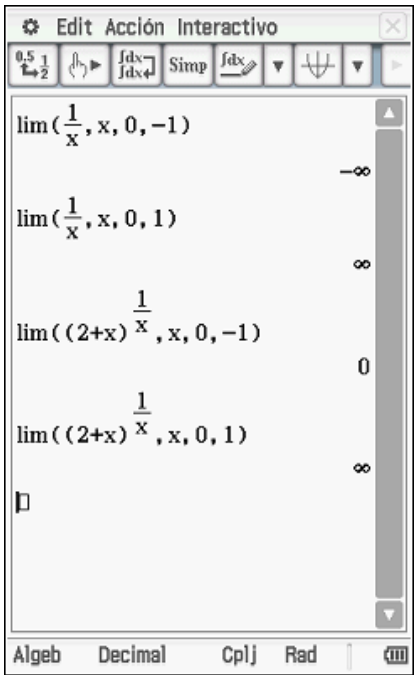
El cálculo de límites se realiza a través de la función **lim** cuya sintaxis es:

lim(función, variable, valor)

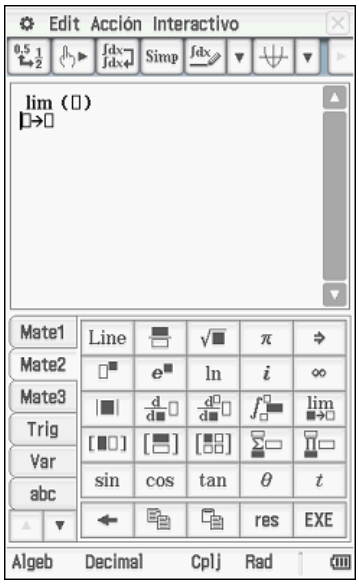


Para calcular límites laterales se utilizará la función anterior, incluyendo un nuevo argumento (**1** para límite por la derecha y **–1** para límite por la izquierda)

lim(función, variable, valor, 1) **lim(función, variable, valor, -1)**



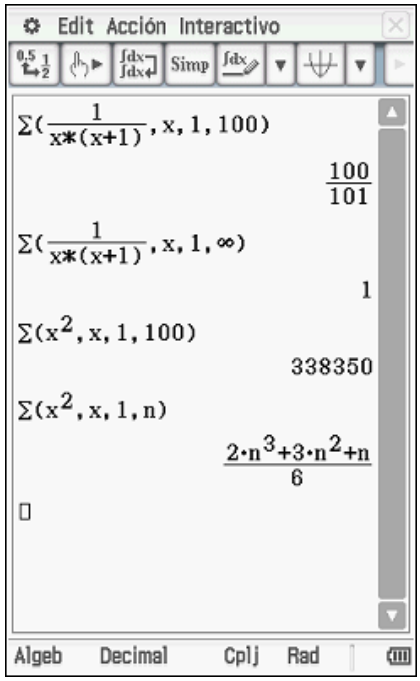
También podemos encontrar esta función en el teclado **2D**.

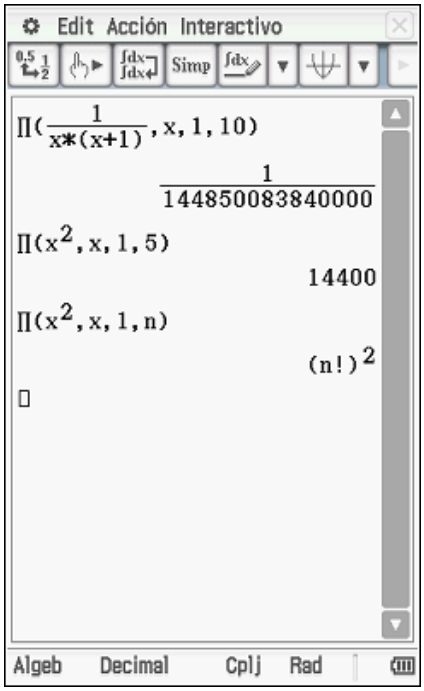


SUMA Y PRODUCTO DE SERIES

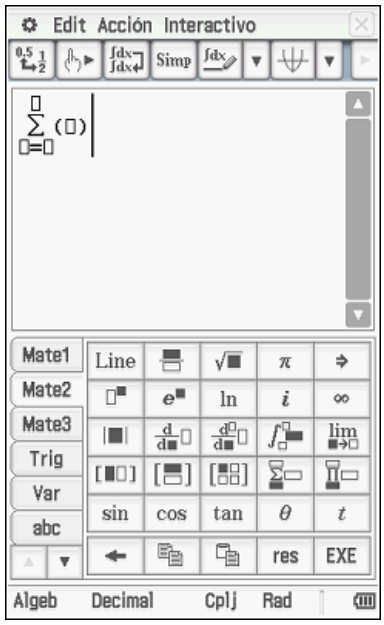
Las funciones $\sum$ y $\prod$ se utilizarán para calcular la suma y el producto, respectivamente de una expresión para los valores indicados.

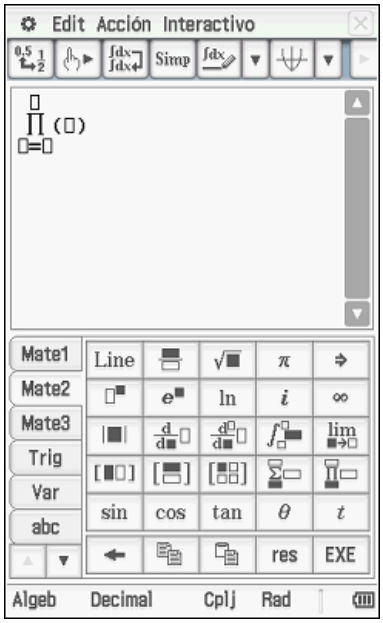
La sintaxis es similar en las dos funciones ya que admiten como argumentos: la expresión de la función, la variable, el valor inicial y el valor final.





También podemos encontrar estas funciones en el teclado **2D**.





OTRAS FUNCIONES DEL MENÚ CÁLCULO

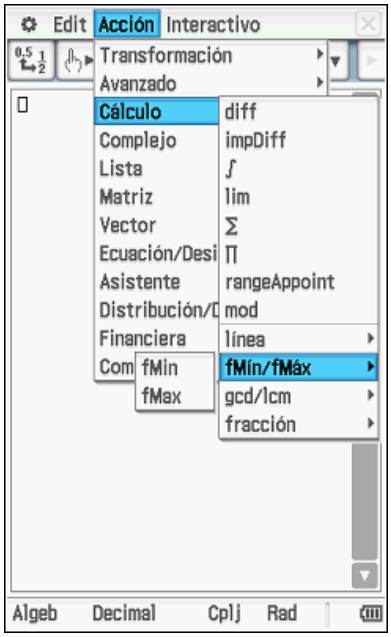
Además, en este menú encontramos las siguientes funciones que relacionamos de manera breve:

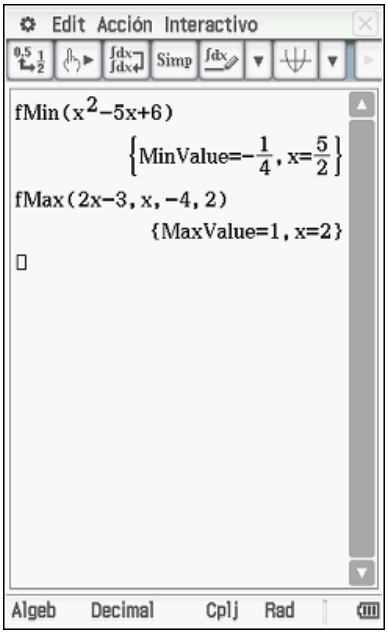
- **fMin/fMax**: calculan el mínimo y el máximo, respectivamente de una función en un intervalo.

  La sintaxis en ambos casos tiene como argumentos: la función, la variable y los extremos del intervalo.

  Si se omiten los valores del intervalo los cálculos se realizarán en (-∞, +∞).

  Estas funciones admiten como último argumento para determinar la precisión en el cálculo (valor entre 1 y 9).





- **tanLine**: devuelve la expresión de la recta tangente a una función f(x) en un punto x=a.

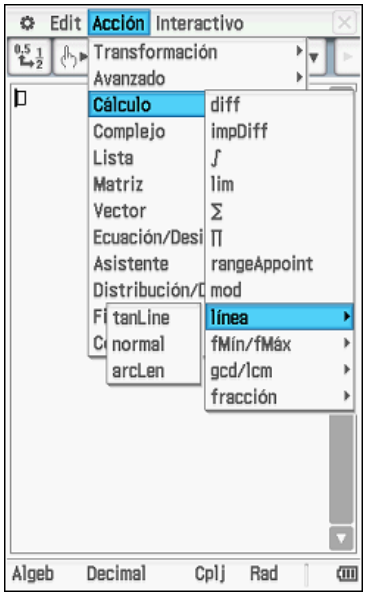
  tanLine(f(x),x,a)

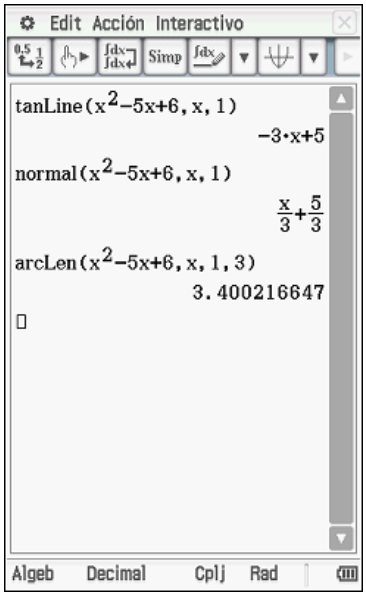
- **normal**: devuelve la expresión de la recta normal a una función f(x) en un punto x=a.

  normal(f(x),x,a)

- **arcLen**: halla la longitud del arco de una función f(x) en un intervalo [a, b].

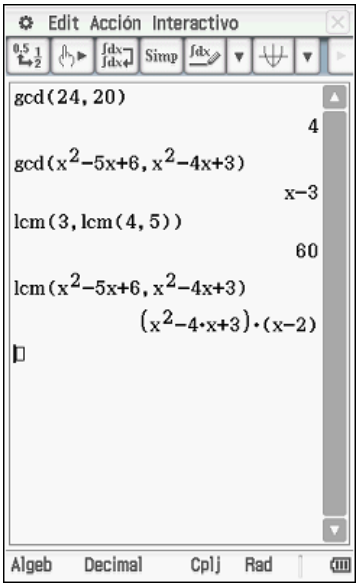
  arcLen(f(x), x, a, b)

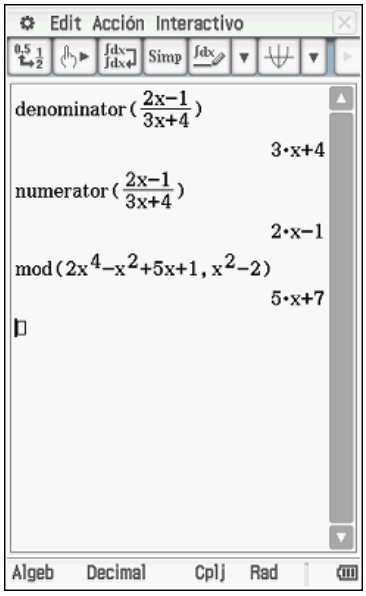




Además se encuentran las siguientes funciones:

- Las ordenes **gcd/lcm,** hacen el Máximo común divisor o Mínimo común múltiplo de dos números o dos polinomios. Si queremos hacerlo de más de dos expresiones debemos encadenar las ordenes.
- En la pestaña **fracción,** encontramos **denominator/numerator** que nos devuelve el numerador o el denominador de una fracción
- La orden **mod**, nos devuelve el resto de una división

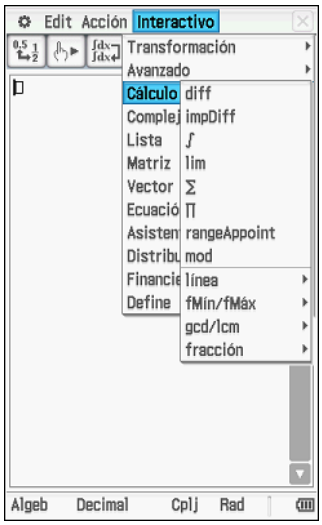




Para terminar, indicaremos que la función **rangeAppoint** devuelve una expresión o valor que satisface las condiciones indicadas en un intervalo [a, b], su sintaxis es:

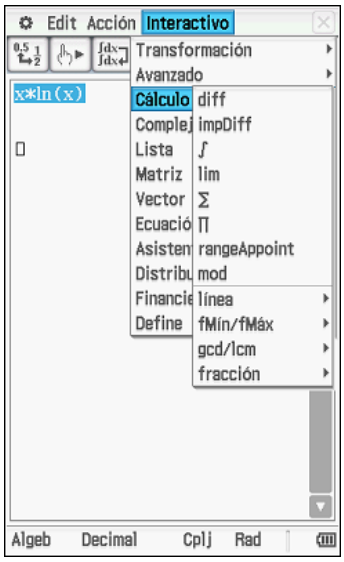
rangeAppoint({condición$_1$, condición$_2$, ...}, a, b)

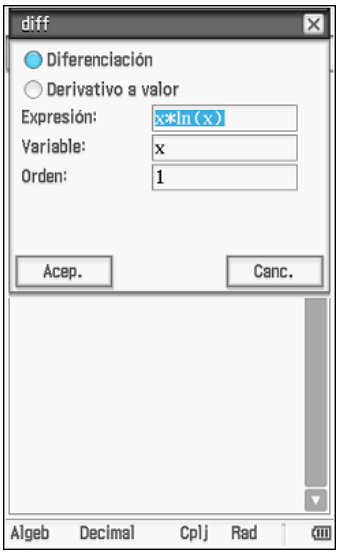
En la opción **Interactivo** encontramos un menú con las mismas opciones que han quedado expuestas anteriormente como podemos comprobar en la imagen siguiente:

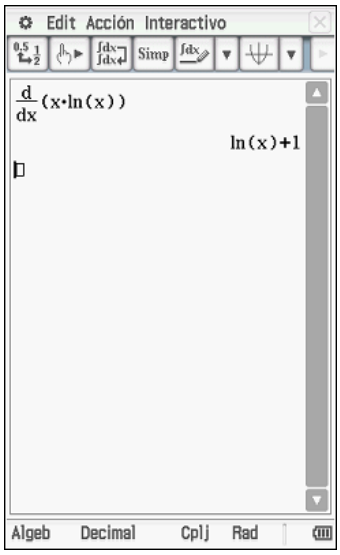


La diferencia de las opciones de este menú con respecto a las que contiene el menú **Acción** radica en que para aplicar una función del menú **Interactivo** previamente es necesario seleccionar la expresión o el valor sobre el que se aplicará.

Por ejemplo para calcular la función derivada de una expresión contenida en el área de trabajo, comenzaremos seleccionando la expresión pulsando a continuación sobre la opción **diff** del menú **Interactivo**.

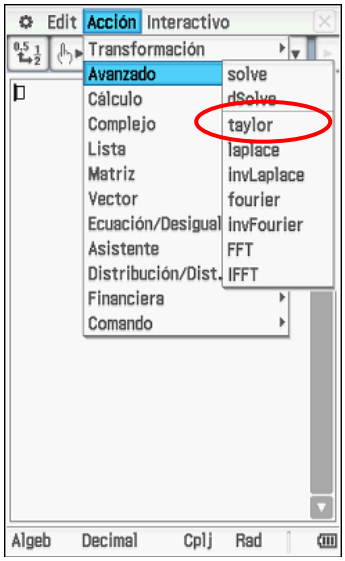






OPCIONES DEL MENÚ AVANZADO

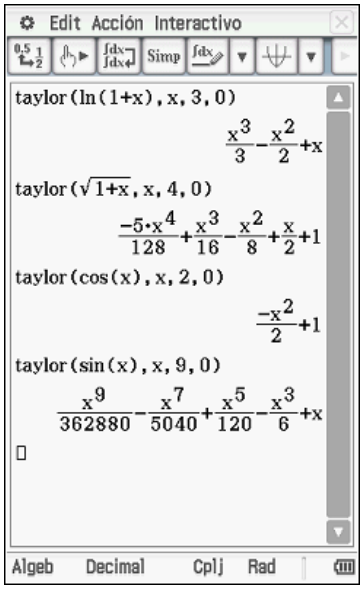
Tanto en menú Acción como en Interactivo encontramos Avanzado que ofrece distintas opciones entre las que encontramos el cálculo de los polinomios de Taylor de una función.



Para hallar los polinomios de Taylor de grado n de una función f(x) con respecto a una variable x en el punto x=a, emplearemos la función **taylor**, disponible en el menú **Avanzado**.

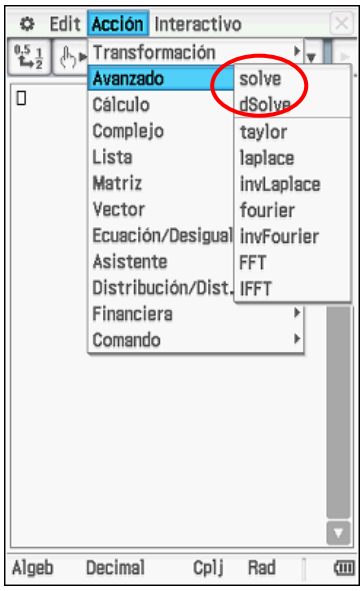
La sintaxis de esta función es:

taylor(f(x), x, n, a)



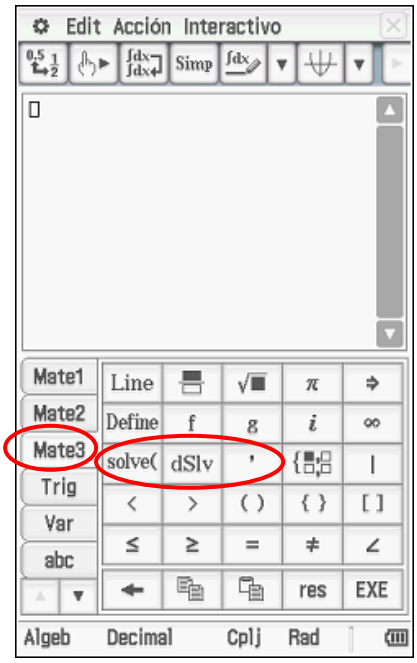
En este menú encontramos opciones ya conocidas como **solve** y también **dSolve** para resolver ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales.

A través de **dSolve** se podrán resolver ecuaciones diferenciales hasta tercer orden y sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

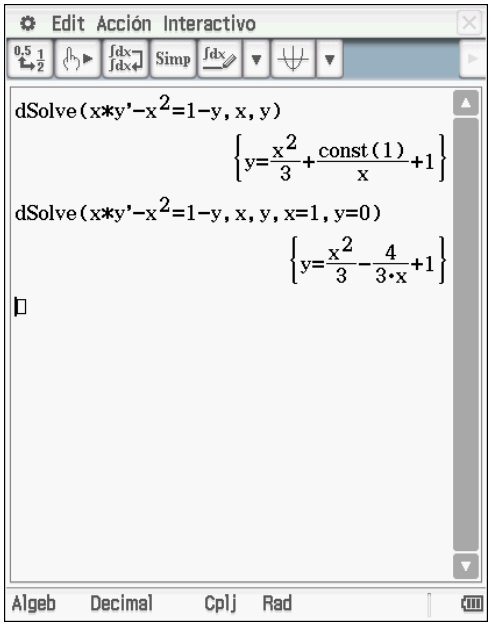


La orden **dSolve** puede utilizarse sin valores iniciales como ocurre en el ejemplo siguiente o introduciendo como argumentos los valores iniciales.

Éstas órdenes asi como el símbolo ´ para indicar la derivada también se pueden obtener a partir del teclado **Mate3**



Como por ejemplo:



También, encontramos funciones para obtener la transformada de Laplace o de Fourier así como sus inversas.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Simplifica la expresión: $\dfrac{1-\dfrac{x}{x-1}}{1+\dfrac{x}{x-1}}$

2. Calcula: $\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{3}{x^2-2x}$

3. Simplifica: $\dfrac{2x^3+4x^2+2x}{6x^3-6x}$

4. Desarrolla la expresión: $\left(3x^3-\dfrac{2}{x^2}\right)^5$

5. Determina las raíces enteras de los polinomios:

   a. $P(x)=x^3+2x^2+x+2$

   b. $Q(x)=x^4+4x^3-25x^2-16x+84$

   c. $R(x)=6x^5+25x^4-93x^3-404x^2-48x+64$

6. Factoriza el polinomio: $P(x)=2x^5+11x^4+2x^3-51x^2-14x+60$

7. Halla la descomposición en factores primos de 123456 y de 15!

8. Halla las derivadas de las funciones:

   $a)\, f(x)=\dfrac{senx}{1+\cos x}$

   $b)\, g(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)$

   $c)\, h(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

   $d)\, i(x)=1+tg\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

9. Calcula las derivadas f^3 y g^{20}

   $f(x)=\sqrt{1+x^2}$

   $g(x)=x^2 senx$

10. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$\int (x-1)\cos x dx$ e) $\int \frac{x^3+1}{x-5} dx$

$b) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$ f) $\int \frac{\text{senx}}{1+\text{senx}} dx$

$c) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ g) $\int x^2 \ln x dx$

$d) \int \frac{2x+3}{x^2+2x+1} dx$ h) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx$

11. Halla las siguientes integrales definidas:

$a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$

$b) \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$

$c) \int_0^2 \frac{2x-1}{2x+1} dx$

12. Calcula los siguientes límites:

$a) \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{1+2\ln x}$

$b) \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{tgx-1}{sen4x}$

$c) \lim_{x \to \infty} \frac{\ln^2 x}{x^2}$

13. Halla los límites cuando x tiende a cero por la derecha y por la izquierda de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1}{2-2^{\frac{1}{x}}}$$

14. Halla los polinomios de Taylor de grados 2, 4 y 8 de la función f(x) en x=0.

$$f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$$

15. Hallar la suma de la serie numérica:

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+...$$

Tema 4.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

- Introducción.
- Representación gráfica de una función.
- La aplicación gráficos y tablas.
- Ajuste de la ventana para la representación gráfica.
- Determinar los elementos de una función.
- Almacenar el contenido de la aplicación gráficos y tablas.
- Representación de otros tipos de funciones.
- Actividades propuestas.

INTRODUCCIÓN

En este tema expondremos las distintas opciones que la calculadora ofrece para la representación de funciones en el plano, así como las tareas que pueden realizarse para determinar, a partir de la gráfica, los elementos característicos de una función.

Existen otras opciones que dejaremos para temas posteriores como son las opciones con tablas, el estudio de cónicas, de sucesiones o la representación de funciones en el espacio.

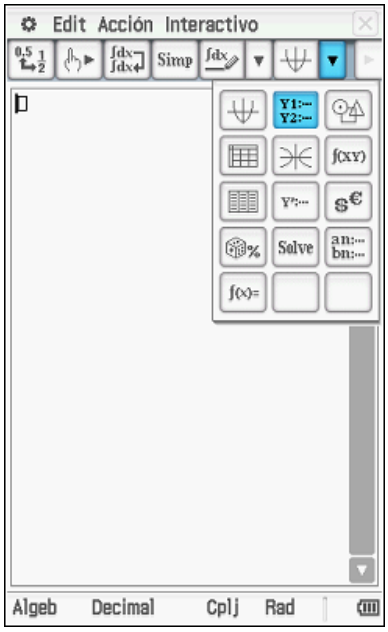
REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

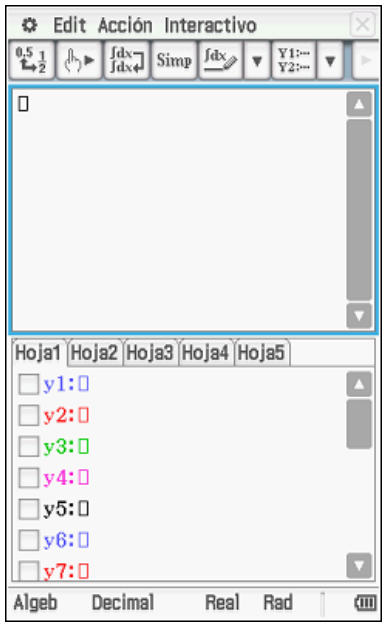
La representación gráfica de una función **y=f(x)** se puede realizar a través de distintas opciones disponibles en la calculadora.

Como hasta ahora hemos realizado todas las operaciones desde la opción **Main** o **Principal** del menú principal, representaremos la función desde dicho menú.

Al pulsar sobre el icono 

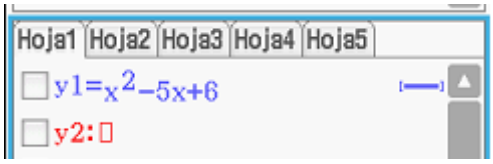
se accede al editor de funciones.





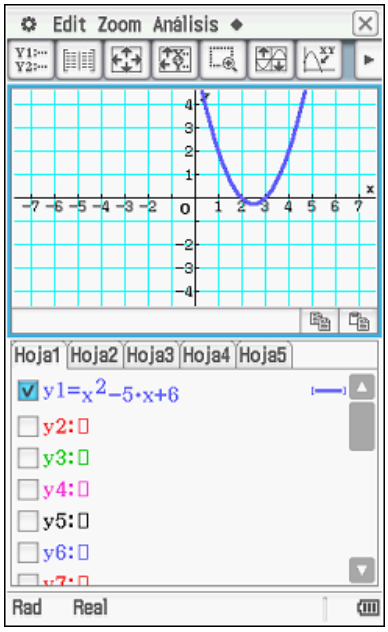
Introducimos la expresión de la función que se desea representar.

Si observamos la parte superior del editor de funciones comprobamos que hay distintas Hojas numeradas del 1 al 5. En cada una de ellas se podrán introducir hasta 20 funciones.

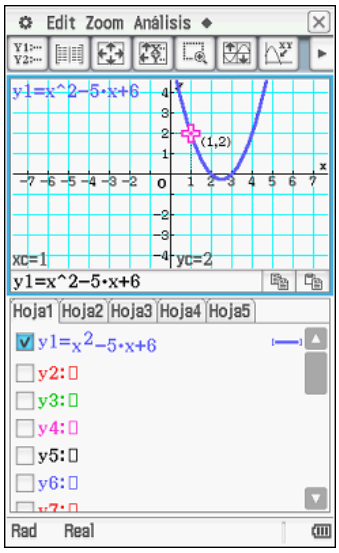


Pulsamos a continuación sobre el icono  y activamos la función que quiero representar 

para obtener la gráfica de la función.



Por ejemplo, si pulsamos sobre el icono  activaremos la traza de la función para recorrer la función utilizando las teclas de movimiento a derecha y a izquierda.



Al activar la traza aparecen las coordenadas del punto de la función sobre el que se encuentra el cursor y la expresión de la función en el cuadro de mensajes.

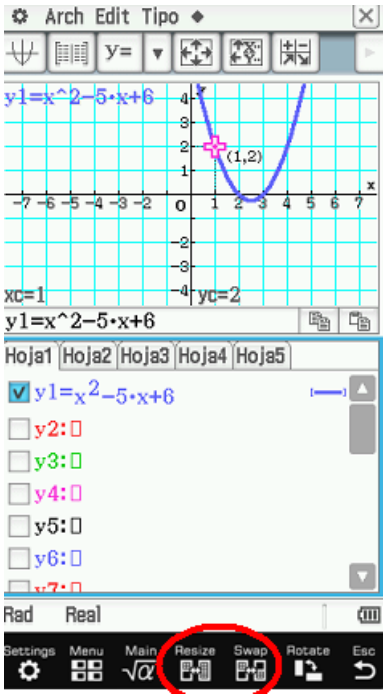
Cuando la pantalla aparece dividida en dos cuadros con distintas acciones podemos observar que uno de ellos aparece con un marco algo más grueso, indicando que dicha aplicación o ventana es la activa, por tanto, cualquier acción tendrá efecto sobre ella.

Para cambiar la ventana activa basta con pulsar sobre ella o pulsar sobre la opción 

que aparece en el menú inferior de opciones de la calculadora.

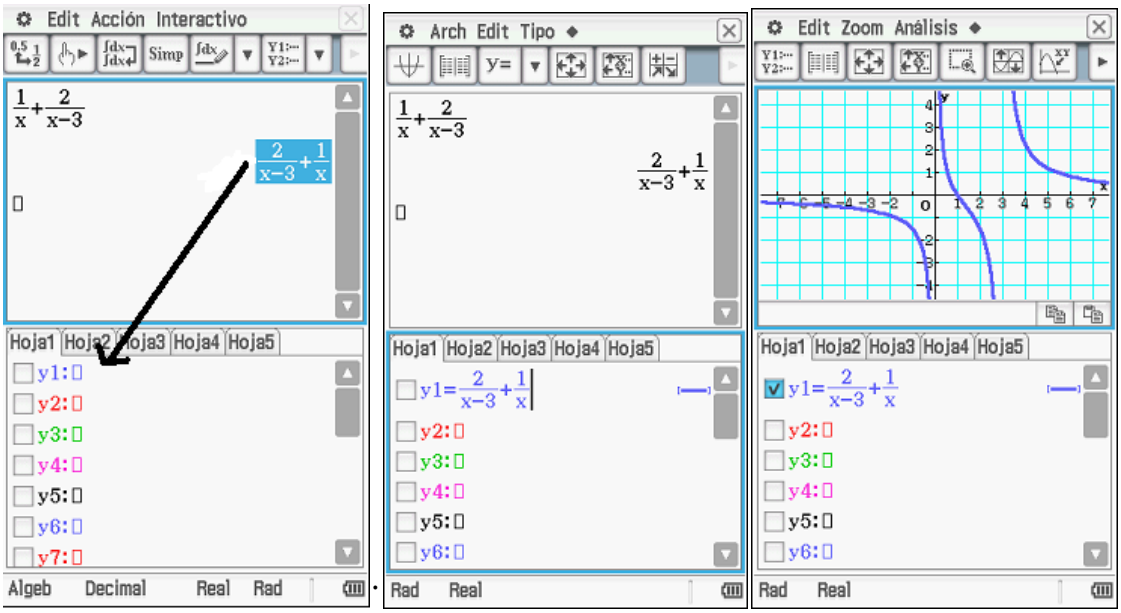
En este mismo menú se encuentra la opción 

que permite ampliar la ventana activa para que ocupe toda la pantalla de la calculadora.



Una importante característica de la calculadora ClassPad II que ampliaremos en los siguientes temas, es el intercambio de información entre las distintas aplicaciones que ofrece, utilizando para ello las opciones de copiar y pegar (disponibles desde el menú **Edit**) o seleccionar y arrastrar.

Por ejemplo, a partir de una expresión obtenida en la ventana principal, una vez seleccionada, se arrastra a otra aplicación, en este caso al editor de funciones, pulsando **Enter** para introducirla como función, seleccionando a continuación el icono  para obtener la representación gráfica

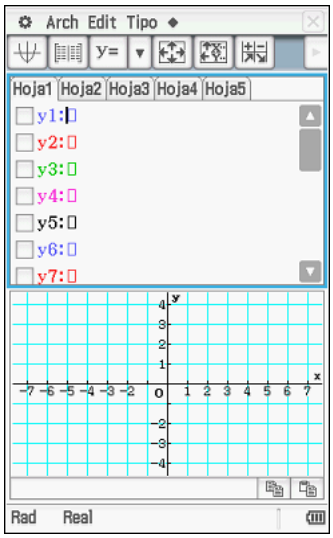


Esta acción se puede realizar sobre toda la expresión o sobre una parte de la misma.

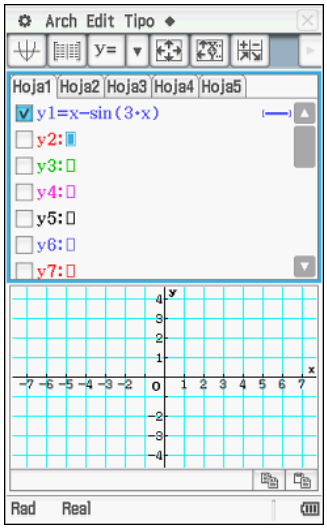
LA APLICACIÓN GRÁFICOS Y TABLAS

Está disponible en el menú principal de la calculadora a través de la opción representada por el icono **Gráficos & Tablas**

Aparecerá una pantalla como la mostrada en la imagen siguiente, en la que observamos dos ventanas: una correspondiente al editor de funciones y otra para la representación gráfica.

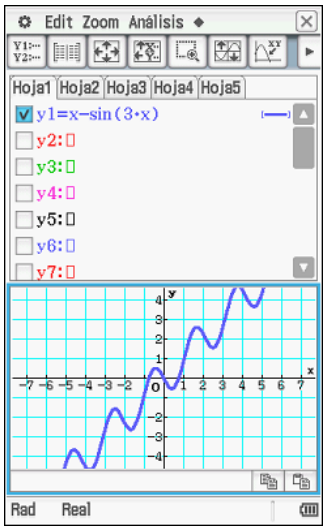


Para representar una función hay que introducir su expresión en el editor de funciones, pulsando **Enter** para que quede guardada en una de las variables **y1**, **y2**...

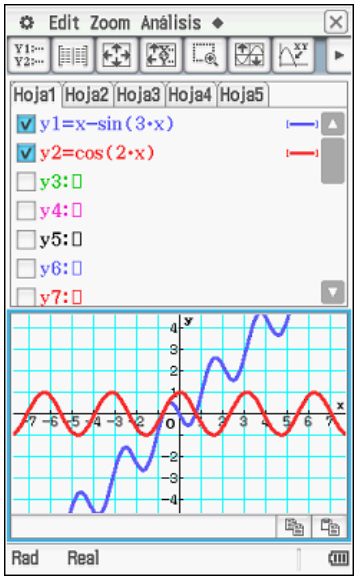


Para que aparezca la gráfica, recordamos que es necesario pulsar sobre 

Aparecerá la imagen siguiente:



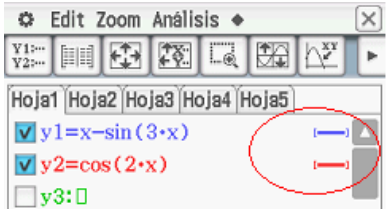
Con un proceso similar será posible representar varias funciones de manera simultánea.



Las funciones que se dibujarán serán aquellas que tengan activa la marca que aparece a la izquierda de los nombres **y1**, **y2**,...

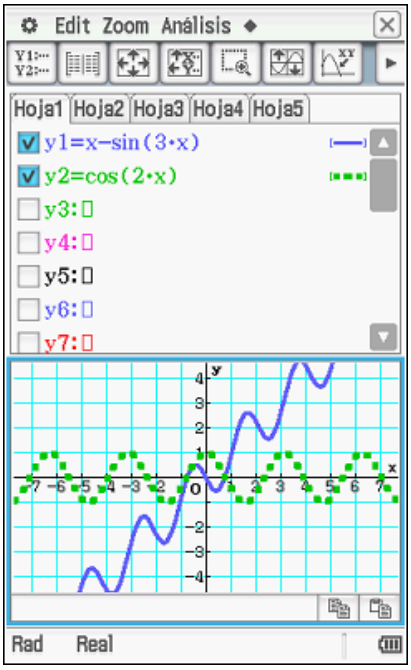
En consecuencia, si se desactiva cualquiera de las marcas anteriores la función correspondiente no se dibujará.

A la derecha de la expresión de cada una de las funciones aparece el patrón que se utilizará para su trazado:

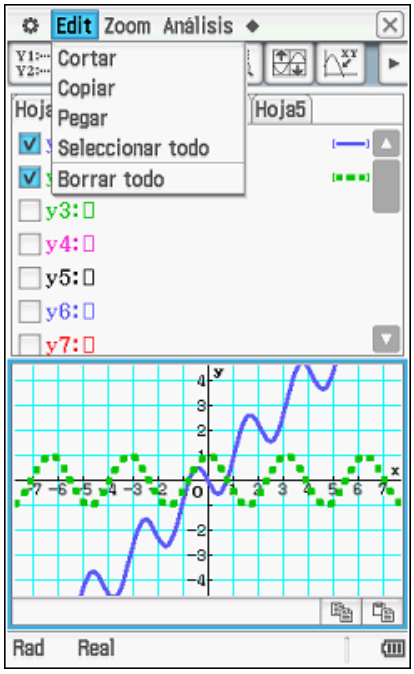


Al pulsar sobre él, se abrirá una nueva ventana para cambiar el trazo o el color de la function de manera que el aspecto de la representación cambie.

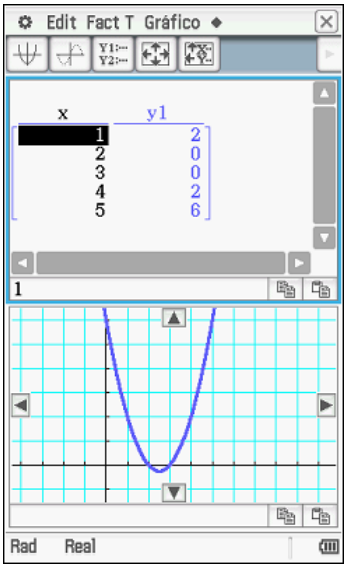
Es necesario volver a dibujar la función con  para que los cambios surjan efecto.



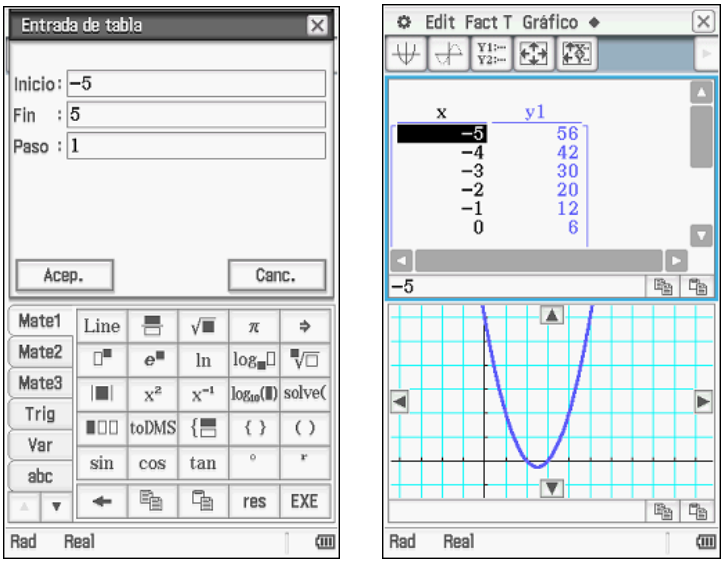
Para borrar una función situamos el cursor encima de la expresión a borrar y pulsamos la tecla **Clear**  . En caso que deseemos borrar todas las funciones utilizaremosla opción **Borrar todo** que aparece en el menú **Edit**, de manera análoga a como hemos realizado esta tarea en el menú **Principal** para borrar expresiones.



Al pulsar sobre la tecla aparece la tabla de valores de la gráfica

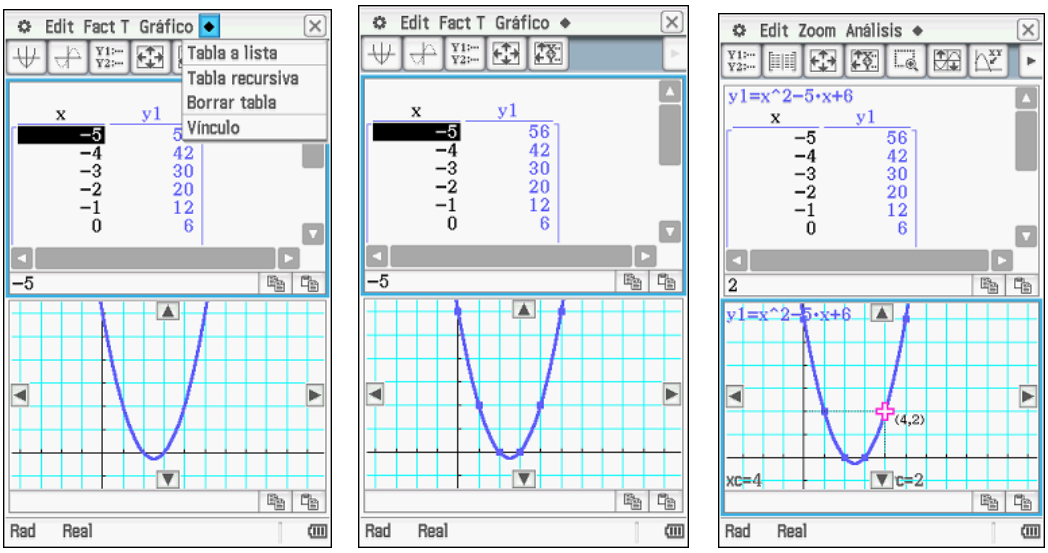


Si nos interesa cambiar los valores de comienzo y fin de la tabla pulsaremos sobre la tecla

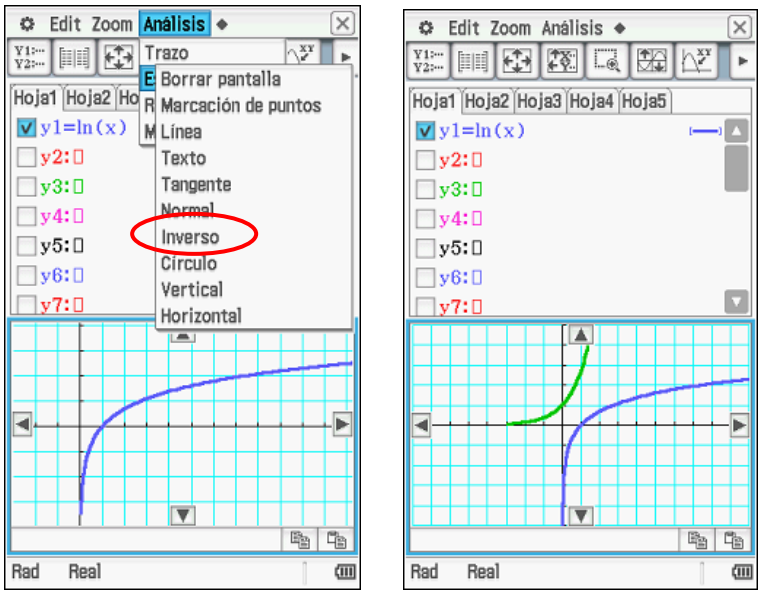


Si a continuación pulsamos y luego Vínculo nos indica los puntos de la tabla en la gráfica y si activamos el trazo , nos podemos ir moviendo por la gráfica según los valores de la tabla

Para salir de la operación de trazo vinculada hay que pulsar



Dada una función, por ejemplo f(x)=lnx, podemos representar su función inversa, para ello representamos la función y luego pulsamos sobre **Análisis, Esbozo e Inverso**

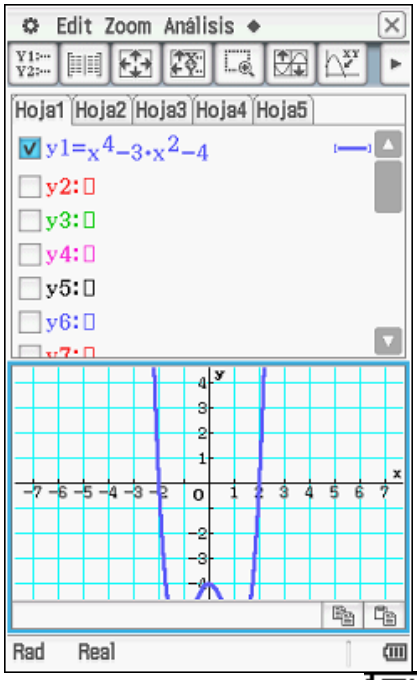


Si la función no tiene inversa, el gráfico producido por la función Inverso será el resultado de cambiar la x por la y en la función original

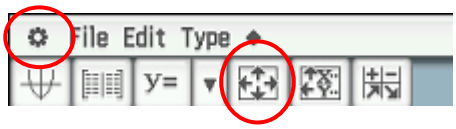
AJUSTE DE LA VENTANA PARA LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA

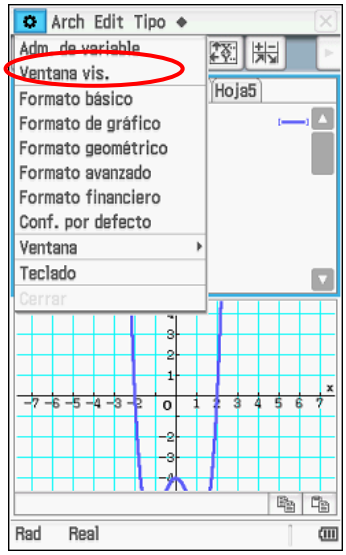
En ocasiones será necesario ajustar los valores de la ventana en la que se han representado los gráficos para mejorar el aspecto del gráfico representado.

Por ejemplo, al representar la function $y = x^4 - 3x^2 - 4$ obtendremos la gráfica:

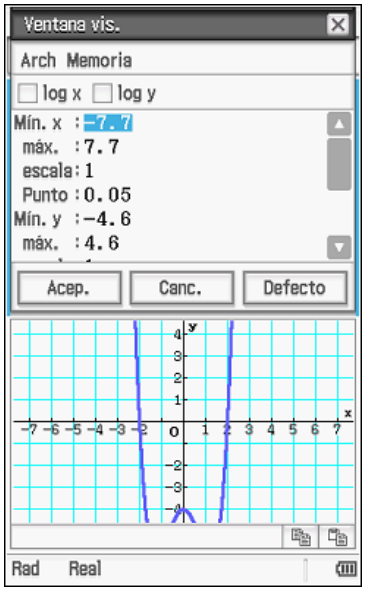


Para ajustar la ventana pulsamos sobre el icono  o sobre la opción  para acceder a **Ventana vis.**

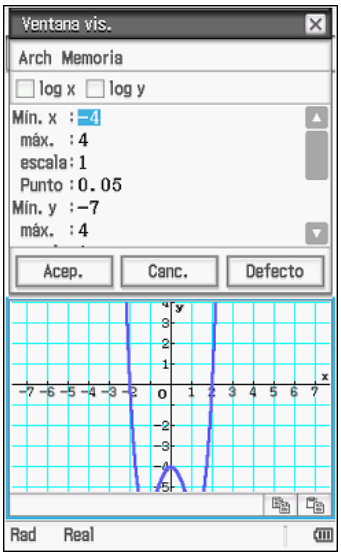


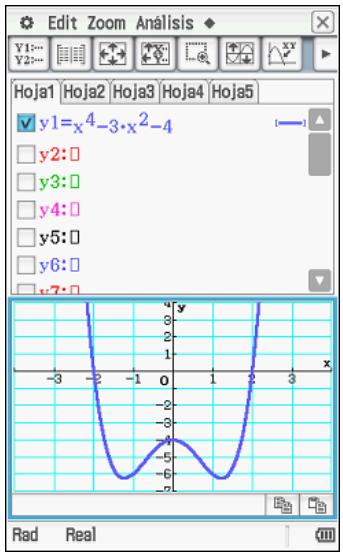


En los dos casos aparecerá la ventana con los valores utilizados para la representación:



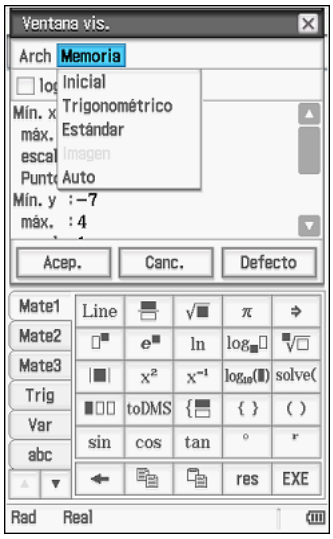
Basta con modificar los valores y Aceptar para obtener una nueva representación en la que ajustará la ventana a los nuevos valores.





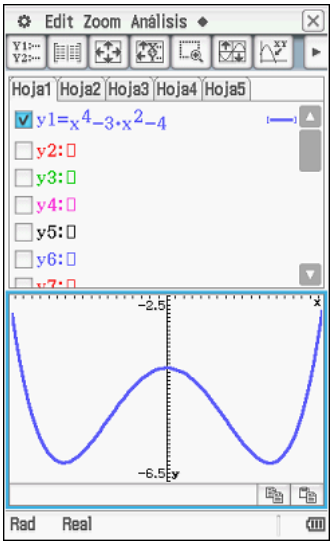
Los valores **Min. x**, **máx**, **Min. y**, **máx** corresponden a los valores mínimos y máximo de los ejes de coordenadas, **escala** representa el espacio entre cada dos marcas que se señalarán en cada eje, y **Punto,** el valor utilizado como incremento para calcular el valor de la función para los puntos del eje x.

Para volver a los valores utilizados por defecto en la ventana de representación pulsaremos sobre  para seleccionar a continuación la opción **Inicial** que encontramos en el menú **Memoria**.



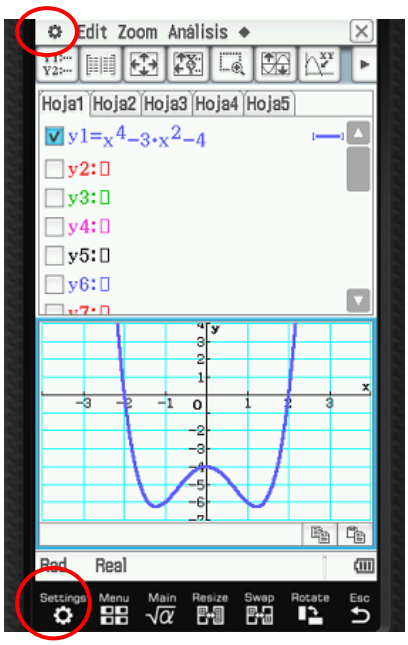
En este mismo menú encontramos la opción **Auto** que ajustará de manera automática los valores de la ventana para representar un gráfico.

Es conveniente indicar que esta opción no siempre producirá un resultado adecuado, en nuestro caso la opción **Auto** nos devuelve:

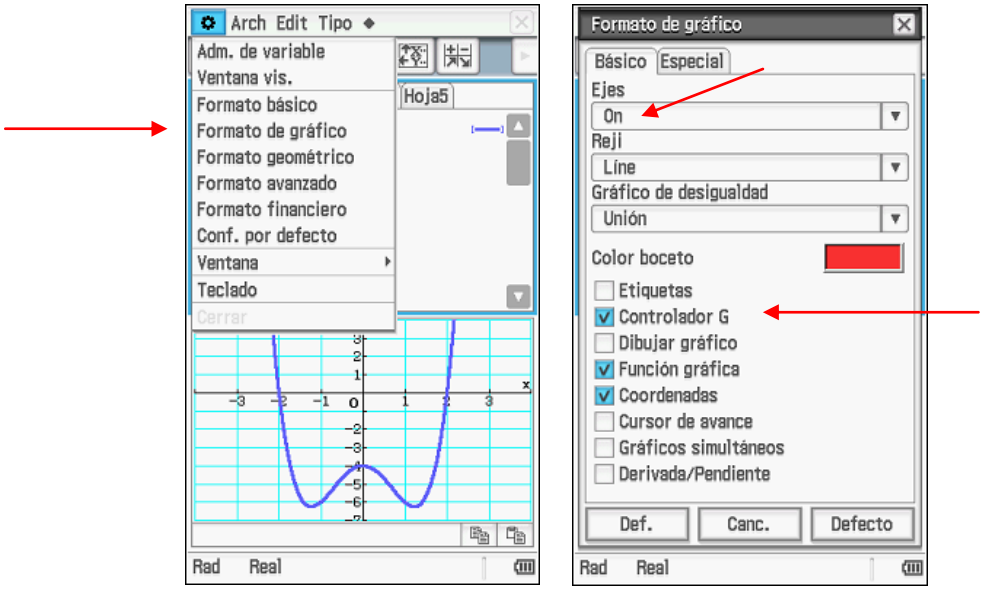


Ajuste del Formato de gráfico

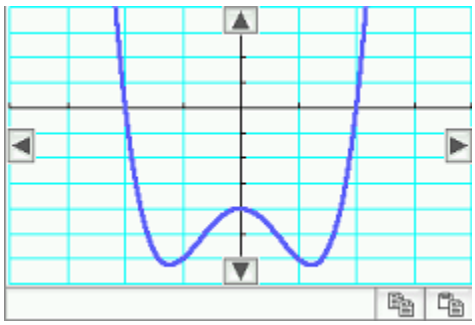
Desde el **Formato de gráfico** del menú configuración  o  podemos adecuar la presentación gráfica con las opciones que nos sean más convenientes en cada momento.



Escogemos los **Ejes** en **On** y activamos el controlador gráfico (**Controlador G**)

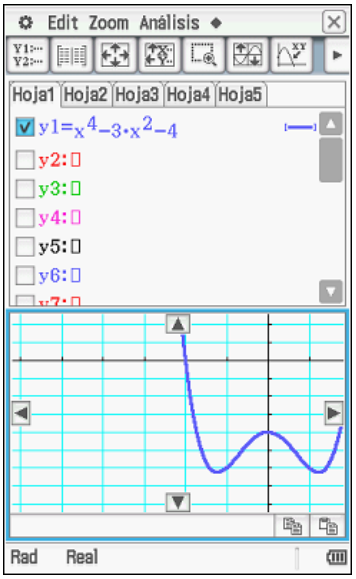


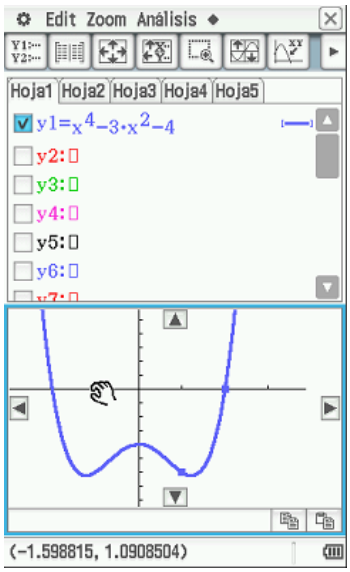
El nuevo aspecto de la pantalla gráfica será el siguiente:



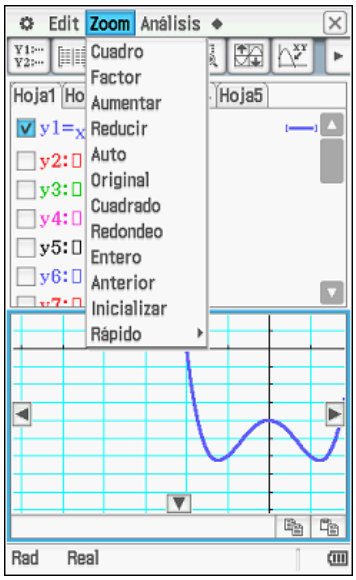
Como alternativa a los ajustes anteriores de la ventana gráfica, o mejor, como complemento, se podrá desplazar la representación en la dirección de los distintos ejes pulsando sobre las flechas que aparecen en cada uno de ellos.

Además, situando el cursor sobre la gráfica será posible desplazar la vista gráfica pulsando sobre las flechas o dejando pulsado el botón izquierdo del ratón



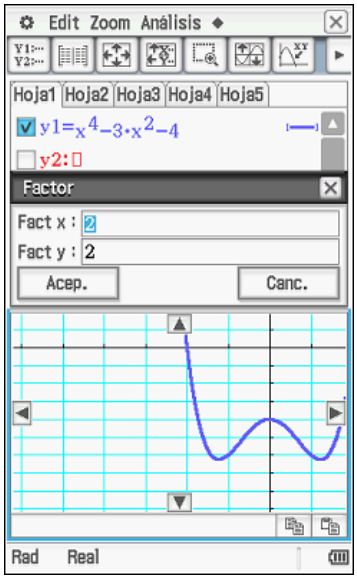


Existen distintas opciones para realizar un zoom sobre la representación de una gráfica, a las que se accede a través del menú **Zoom** disponible en la ventana correspondiente al editor gráfico.



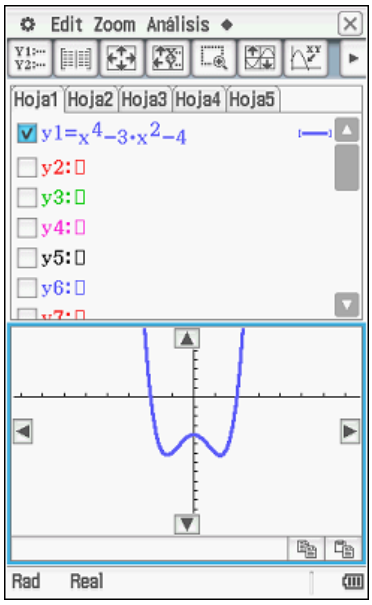
La mayoría de las opciones disponibles en este menú realizan un cambio a partir de unos valores fijos en la ventana de representación, por lo que se obtendrá una ampliación o reducción según el caso.

Las opciones **Aumentar** y **Reducir** realizan una ampliación y una reducción, respectivamente a partir de los valores indicados en la opción **Factor**.

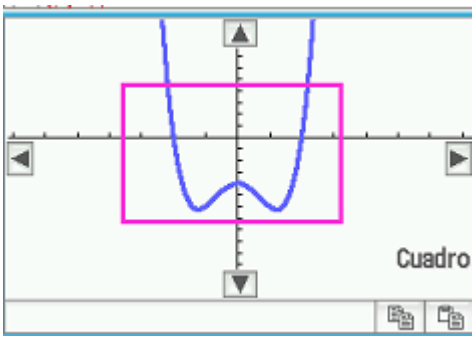


Por ejemplo, la opción **Reducir** producirá una reducción considerando el valor de factor 2 para cada uno de los ejes.

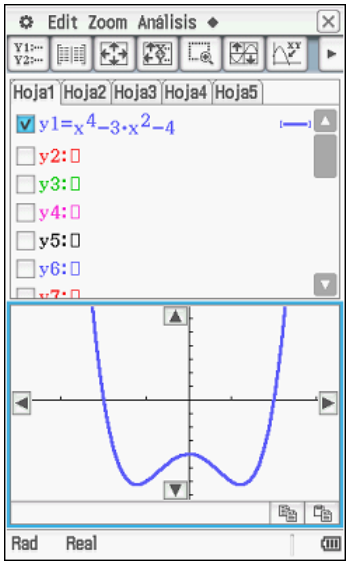
El resultado será:



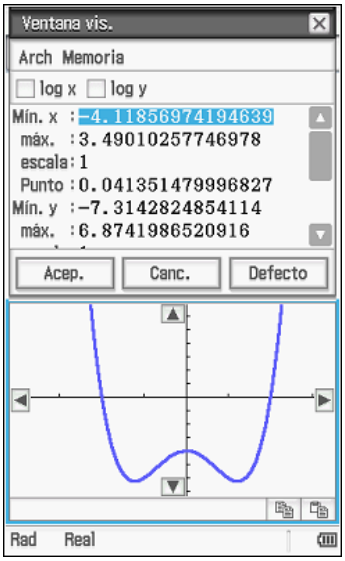
La opción **Cuadro** que aparece en el menú **Zoom** permite seleccionar una zona rectangular en la gráfica sobre la que se realizará la correspondiente ampliación. Para establecer la zona rectangular es necesario marcar dos vértices opuestos.



El resultado aparece en la gráfica siguiente:



Hay que indicar que las opciones correspondientes a los distintos formatos de zoom cambiarán los valores de la ventana de representación que anteriormente, hemos modificado de forma manual.



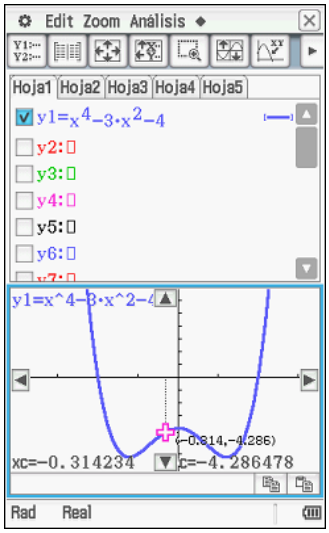
DETERMINAR ELEMENTOS EN UNA FUNCIÓN

A partir de una función representada en el editor de gráficos es posible determinar algunos de los elementos que la caracterizan utilizando las distintas herramientas disponibles en el menú de opciones gráficas.

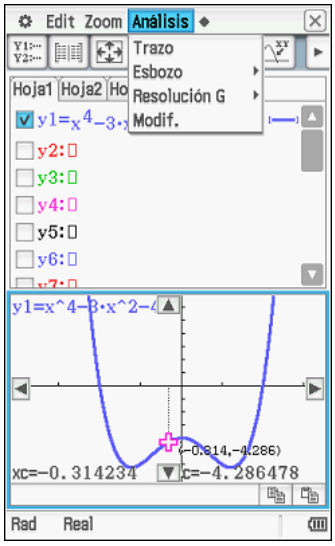
Recordemos es posible recorrer una la función activando el icono correspondiente a la traza:

Una vez activada utilizaremos las teclas de movimiento del cursor a derecha y a izquierda para recorrerla, y las teclas de movimiento hacia arriba y hacia abajo para cambiar de función cuando se han dibujado varias funciones de manera simultánea.

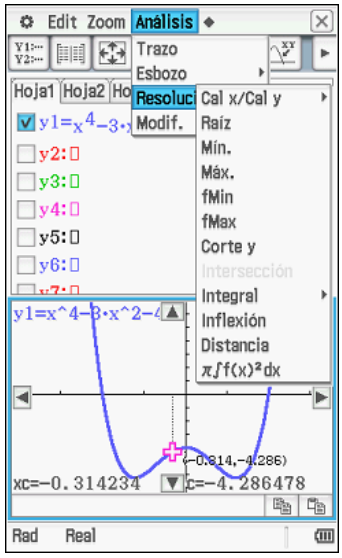
Cuando la traza está activa aparecerán las coordenadas del punto en el que se encuentra el cursor



Es posible también activar la opción **Trazo** a través del menú **Análisis**.



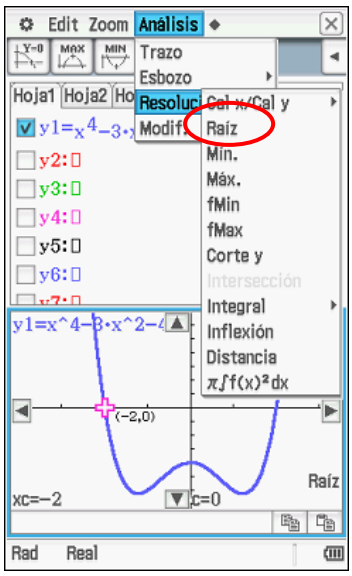
Los elementos que podemos determinar de una función se encuentran en la opción **Resolución G** del menú **Análisis**.

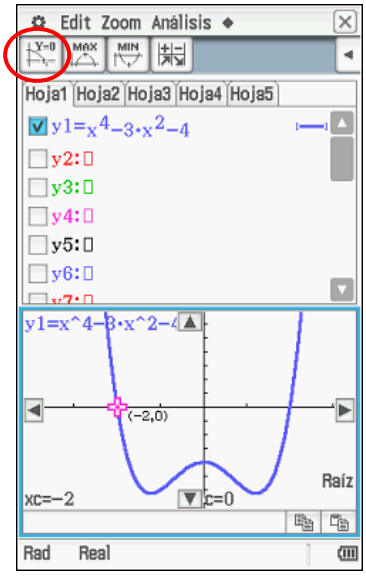


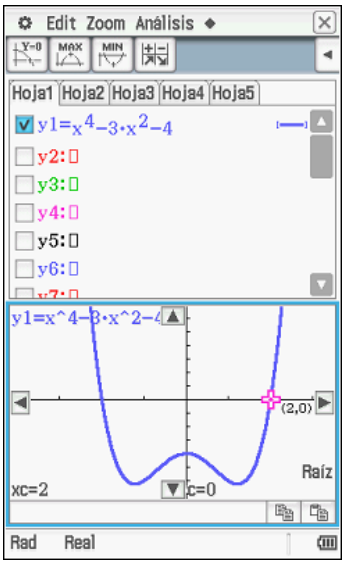
Estos elementos son:

- **Raíces de una función**: al seleccionar **Raíz** hallará una raíz, pulsando a continuación la tecla de movimiento del cursor a la derecha o a la izquierda, según el caso, hallará si existe una nueva raíz.

Esta opción también se ejecuta a través del icono 

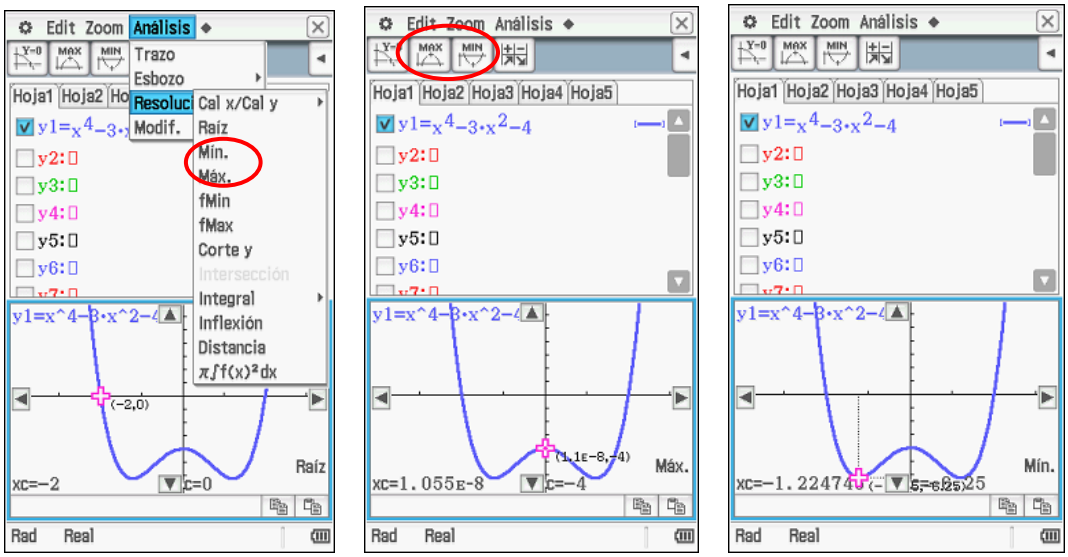






- **Extremos relativos de una función**: los valores correspondientes a los máximos y mínimos relativos se obtendrán a partir de las opciones **Máx** y **Mín**, respectivamente.

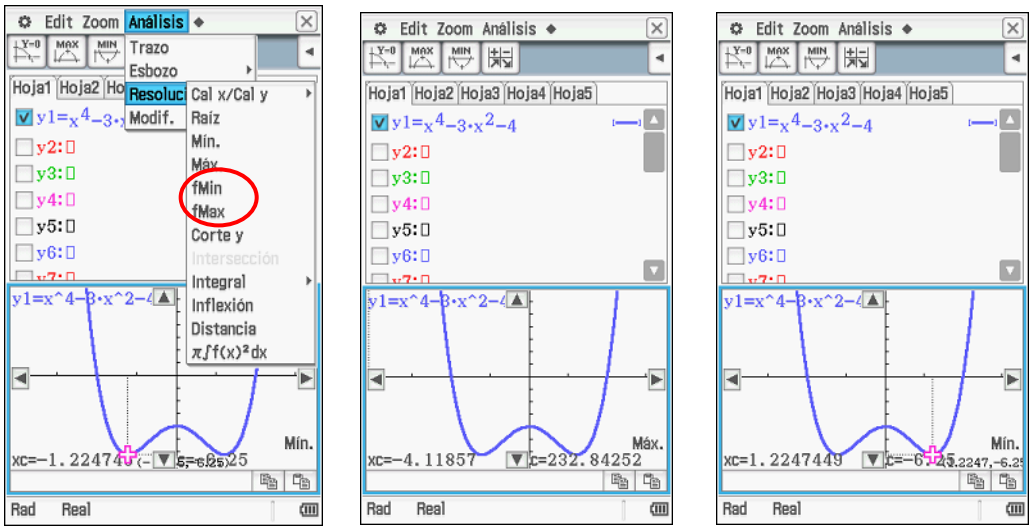
Estas opciones también se activan a través de los iconos  y 



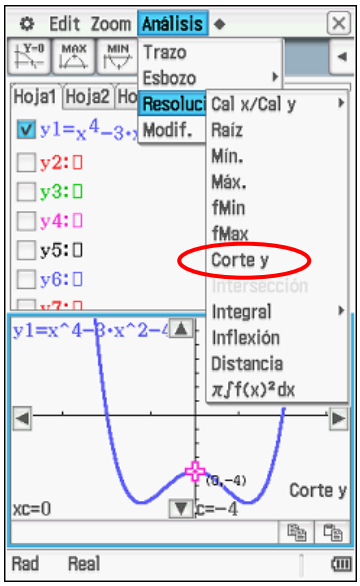
Será necesario utilizar las flechas de movimiento del cursor para calcular el segundo valor correspondiente al mínimo.

Hay que indicar que mientras la calculadora está realizando operaciones aparecerá en la esquina inferior derecha un pequeño cuadrado que parpadeará.

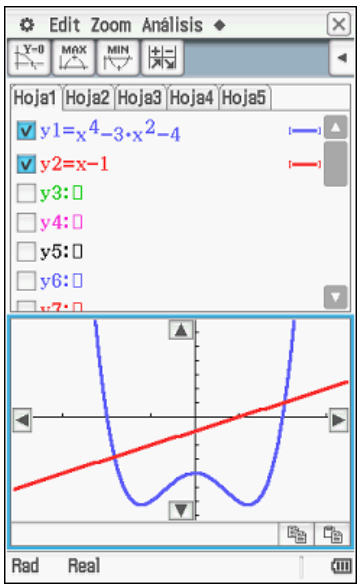
- **Extremos 'absolutos' de una función**: los valores correspondientes a los máximos y mínimos absolutos (dentro del dominio de la representación gráfica) se obtendrán a partir de las opciones **fMáx** y **fMín**, respectivamente.

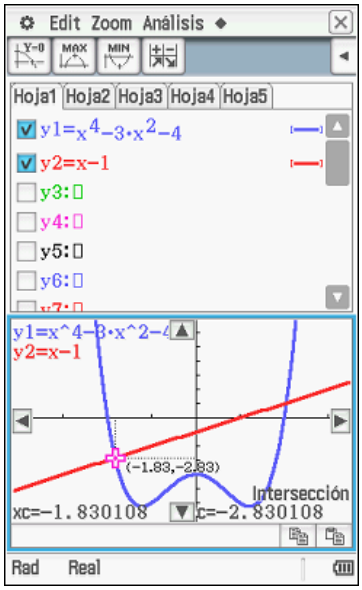


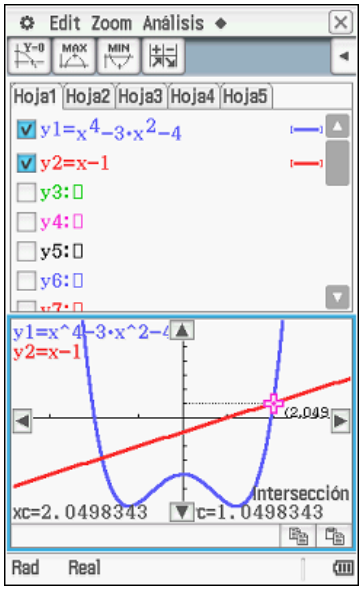
- **Corte con el eje Y:** se obtiene a partir de la opción **Corte y**.



- **Puntos de intersección de dos funciones:** la opción Intersección devuelve los puntos, de uno en uno, de intersección de dos funciones. Cuando hay dibujadas más de dos funciones es necesario indicar de cuáles se desea obtener los puntos de intersección.

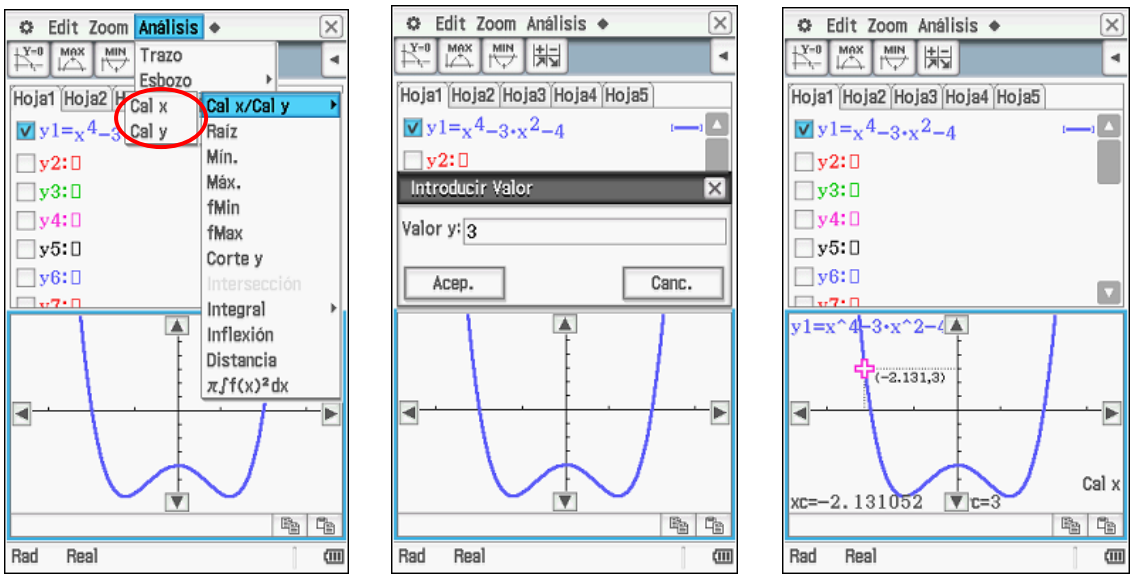




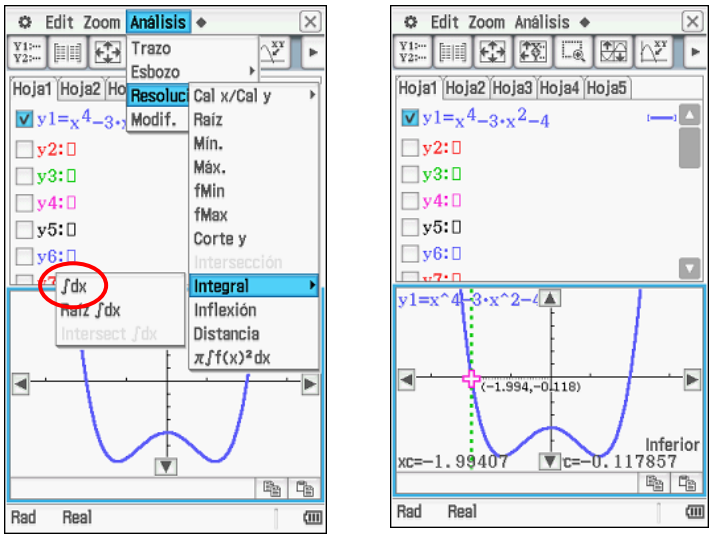


- Valor de la ordenada conocida la abscisa o viceversa: corresponde a la opción **Cal y** o **Cal x**.

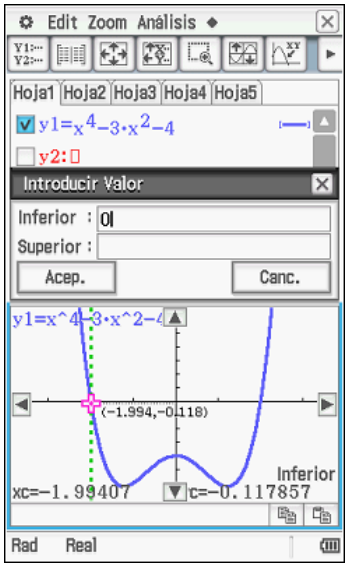
Por ejemplo si y=3 pulsamos **Cal x** y nos devuelve x=-2,131

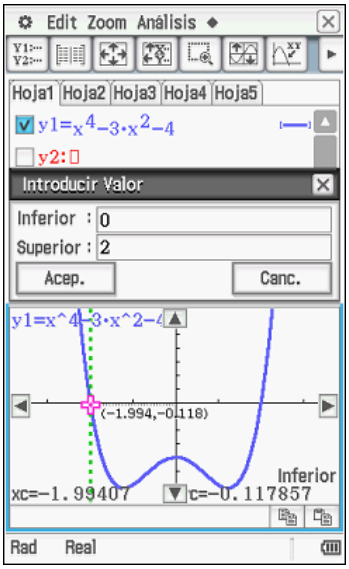


- **Integral definida en un intervalo**: al seleccionar la opción $\int dx$ aparecerá la siguiente ventana para establecer los límites para la integral definida.

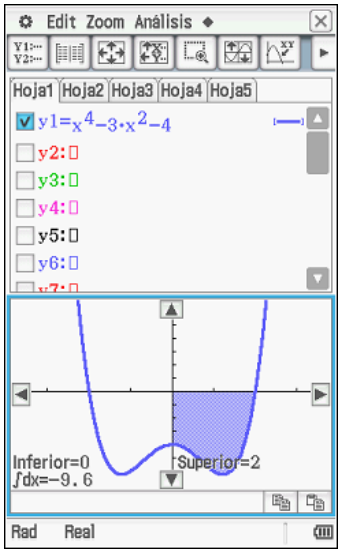


Aunque es posible utilizar las teclas de movimiento del cursor, es preferible introducir de manera directa los valores. Al pulsar sobre cualquier valor (en el teclado) aparecerá una nueva ventana para que se introduzcan los límites inferior y superior del intervalo en que se desea calcular la integral.





Al pulsar sobre **Acep.** obtendremos:

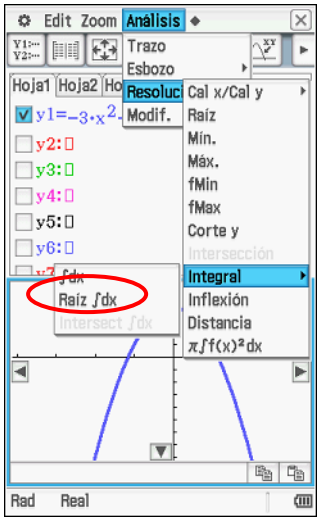


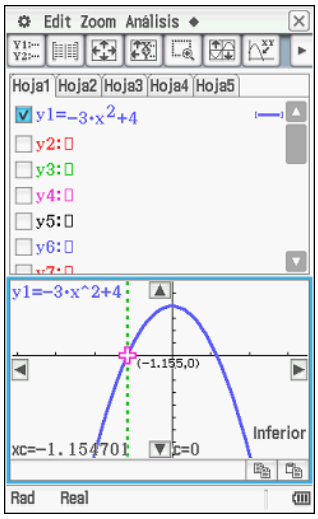
El resultado de la integral definida se muestra numéricamente en la ventana gráfica, en nuestro caso $\int dx = -9.6$

Para borrar algunos de los elementos como por ejemplo, el área del recinto trazado anteriormente, basta con volver a dibujar la función. 

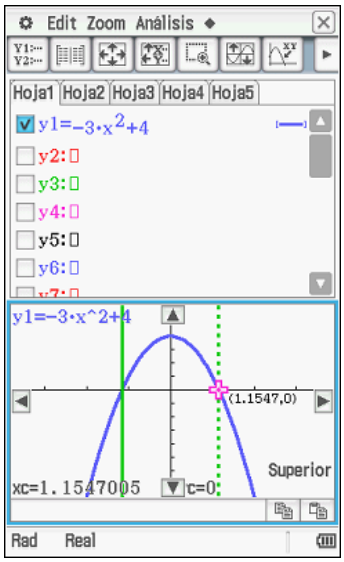
- **Área del recinto limitado por una función f(x) y el eje X**

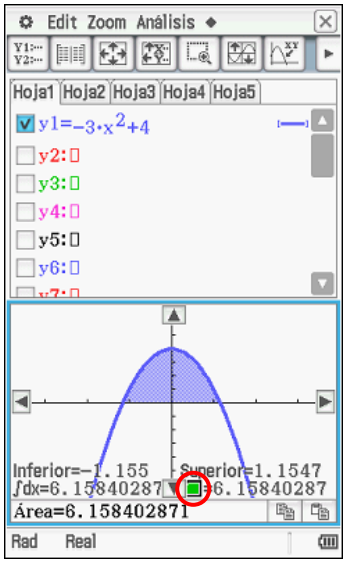
Definimos la función f(x)= $-3x^2+4$ y seleccionamos la opción **Raíz** $\int dx$





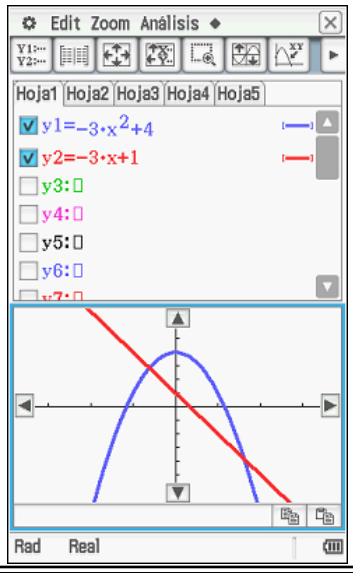
Nos da la raíz inferior, pulsamos Enter (EXE) y movemos el cursor para obtener el valor superior, volvemos a pulsar Enter (EXE) y nos da el valor de la integral y del área

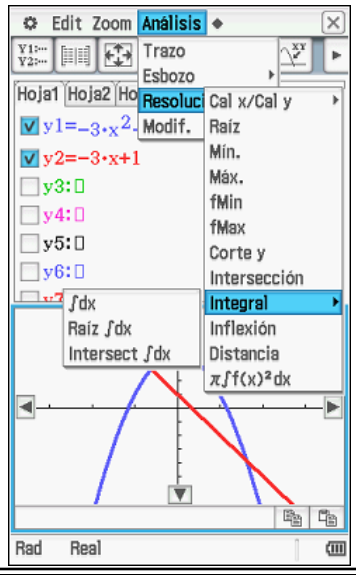




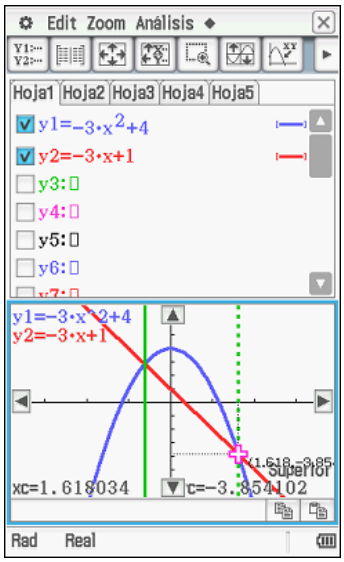
Área

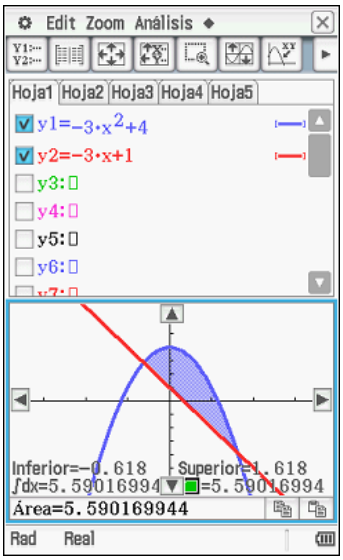
- **Área entre dos curvas f(x) y g(x).** Definimos las dos funciones y las representamos. Ahora utilizamos la orden **Intersect** $\int dx$



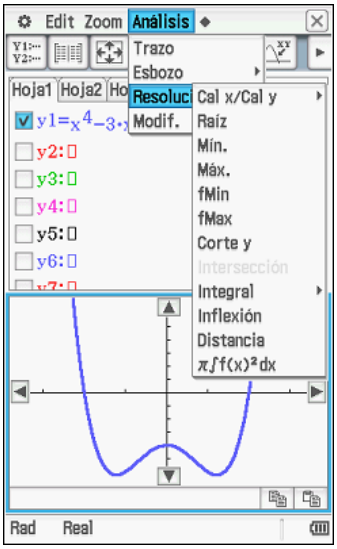


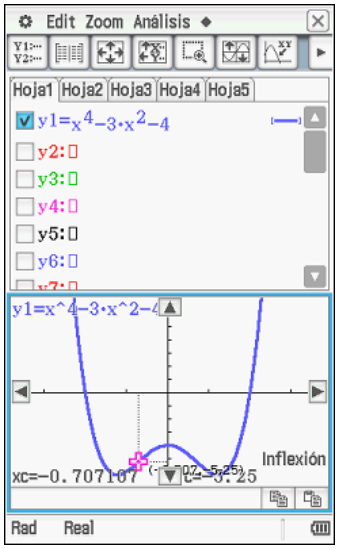
Obtenemos el límite inferior, pulsamos Enter (EXE) y movemos el cursor para obtener el límite superior, volvemos a pulsar Enter (EXE) y nos da el valor de la integral y del área

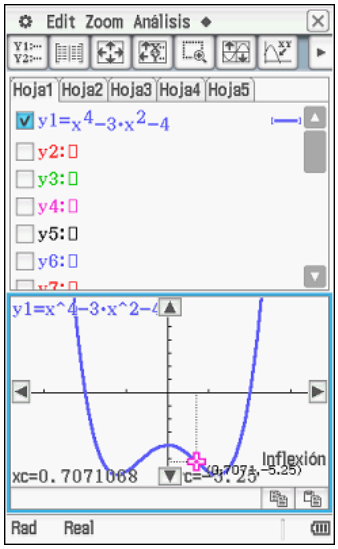




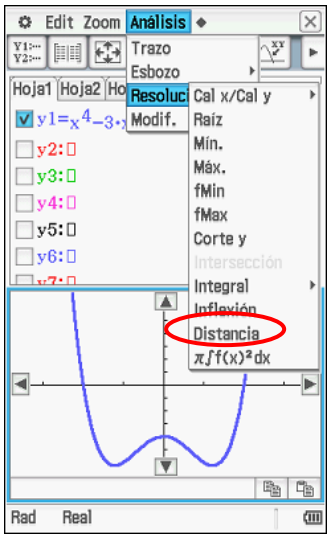
- **Puntos de inflexión**: se obtienen a partir de la opción **Inflexión**.

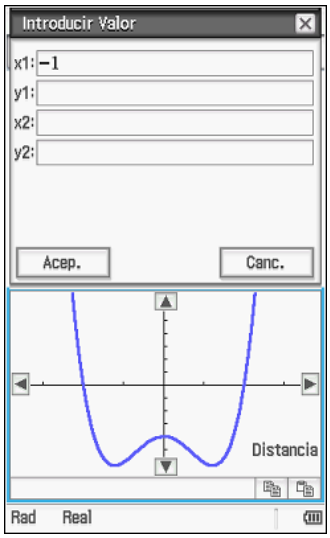


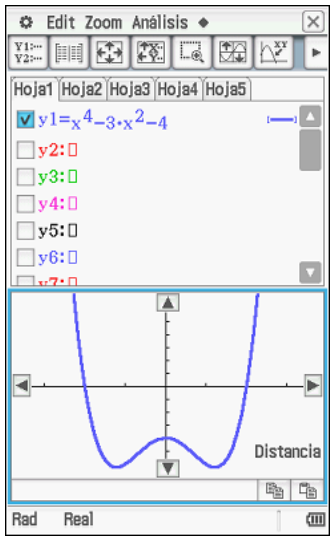


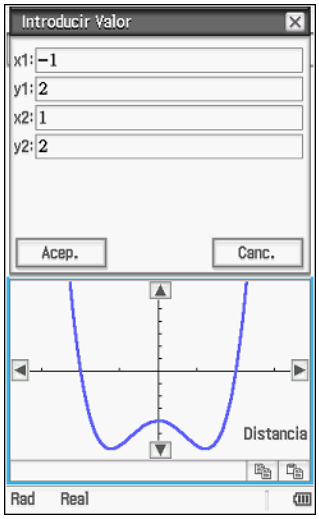


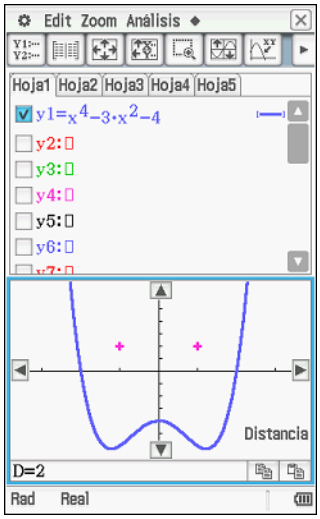
- **Distancia entre dos puntos**: se obtendrá a partir de la opción **Distancia**. De manera análoga a opciones anteriores, al pulsar sobre cualquier valor numérico se abre una ventana para introducir los valores correspondientes a las coordenadas de los dos puntos (no necesariamente puntos de la función).



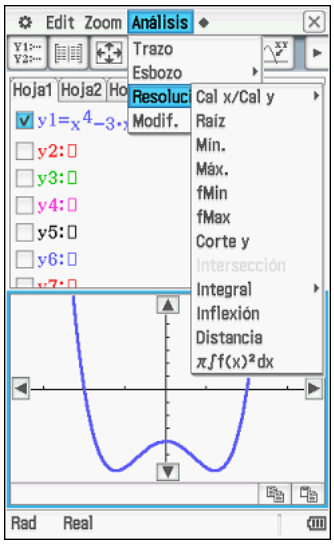


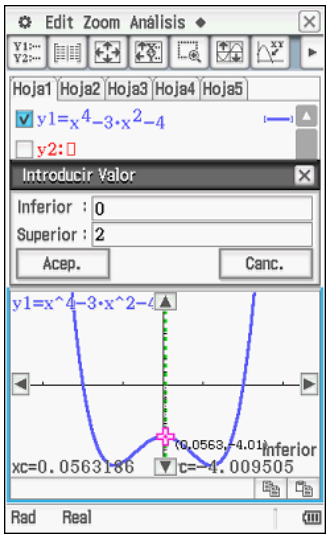


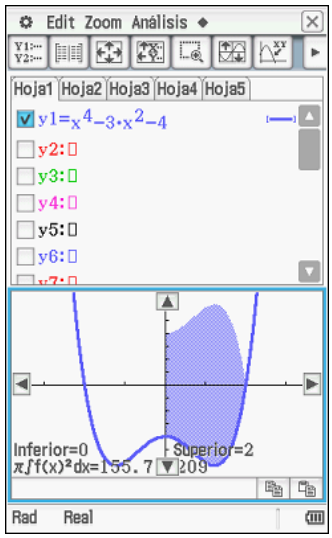




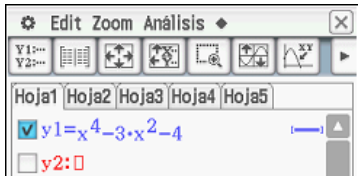
- **Volumen de un sólido de revolución:** se obtendrá a partir de la opción $\pi\int(f(x))^2\,dx$. Los valores correspondientes a los límites de integración se introducen de manera análoga al resto de opciones expuestas anteriormente.







ALMACENAR EL CONTENIDO DE LA APLICACIÓN GRÁFICOS Y TABLAS



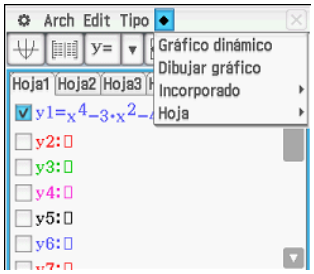
Como se ha indicado anteriormente, es posible almacenar hasta 20 funciones en cada una de las cinco hojas disponibles en la calculadora, denominadas **Hoja1**, **Hoja2**,..., **Hoja5**.

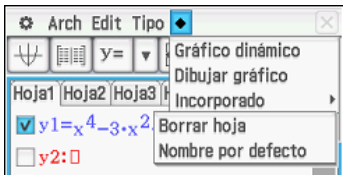
Para cambiar de una hoja a otra bastará con pulsar sobre la correspondiente solapa

Además, es posible cambiar el nombre de cualquiera de las hojas anteriores; para ello, pulsaremos una primera vez sobre la solapa correspondiente, de esta manera será la solapa activa, pulsando de nuevo aparecerá una nueva ventana sobre la que asignar el nuevo nombre.

Para restituir los nombres por defecto es necesario pulsar sobre el menú ♦, seleccionando a continuación la opción **Nombre por defecto** que encontramos en **Hoja**.

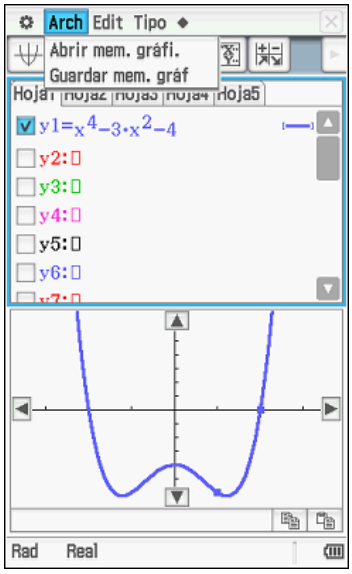
Observamos que en este mismo menú se encuentra la opción **Borrar hoja** que permitirá eliminar las funciones contenidas en la hoja activa a la vez que cambia el nombre de la hoja, tomando el nombre asignado por defecto.





Además tenemos la posibilidad de almacenar grupos de 5 hojas en un archivo de memoria de la propia calculadora. Desde el menú **Arch** seleccionando a continuación la opción **Guardar mem. gráf** nos permite guardar el archivo con el nombre que deseemos.

Desde el mismo menú, podemos Abrir mem. Gráfi para recuperar los archivos previamente almacenados.



Ejemplo 1.

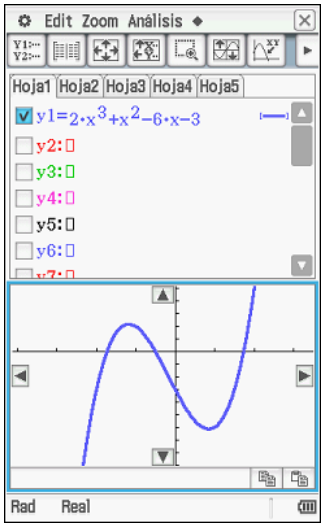
Determinar los puntos de corte de la función f con los ejes de coordenadas, calcula los extremos relativos y los puntos de inflexión en caso de existir.

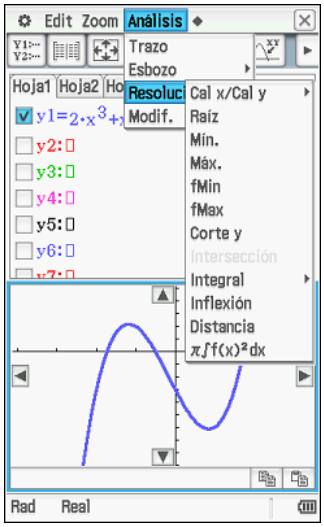
$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x - 3$$

Una vez introducida la expresión de la función pulsaremos sobre el icono  para obtener la representación gráfica.

Será necesario ajustar la ventana a través del icono  para obtener una imagen completa de la gráfica.

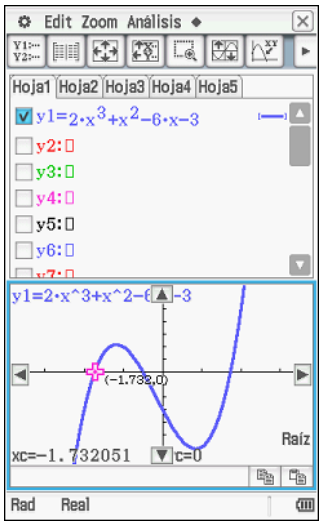
Para calcular los distintos elementos característicos de esta función accedemos a las opciones que ofrece el menú **Resolución G** disponible al abrir el menú **Análisis**.

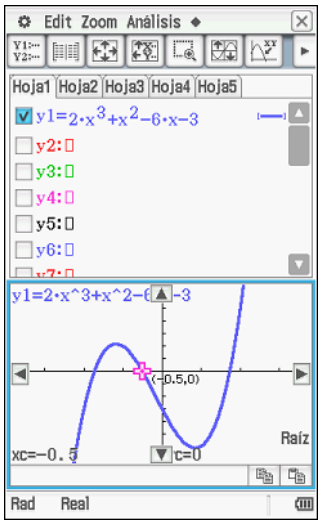


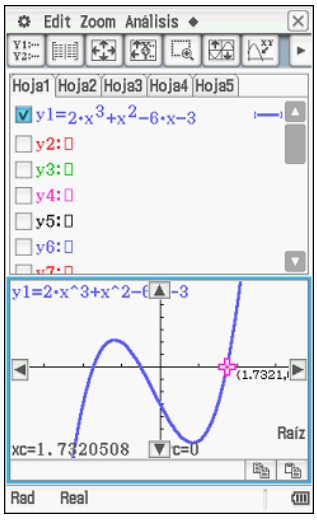


Comenzaremos calculando las raíces de la función utilizando la opción **Raíz**.

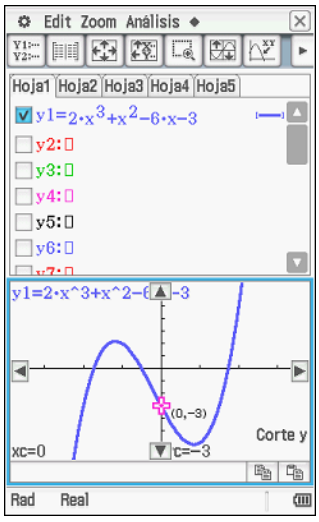
Los resultados aparecen en las imágenes siguientes:



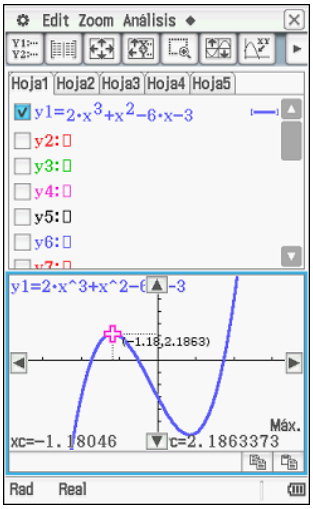


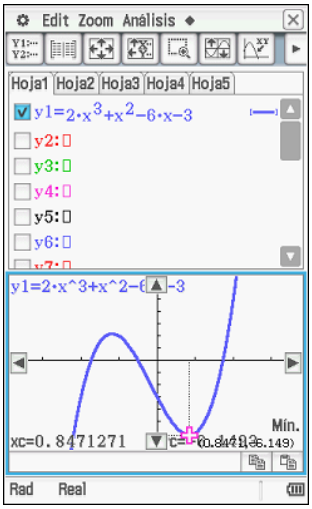


Para calcular el punto de corte de la función con el eje de ordenadas ejecutaremos la opción Corte y.

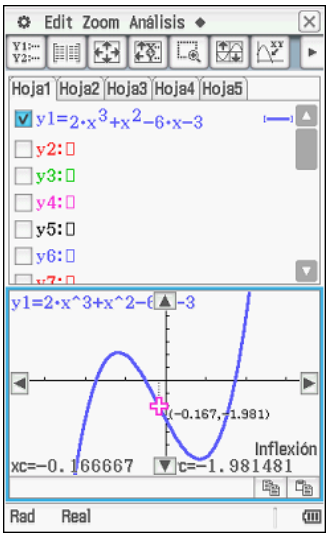


Con acciones similares, determinaremos los extremos de la función, empleando las opciones **Máx** y **Mín** ara hallar el máximo y el mínimo, respectivamente.





Por último, observamos que existe un punto de inflexión que calcularemos a través de la opción **Inflexión**.

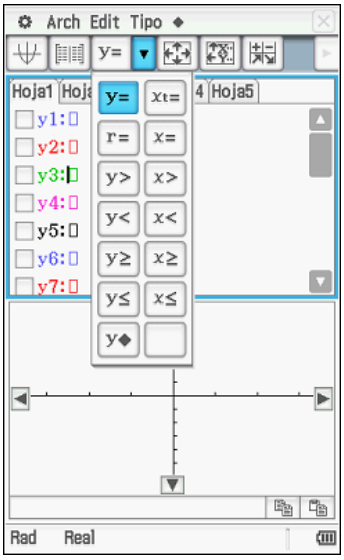


Los cálculos anteriores han permitido obtener los distintos elementos a partir de la gráfica, nos queda como alternativa utilizar las opciones que ofrece la calculadora para calcular las derivadas de una función y resolver las correspondientes ecuaciones.

REPRESENTACIÓN DE OTROS TIPOS DE FUNCIONES

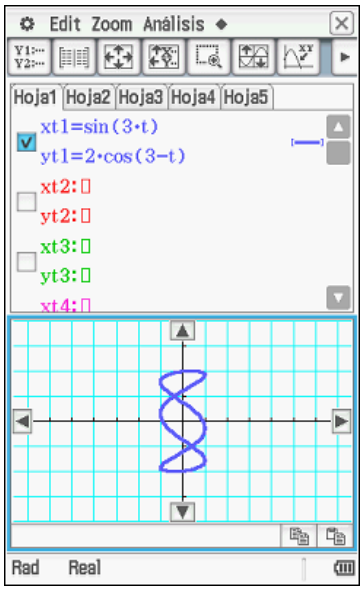
Hasta ahora todas las f unciones representadas han correspondido a funciones expresadas en forma explícita, aunque es posible dibujar otras funciones cuya expresión esté en polares, paramétricas, etc.

Para acceder a la ventana en la que es necesario especificar con antelación el tipo de función que se va a introducir pulsaremos sobre  para abrir un nuevo menú con los distintos tipos de funciones disponibles.

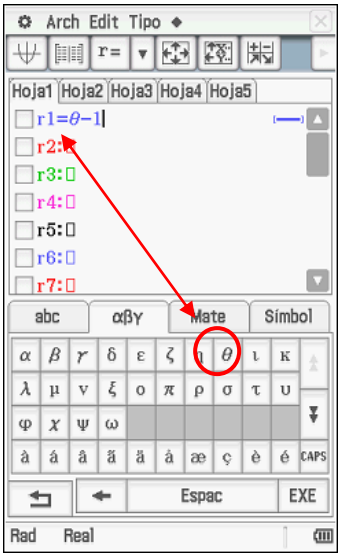


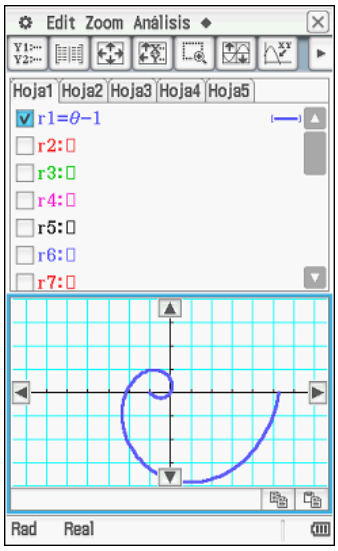
Las distintas expresiones corresponden a:

- Funciones explícitas: **y =**
- Funciones expresadas en paramétricas: $\mathbf{x_t}$ **=**

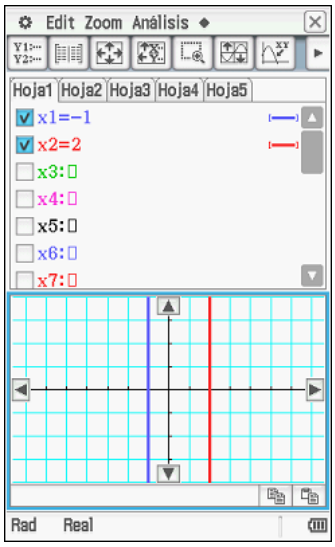


- Funciones en polares: **r =**

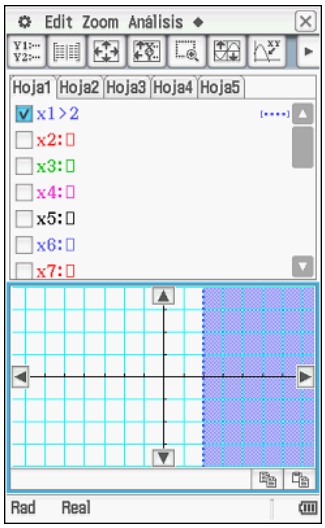




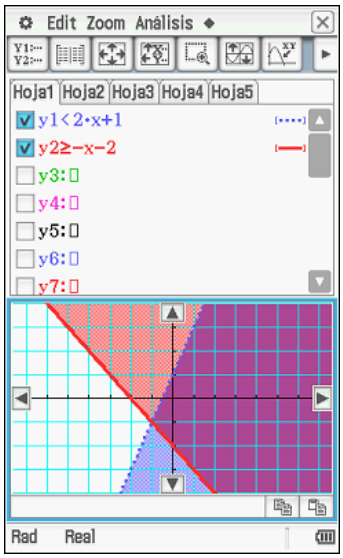
- Funciones constantes **x =**



- Desigualdades de la forma **x** >, **x** <

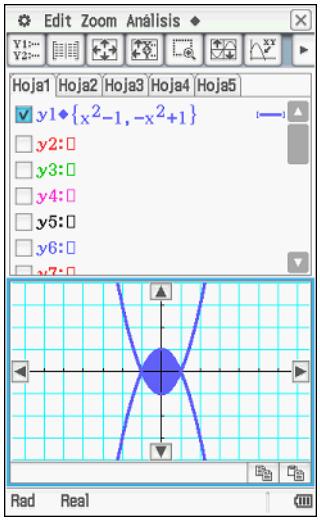


- Desigualdades de la forma **y** >, **y** <, **y** ≥, **y** ≤

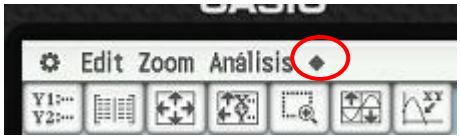


Los distintos tipos anteriores pueden combinarse en una representación.

- Dos funciones de una lista con sombreado entre las mismas: **y ♦**

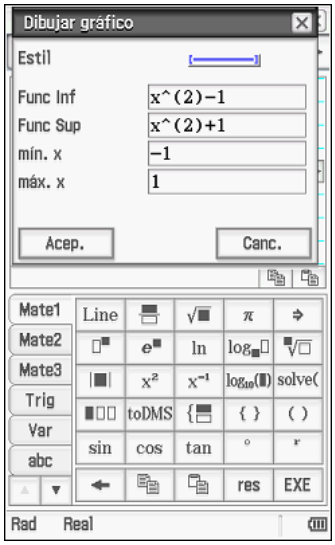


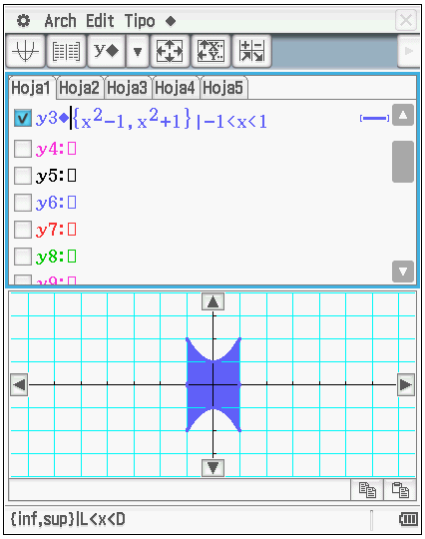
También se puede hacer desde el  menú



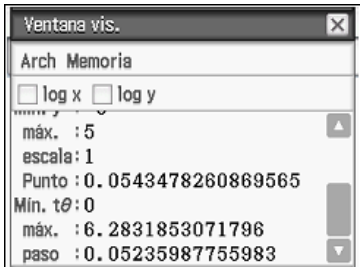
y la opción Dibujar Gráfico

Escribimos las funciones y los valores mínimos y máximos entre los que queremos que nos represente el sombreado entre las mismas.





Cuando se desea ajustar la ventana de representación de un gráfico en polares o en paramétricas aparecerán las opciones correspondientes para modificar los valores que tomarán el parámetro o el ángulo.



Ejemplo 2.

Determina los extremos del recinto determinado por las expresiones siguientes:

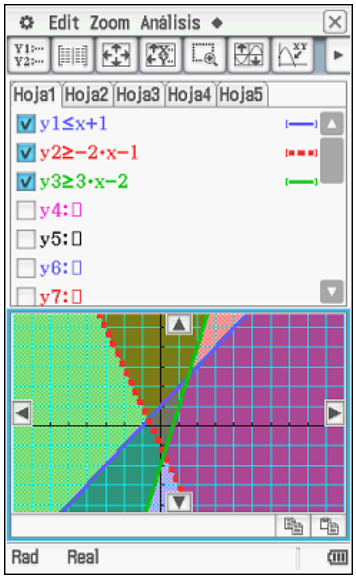
$$y \leq x + 1$$

$$y \geq -2x + 1$$

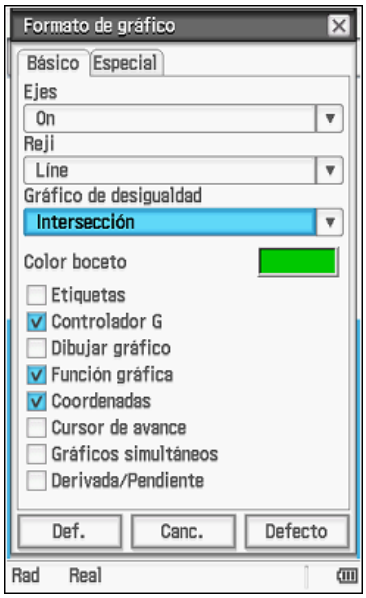
$$y \geq 3x - 3$$

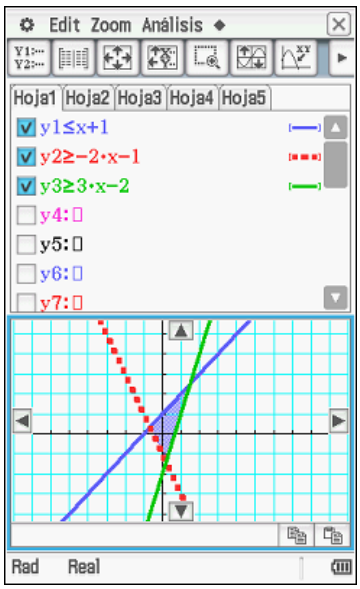
Introducimos las expresiones anteriores seleccionando previamente el tipo de desigualdad a través de las opciones que aparecen al pulsar sobre el icono 

A continuación pulsamos sobre el icono  para obtener la representación del recinto limitado por las inecuaciones anteriores, cuyo resultado será:



Observamos que se ve bien el recinto de la intersección, para que sólo nos pinte la intersección debemos pulsar sobre y en Formato Gráfico cambiar el Gráfico de desigualdad de Unión (que está por defecto) por el de Intersección



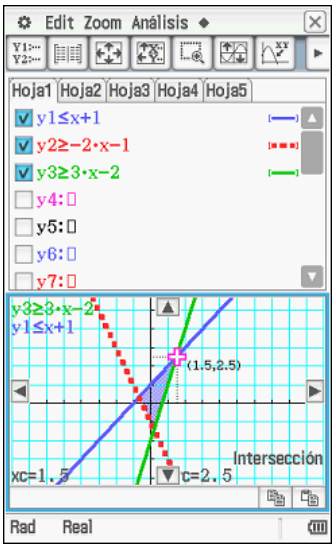


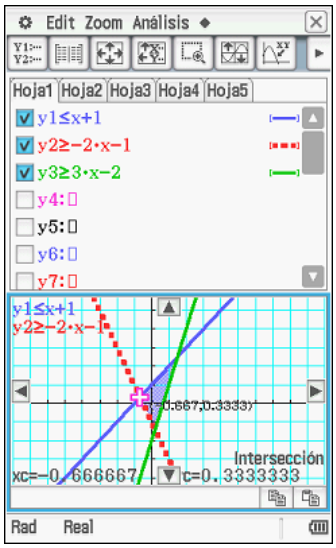
Para obtener los puntos de corte de las rectas que delimitan el recinto será necesario abrir el menú **Resolución G** que se encuentra en **Análisis** para seleccionar la opción **Intersección**.

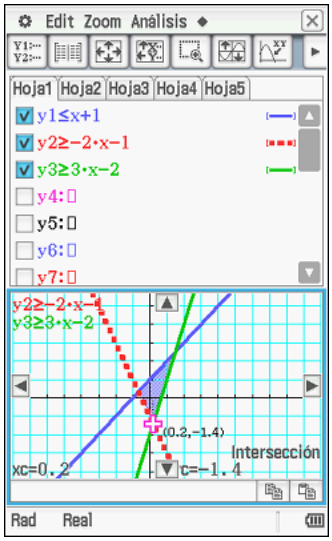
Al seleccionar la opción **Intersección** será necesario indicar de qué dos funciones se desea obtener la intersección. Para ello, se seleccionan con las flechas del cursor arriba y abajo y Enter(EXE), la recta a seleccionar aparece intermitente.

Una vez establecidas las dos funciones de las que se desea obtener el punto de intersección aparecerán las coordenadas de dicho punto.

De manera análoga se obtienen el resto de puntos de intersección.







Ejemplo 3.

La altura que alcanza una partícula después de x segundos está expresada por la función:

$$y = 5 + 13x - 5x^2$$

Determina:

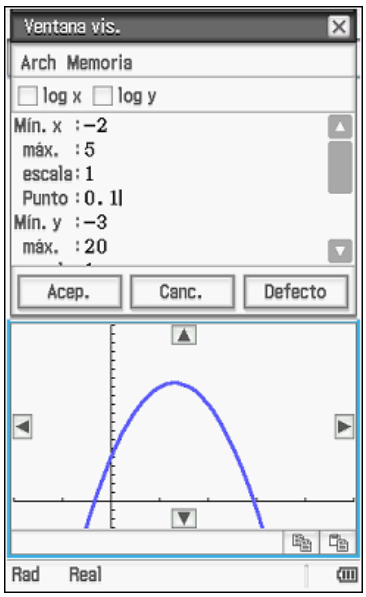
a. La altura desde la que fue lanzada.

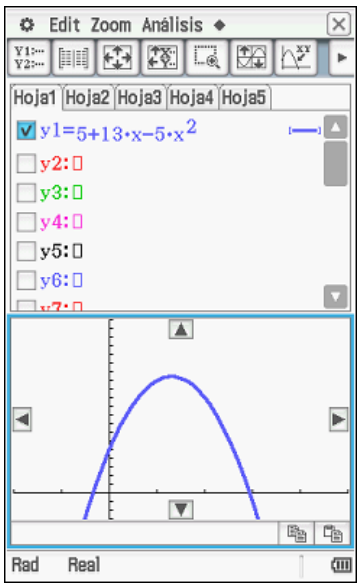
b. El instante en el que la partícula toca el suelo.

c. La altura máxima que alcanza.

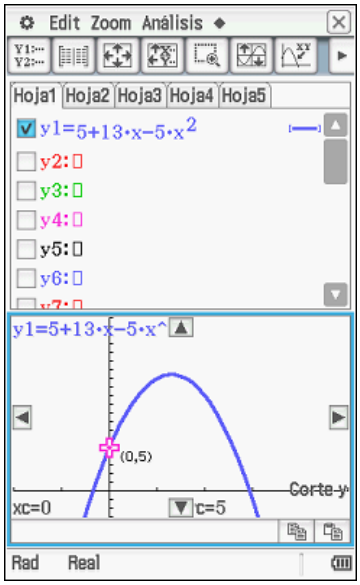
d. La velocidad que alcanza después de 1 segundo.

Una vez introducida la expresión de la función se ajusta la ventana para mejorar la representación que se ha obtenido.



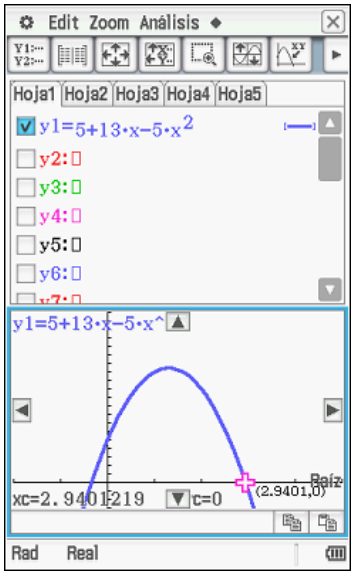


Utilizando la opción **Corte y** que se encuentra en el menú **Resolución G** dentro de **Análisis** determinamos el punto de corte con el eje de ordenadas, que corresponde a la altura desde la que se lanzó la partícula.

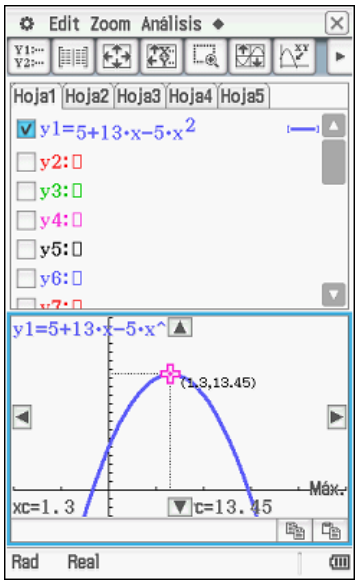


Por tanto, se lanzó desde 5 metros.

El momento en el que la partícula cae al suelo lo obtendremos calculando el punto de corte con el eje X, seleccionando para ello la opción **Raíz** que encontramos en el mismo menú anterior.



De manera análoga, obtendremos la altura máxima con ayuda de la función **Máx.**

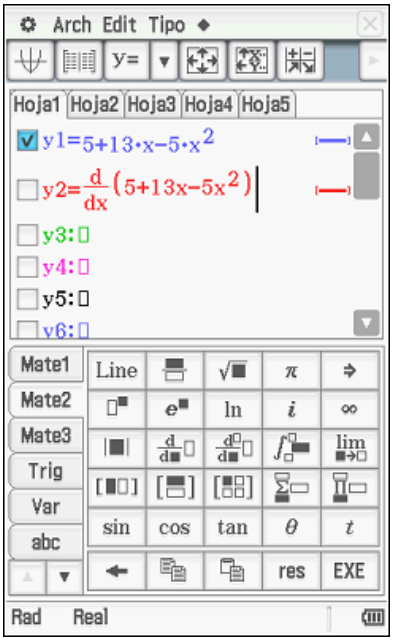


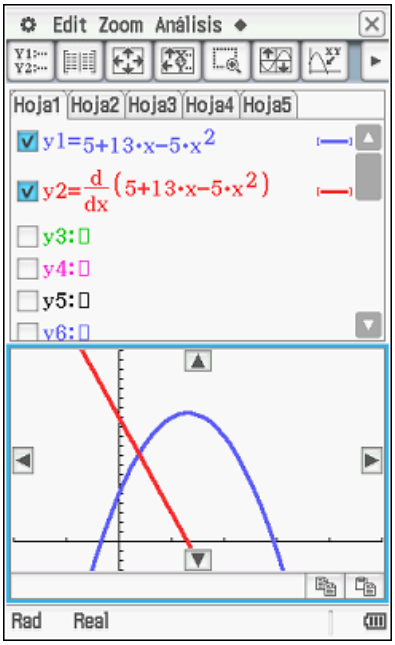
Para hallar de manera gráfica la velocidad será necesario dibujar la función correspondiente a la primera derivada.

Como se indicó en el tema anterior, la derivada de una función se obtiene a través de la función **diff**.

Por tanto, definimos una nueva función cuya expresión será la derivada de la función anterior.

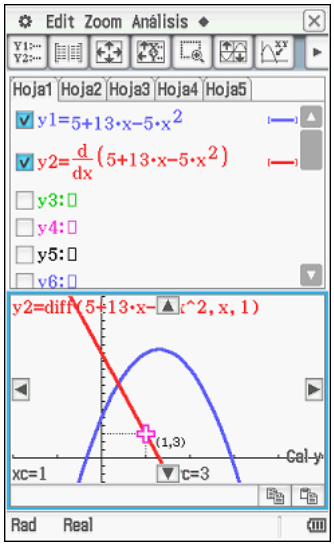
A continuación, representamos las dos gráficas.

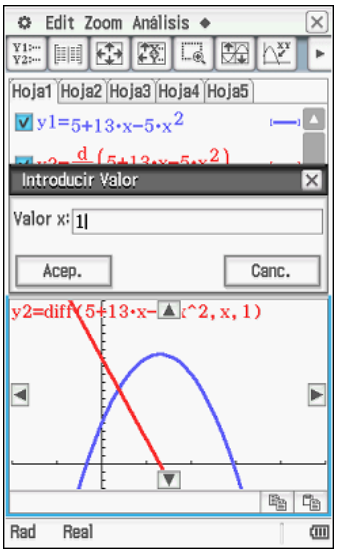




Para hallar la velocidad después de 1 segundo utilizaremos la opción **Cal y** para hallar el valor para **x=1** en la función **y2** que corresponde a la derivada.

Antes de solicitar el valor es necesario determinar la función en la que se desea calcular dicho valor.





ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Representa las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$ b) y= $\dfrac{x^3}{6x^2-x-8}$ c) y= $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$ d) y= $\dfrac{x}{|x|+1}$

e) $y=\dfrac{x^5}{x^4+1}$ f) y= $\sqrt{x^2+3x-1}$ g) y= $\sqrt[3]{x^3-6x}$ h) y= $\dfrac{2^x}{x}$

i) y= $x^2 \ln x$ j) y= xcosx k) y= x- $\dfrac{senx}{x}$ l) y= sen2x-cos2x

m) y= cosec3x n) $\dfrac{x-1}{senx}$

2. Dibuja las funciones siguientes expresadas en forma paramétrica:

a) x= $\dfrac{t-8}{t^2-4}$; y= $\dfrac{3}{t(t^2-4)}$ *b*) x= $\dfrac{2+t^2}{1+t^2}$; y= $\dfrac{t^3}{1+t^2}$

c) x= t+sent; y=t+cost d) x= 2cost; y=tg2t

3. Dibuja las funciones expresadas en forma polar:

a) $r=\dfrac{\theta}{\theta-1}$ b) $r=\dfrac{1}{\cos 3\theta}$ c) $r=2|1+tg\theta|$

d) $r=1+\cos\theta$ e) $r=2\cos\theta$ f) $r=3\cos 5\theta$

4. Representa la función r = 3senθ - θcosθ, en los intervalos: [0, 2 π] y [-2 π, 2 π].

5. Determina los distintos elementos de la función $y=x^3-2x^2-x+2$

6. Estudia la función $y=x^5-4x^3+2x$

7. La temperatura T, en grados centígrados, que adquiere una pieza sometida a un proceso viene dada en función del tiempo t, en horas, por la expresión

$T(t)=15t-3t^2$ con $0\le t\le 5$

a) Representa la función T y determina la temperatura máxima que alcanza la pieza.

b) ¿Qué temperatura tendrá transcurrida 1 hora? ¿Volverá a tener esa misma temperatura en algún otro instante?

8. Resuelve gráficamente las siguientes ecuaciones:

a) $x\cdot\ln x=1$ b) $5^x-x=2$

9. Dada la función $y=x^5+x^2-2$, representa la función y las derivadas primera y segunda. Estudia la monotonía, los extremos relativos, curvatura y puntos de inflexión de la misma, comparando la función con sus derivadas. A continuación prueba el icono  .

10. Representa los polinomios de Taylor de grado menor o igual a tres de la función $y = \ln(1+x)$ en x=1

11. Sean las siguientes funciones polinómicas.

a) $y = 2x^3 + 5x^2 - 6x - 9$

b) $y = x^3 - 3x^2 + 4$

c) $y = x^9 - 6x^8 + 9x^7 + 8x^6 - 24x^5 + 16x^3$

d) $y = 2x^6 - 14x^5 + 36x^4 - 40x^3 + 16x^2$

- Halla la descomposición factorial de las mismas (desde la aplicación Main).
- Analiza gráficamente el comportamiento de la función en sus raíces, según la multiplicidad de las mismas sea par o impar.

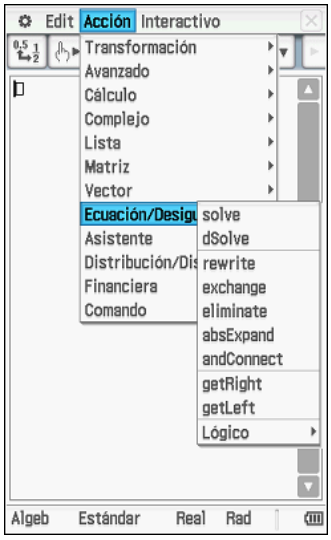
Tema 5.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES E INECUACIONES. RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES.

- Introducción
- Resolución de ecuaciones
- Resolución de sistemas
- Resolución de inecuaciones y de sistema de inecuaciones
- Resolución numérica de ecuaciones
- Actividades

INTRODUCCIÓN

La calculadora posee en el menú **Principal** un submenú de **Acción** y en él, un menú secundario llamado **[Ecuación/Desigualdad]** que contiene comandos relacionados con ecuaciones y desigualdades e inecuaciones, para resolverlas de manera rápida y sencilla.

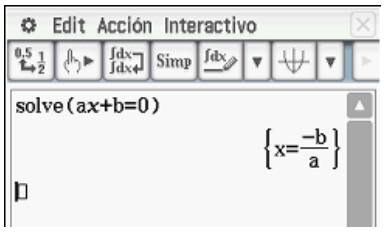


Pasamos a ver el uso de algunos de dichos comandos y ejemplos de uso.

- **Solve** (Devuelve la solución de una ecuación o desigualdad)

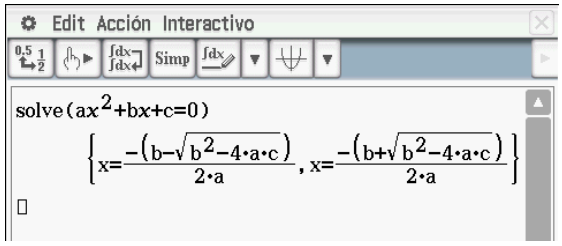
Ejemplo 1

Resolver la ecuación $ax+b=0$



Ejemplo 2

Resolver la ecuación $ax^2+bx+c=0$



Observa que para ver el resultado completo hemos activado Resizable Mode con el botón derecho del ratón

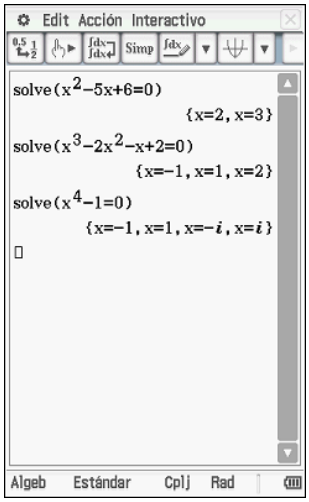
Ejemplo 3

Resolver las ecuaciones:

$$x^2-5x+6=0$$

$$x^3-2x^2-x+2=0$$

$$x^4-1=0$$



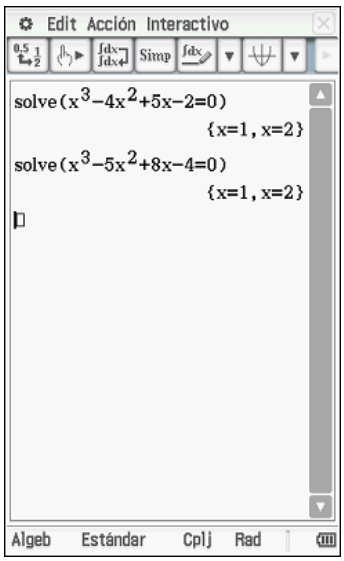
Para la última ecuación hemos de tener activado el Modo Complejo (Cplj)

Ejemplo 4.-

Resolver las ecuaciones:

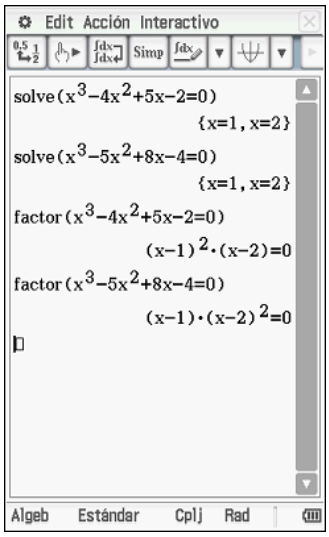
$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$$



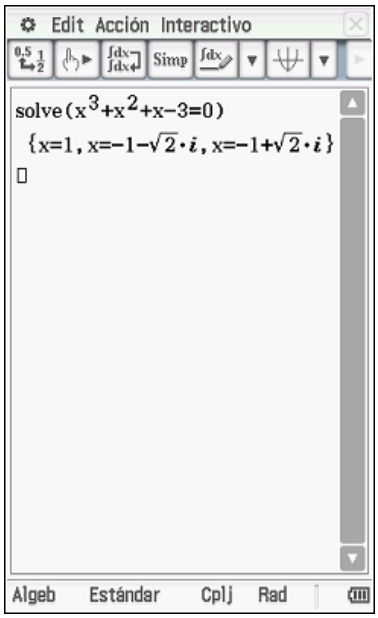
En estas ecuaciones se observa que hay soluciones dobles; sin embargo la calculadora no proporciona información de cuál de ellas es, ya que en la primera ecuación la solución doble es x =1 y en la segunda es x = 2.

Para saberlo se pueden factorizar las ecuaciones como sigue:



Ejemplo 5

Resolver la ecuación $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$

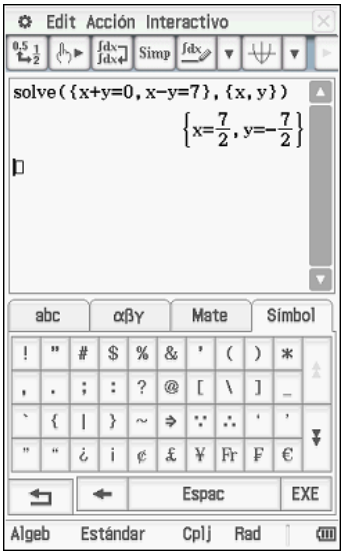


RESOLUCIÓN DE SISTEMAS

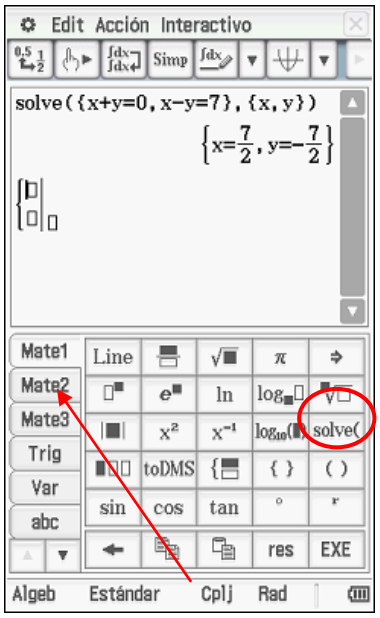
La calculadora ClassPad II también resuelve sistemas; el sistema debe ir entre llaves, separada cada ecuación por comas, y al final hay que indicar respecto de qué variables se está resolviendo.

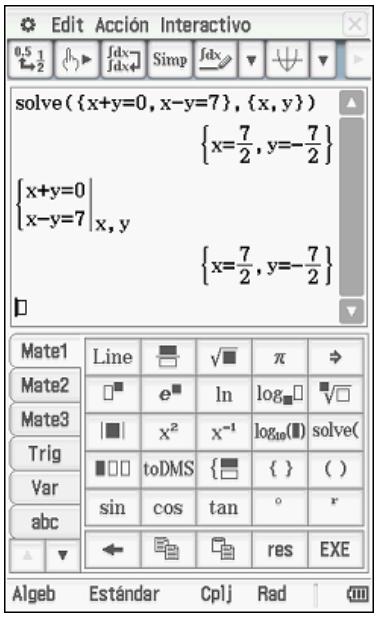
Ejemplo 6

Resolver el sistema: $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=7 \end{cases}$



También se puede introducir (y más fácilmente) con el teclado virtual ***2D***

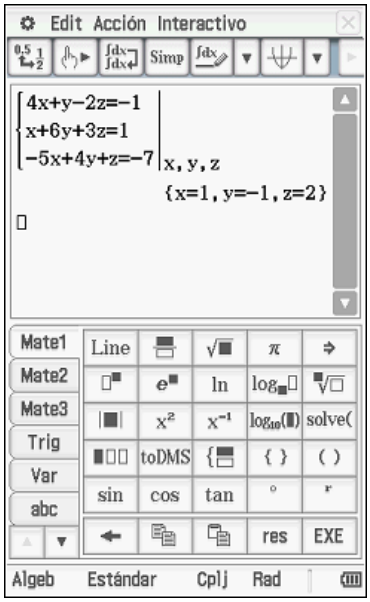




Ejemplo 7

Resolver el sistema: $\begin{cases} 4x+y-2z=-1 \\ x+6y+3z=1 \\ -5x+4y+z=-7 \end{cases}$

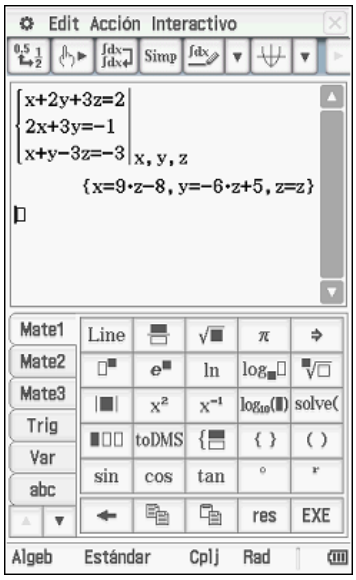
Para introducir más de 2 ecuaciones se pulsa otra vez la tecla ).



Es un sistema compatible determinado.

Ejemplo 8

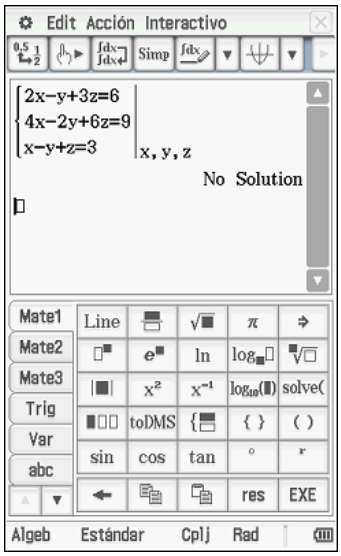
Resolver el sistema: $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ 2x+3y=-1 \\ x+y-3z=-3 \end{cases}$



Como se puede observar, se trata de un sistema compatible indeterminado.

Ejemplo 9

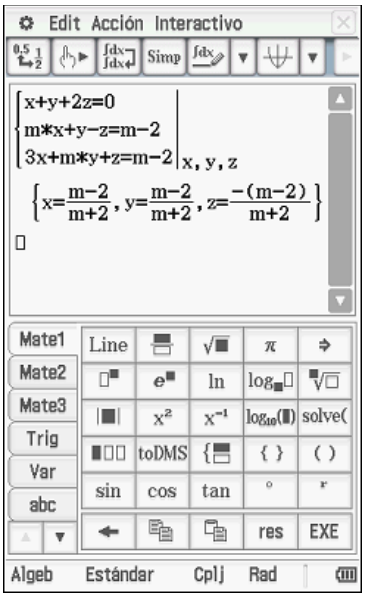
Resuelve el sistema: $\begin{cases} 2x - y + 3z = 6 \\ 4x - y + 6z = 9 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$



Es un sistema incompatible.

Ejemplo 10

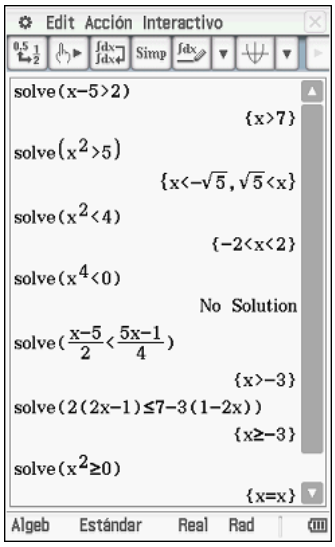
Resolver el sistema dependiente de un parámetro: $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ mx + y - z = m - 2 \\ 3x + my + z = m - 2 \end{cases}$



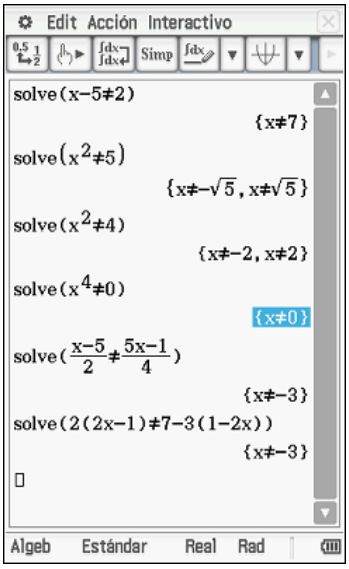
Se observa que si m es distinto de -2 el sistema es compatible.

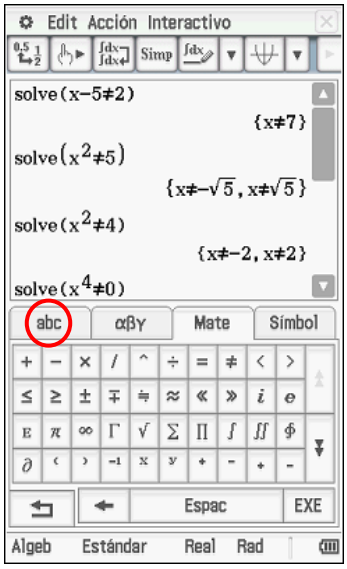
RESOLUCIÓN DE INECUACIONES y SISTEMAS DE INECUACIONES

Para resolver inecuaciones con una incógnita se procede igual; obsérvense estos ejemplos:

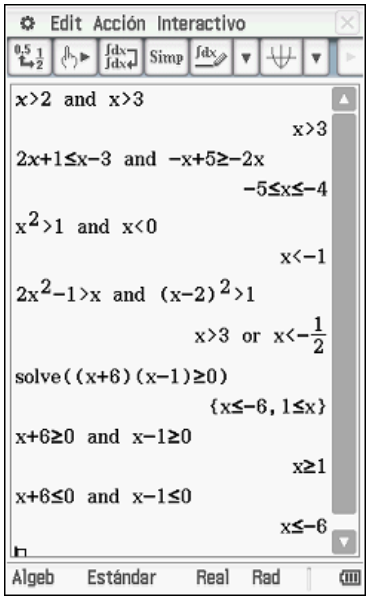


También se puede utilizar el operador ≠ que se encuentra en Keyboard, en el apartado abc, en la pestaña Mate



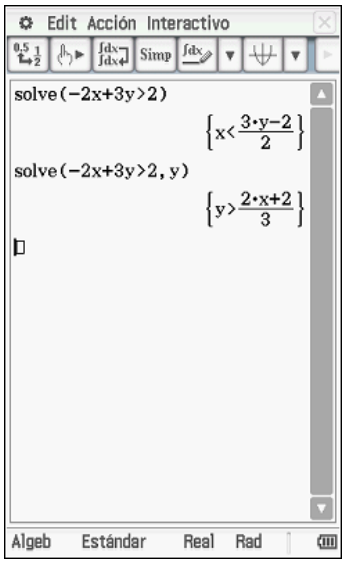


Para resolver sistemas de inecuaciones con una incógnita se utiliza el operador lógico "**and**", de la siguiente forma:

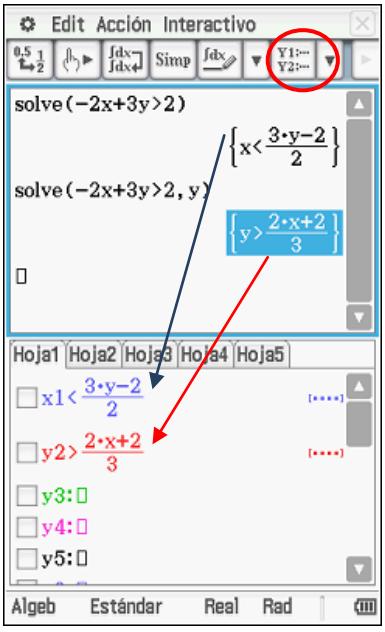


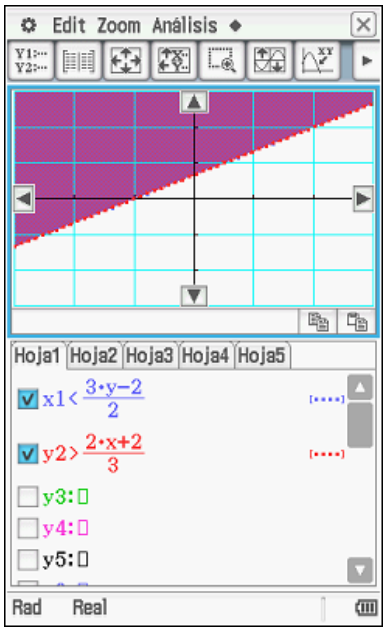
Se observa que resolver los dos últimos sistemas equivale a resolver la ecuación que les precede.

Para inecuaciones con dos incógnitas procedemos de forma similar:



Aunque observamos que el comando Solve no nos resuelve los sistemas de inecuaciones, debemos representar dichas desigualdades para obtener la solución:



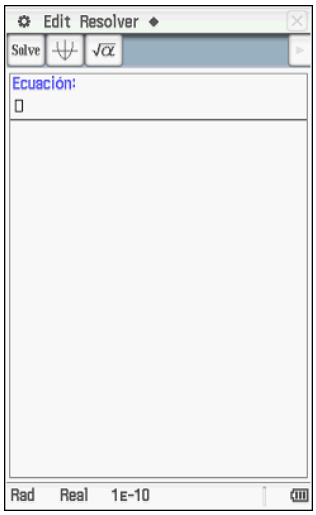


El conjunto solución está formado por los puntos del semiplano superior.

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES

Con esta aplicación puede determinarse el valor de cualquier variable de una ecuación sin necesidad de transformarla, simplificarla o resolverla.

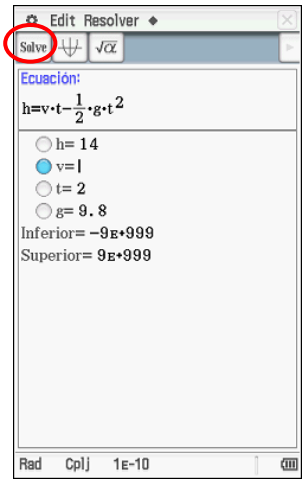
Para arrancar dicha aplicación hay que activar ***Resolución Numérica*** en el menú de aplicaciones. Ésta aplicación calcula aproximaciones basadas en el método de Newton, La precisión depende de lo cerca que esté a cero sea el valor **[Izqu. -Derecho].**

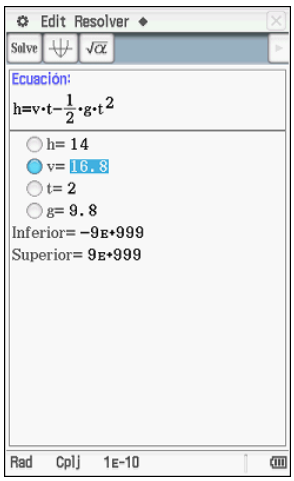


Ejemplo 1

Calcular la velocidad inicial de un objeto arrojado en el aire y que toma un tiempo de 2 segundos para alcanzar una altura de 14 metros, cuando la aceleración de la gravedad es de 9'8 m/s² . Utilizamos para ello: $h = v \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$

Para resolver el problema deberíamos despejar v y sustituir los valores de las variables que nos dan. Pero con nuestra aplicación será mucho más fácil pues no hace falta despejar, simplemente escribimos la fórmula y los valores de los datos que tenemos, a continuación pulsamos Solve





ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

$a)\ \frac{3(x+1)}{2}-x=\frac{x-4}{3}$ $\quad b)\ \frac{x+2}{2}-3(x+1)=\frac{-5x}{2}-2$

$c)\ x^2+3x+2=0$ $\quad d)\ x^2-2x+1=0$

$e)\ 6x^2-x+2=0$ $\quad f)\ x^2-6\sqrt{2x}+18=0$

$g)\ 1+(x+2)^2=1$ $\quad h)\ x^4-5x^2+4=0$

$i)\ x^4+x^2-2=0$ $\quad j)\ -x^4-4x^2-45=0$

2.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

$a)\ x(x+\pi)(x-0.5)=0$ $\quad b)\ x^2-(2x+1)(x+1)=0$

$c)\ x^4-x^3-4x^2+4x=0$ $\quad c)\ x^5-3x^4-8x^3+12x^2+16x=0$

$e)\ x^5+3x^4-5x^3-15x^2+4x+12=0$ $\quad f)\ \sqrt{2x-5}+x=10$

$f)\ \sqrt{x-3}+\sqrt{3x-5}=6$ $\quad g)\ \sqrt{\frac{x+4}{x-4}}=x-2$

3.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$a)\begin{cases}2x+y-z=5\\x-y+2z=-3\\3x-2y+z=-2\end{cases}$ $\quad b)\begin{cases}x-2y+3z=-3\\2x+y=2\\-x-8y+9z=3\end{cases}$

$c)\begin{cases}x-2y+z=0\\x+y-2z=-3\\-2x+5y-z=5\\3x-2y+z=2\end{cases}$ $\quad d)\begin{cases}2x-5y+12z=9\\4x-y-2z=-2\\2x+4y+10z=-11\end{cases}$

$e)\begin{cases}2x-5y+3z=1\\x+3y-z=0\\3x-2y+2z=1\end{cases}$ $\quad f)\begin{cases}3x+5y-8z=2\\5x+3y-8z=2\\-8x+5y+3z=2\end{cases}$

4.- Discute y resuelve cuando sea posible:

$a)\begin{cases}-3x+ky-5z=-4\\2x+ky-5z=-4\\x+y+z=2\end{cases}$ $\quad b)\begin{cases}kx+y+z=k\\x+ky+z=k\\x+y+kz=k\end{cases}$

5.- Resuelve las siguientes inecuaciones y sistemas de inecuaciones:

$a)3-5x\le 8$ $\quad b)2(x-2)+3x<5x+6$ $\quad c)\frac{2x-3}{8}-\frac{5x-1}{2}<\frac{3x}{4}$

$d)x^2-6x+5>0$ $\quad e)\ x^2-1\ge 0$ $\quad f)x^2+6x+9>0$

$g)2x^2-3x+25<0$ $h)3(x^2-1)-5(x-2)<0$ $i)\dfrac{2x-1}{5}\le\dfrac{3x^2}{2}$

$j)x^3-x^2-4x+4\ge 0$ $k)x^4+2x^2+1>0$ $l)\left(x^2-2\right)\left(x^3-1\right)>0$

$m)\dfrac{x+1}{x-2}>0$ $n)\dfrac{2x-1}{x}\le 0$ $o)\dfrac{x^2-3x-4}{x}<0$

$p)\begin{cases}5x+2\ge 2(x+4)\\ 2x-1<3x+2\end{cases}$ $q)\begin{cases}3-5x<8\\ 5x-1\ge 3x-1\end{cases}$ $r)\begin{cases}x\le 3\\ x<4\\ 2(x-1)>5\end{cases}$

6.- Utilizar una única expresión para calcular el precio final de un artículo (P) conocido el precio inicial (A) y el IVA correspondiente (I).

Aplíquese lo anterior para calcular (mediante ejemplos): el precio inicial, conocido el final; el iva aplicado, conociendo los dos precios; aumentos porcentuales y disminuciones porcentuales.

7.- Aplicación a la Ley de los gases (Leyes de Boyle - Mariotte y Charles y Gay - Lussac).

Cierta cantidad de gas, que ocupa un volumen de 32 litros a – 73 ^{0}C y 102 atm de presión, se comprime ejerciendo sobre él una presión de 204 atm, al tiempo que se calienta hasta alcanzar 127 ^{0}C. ¿Cuál será al volumen?

Tema 6.

INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS FINANCIERAS: INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO

- Introducción.
- Moverse en la aplicación financiera.
- Interés simple.
- Interés compuesto.
- Ejercicios propuestos.

INTRODUCCIÓN

En este tema vamos a introducir a la aplicación financiera de la calculadora. Con la única pretensión de que el material propuesto sea de utilidad para el profesorado de Educación Secundaria, se darán a conocer los puntos correspondientes a interés simple e interés compuesto.

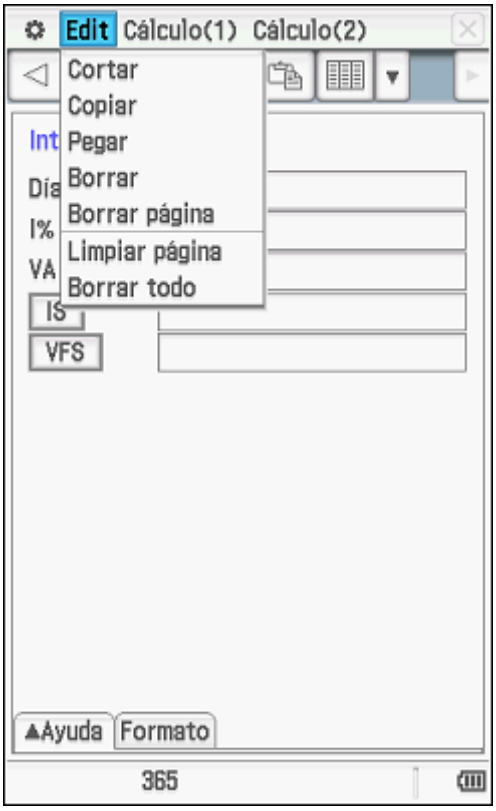
Encontraremos la aplicación financiera en el menú principal:

Una vez dentro nos aparecerá la siguiente pantalla:

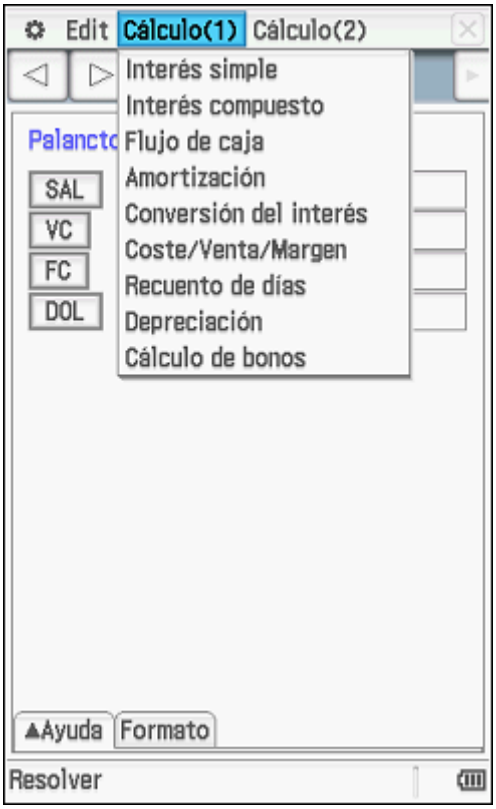
MOVERSE EN LA APLICACIÓN FINANCIERA

Una vez entramos en cualquiera de las aplicaciones (interés simple, interés compuesto, amortización, flujo de caja…), podremos cambiar de aplicación financiera de dos maneras:

a) Utilizando la opción “borrar todo”, dentro de la pestaña EDIT. De esta manera volveríamos al menú principal de la aplicación financiera.

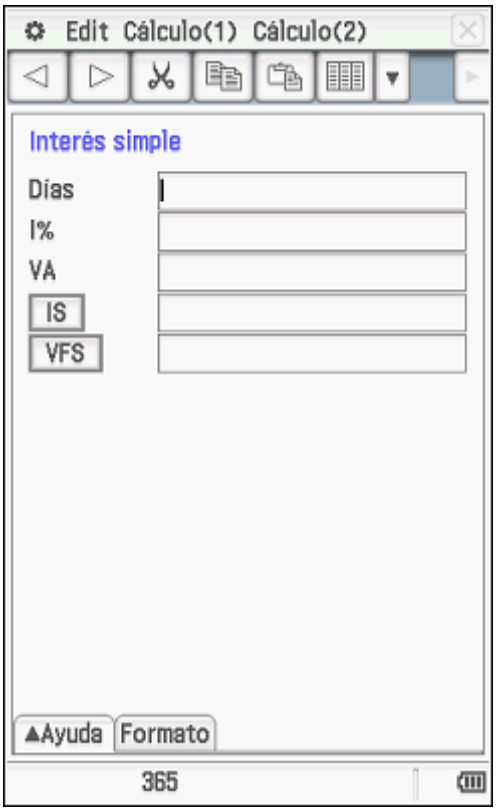


b) Utilizando cualquiera de las pestañas “Cálculo(1)” o “Cálculo(2), si lo que queremos es cambiar directamente de aplicación financiera (estas pestañas nos mostrarán lo mismo que el menú financiero).



INTERÉS SIMPLE

Dentro de la aplicación financiera, seleccionaremos la casilla "Interés simple" para que nos aparezca la siguiente pantalla:



Hay cinco casillas, tres de las cuales han de ser rellenadas obligatoriamente por el usuario. Las casillas que van enmarcadas (en este caso, IS y VFS) son las casillas que la aplicación usará para mostrar los cálculos.

Días: En esta casilla escribiremos el número de días del que consta el período de inversión. En el caso de un año se introducirá 365. Dos años 730, y así sucesivamente. La Classpad 400 permite realizar operaciones dentro de las casillas, de modo que podemos poner 2*365, 3*365…

I%: Aquí introduciremos el **interés anual**, en tanto por ciento.

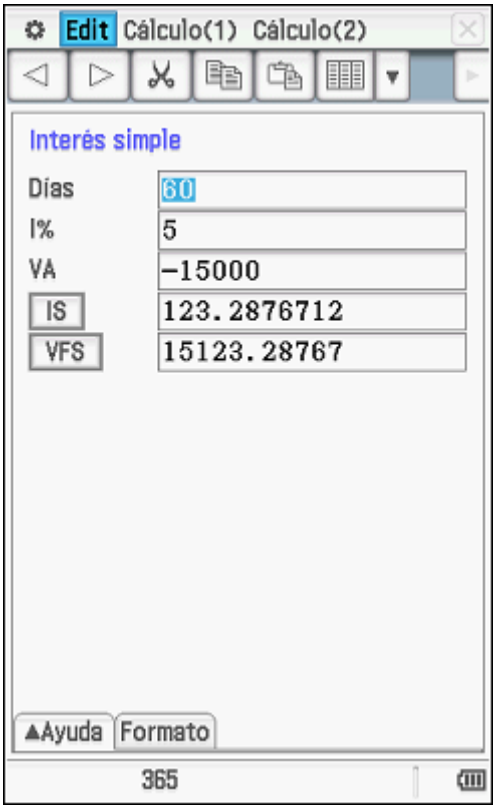
VA: Cantidad inicial. Es importante introducirla con signo negativo para que el resultado sea positivo. Viene a indicar la cantidad de la cual el inversor se desprende, de ahí el signo negativo. Si lo introducimos con signo positivo, estaremos indicando que hemos recibido un préstamo con la cantidad indicada.

IS: Interés simple. Pinchando en el cuadro, y después de haber introducido los valores anteriores, nos aparecerá calculado el interés obtenido por la cantidad invertida al tanto por ciento indicado durante el número de días que se han introducido.

VFS: Nos devuelve el valor futuro (hay que pinchar en él para que aparezca), es decir, a la cantidad inicial le suma el interés obtenido.

Ejemplo1.- Un inversor ingresa 15000 € en una cuenta que le reporta un interés simple anual del 5%. ¿Cuál es el interés obtenido después de 60 días?

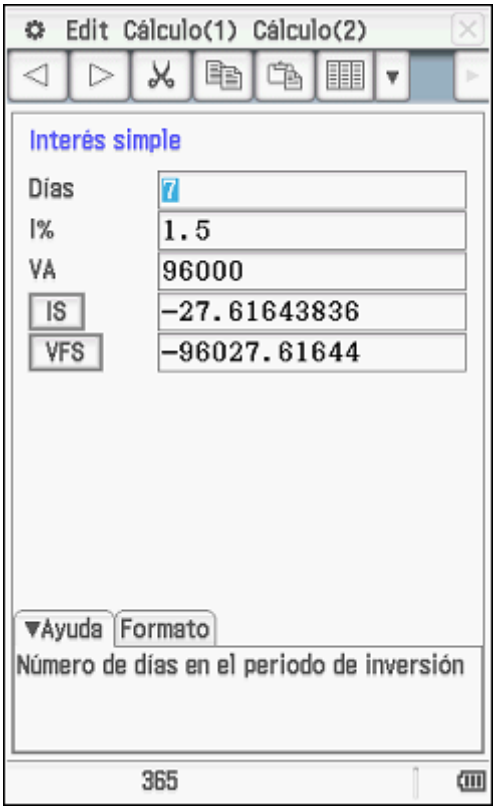
Introducimos los valores dados en el problema. Días=60; I%=5; VA= -15000, y pinchamos en las casillas IS y VFS para obtener resultados.



La solución es que el interés que obtendremos será de 123.29 €, y nuestro nuevo capital será de 15123.29 €.

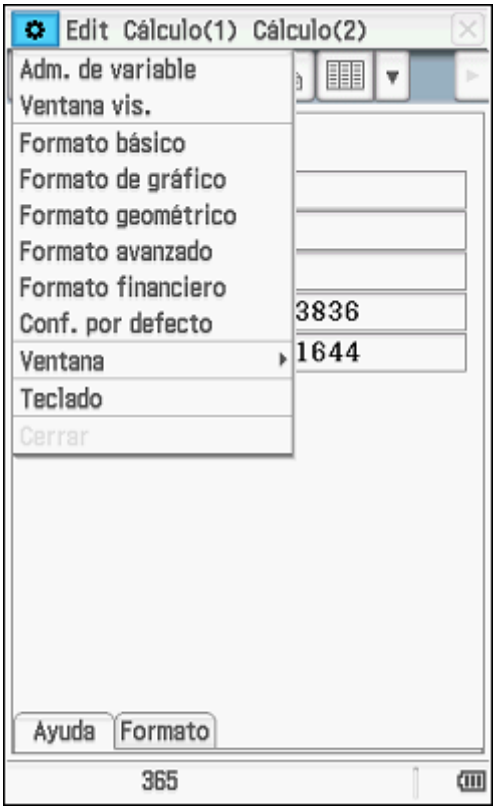
Ejemplo 2.- Un empresario solicita un préstamo de 96000 € a un interés simple anual del 1,5%, pero decide devolverlo después de 7 días. ¿Cuál es la cantidad que tendrá que devolver?

En este caso, la cantidad VA la fijaremos en positivo, indicando que se trata de un dinero recibido.

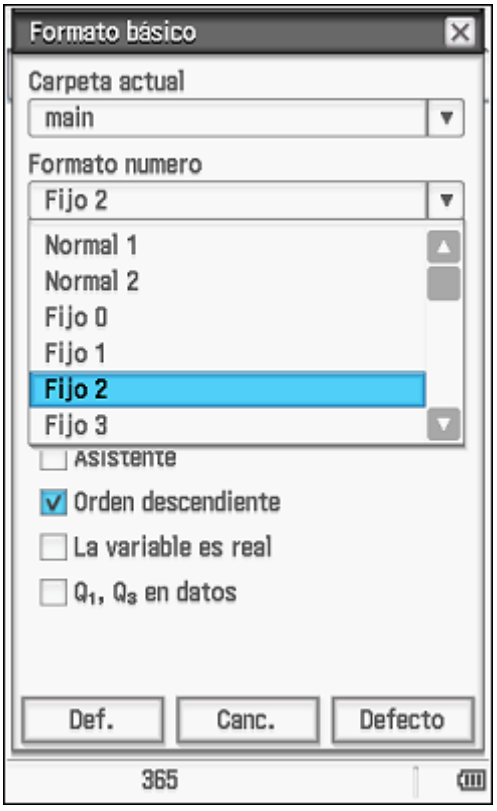


Como vemos, el empresario tendrá que devolver 27.62 euros más de los que ha recibido.

Cabe observar que en el ejemplo 2 nos hemos visto obligados a redondear las cantidades para no tener que trabajar con tantas cifras decimales. En muchas ocasiones, sobre todo cuando hablamos de dinero, puede resultar interesante permitir que la calculadora fije dos decimales, haciendo por nosotros el redondeo y evitándonos cifras no significativas. Para ello nos vamos al menú  y entramos en "**formato básico**".

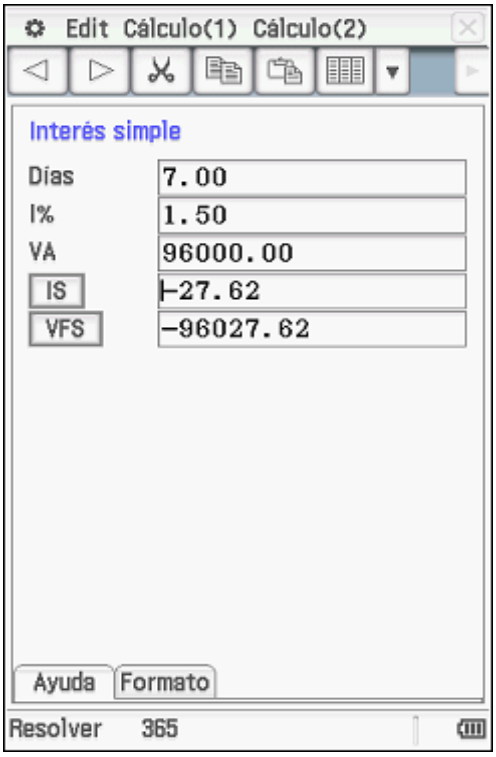


Una vez dentro, en la pestaña desplegable “formato número” marcamos “fijo2, tal y como se muestra en la imagen:



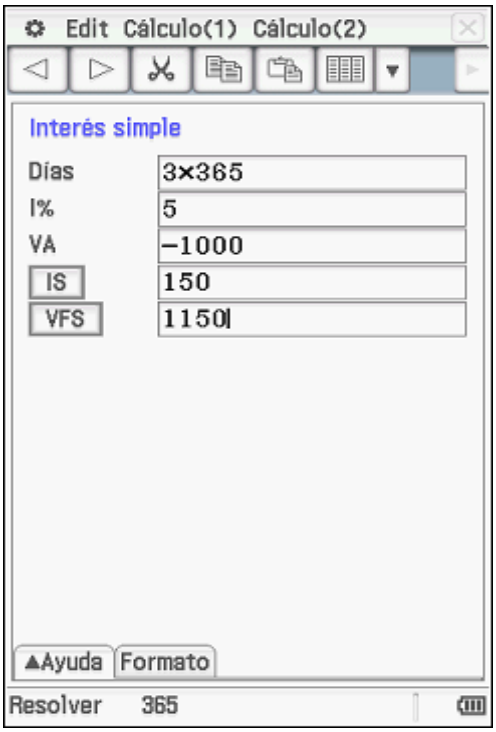
Para finalizar, pulsamos la tecla Def que nos encontramos abajo a la izquierda.

Con estos cambios, el ejemplo anterior nos daría la siguiente salida en pantalla:



Ejemplo3.- ¿En qué cantidad se convierten 1000€ depositados a un interés simple del 5% anual durante 3 años?

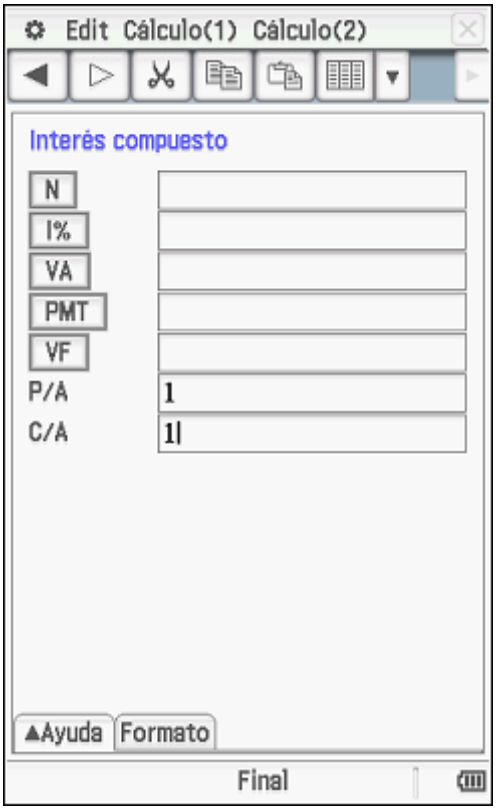
Introducimos los datos teniendo en cuenta que ahora los días son 3 x 365



Luego la solución será 1150€

INTERÉS COMPUESTO

Volvemos a la aplicación financiera (también podemos utilizar la pestaña "cálculos") y seleccionamos "Interés compuesto". Nos aparecerá la siguiente pantalla:



N: es el número de plazos

I%: es el interés anual

VA: es el valor inicial. Al igual que en el interés simple, si se realiza una inversión lo introduciremos en negativo.

PMT: es la cantidad que retiramos en cada período. Si no retirásemos nada, nos bastaría con colocar un 0 en esta casilla.

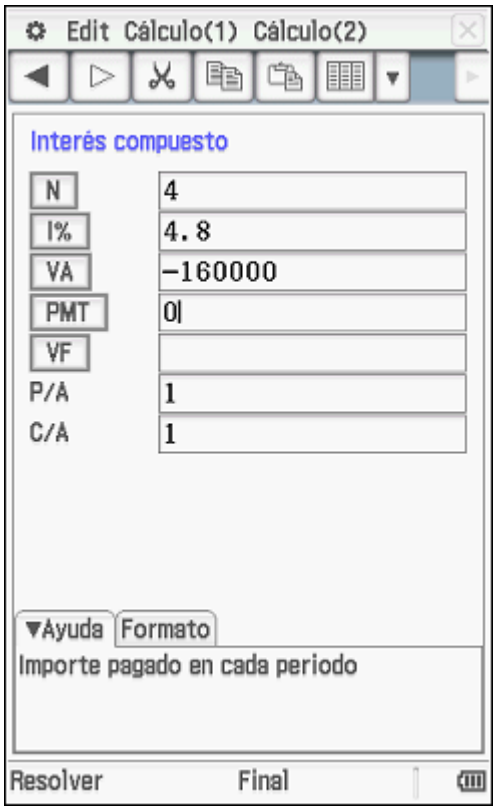
VF: es la cantidad final o valor futuro.

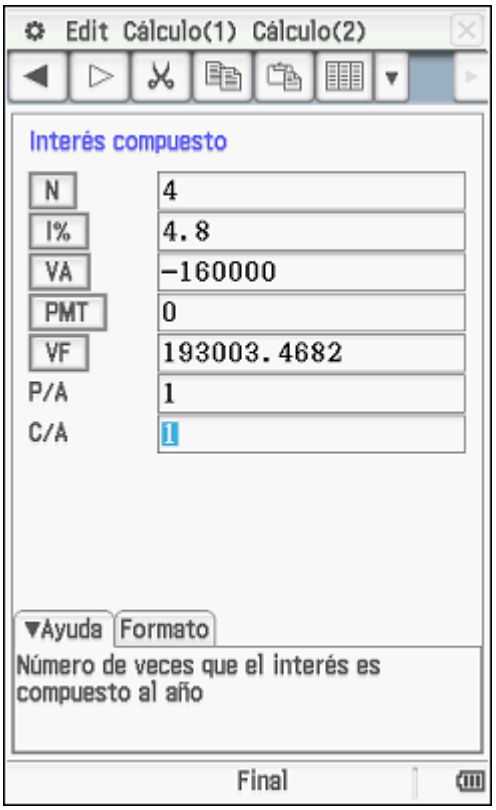
P/A: es el número de plazos cada año. Por lo general irá un 1 en esta casilla, aunque veremos ejemplos en los que puede ir otra cantidad.

C/A: Indica el número de veces en que el interés es compuesto al año.

Ejemplo1: Un banco paga el 4.8% anual por depósitos a plazo fijo. Depositamos 160000€ en la cuenta. ¿Cuánto dinero podremos retirar al cabo de 4 años?

Introducimos los valores en la Classpad: el número de plazos es 4 (4 años), el interés es 4.8, y VA=-160000. En PMT pondremos un 0, y dejamos los valores 1 por defecto en las dos casillas inferiores. Al pulsar en valor futuro obtenemos que el dinero a retirar al cabo de los 4 años es 193003.46 €.





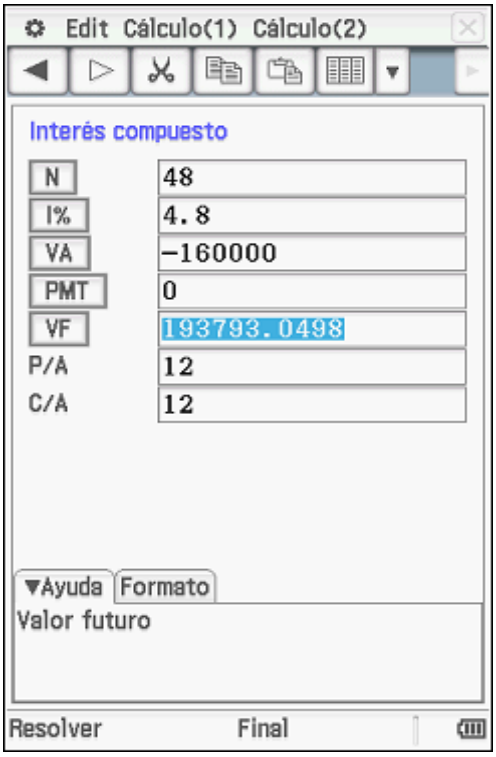
Esta operación es equivalente a multiplicar 160000 por 1.048^4.

La mayor utilidad de la aplicación consiste en que ésta te permite calcular cualquiera de las otras incógnitas de una manera muy sencilla. De hecho, cabe observar que los valores a introducir están metidos en un cuadro, lo cual significa que son valores calculables siempre y cuando hayamos introducido el resto de las variables necesarias.

Veamos algunos ejemplos de esto:

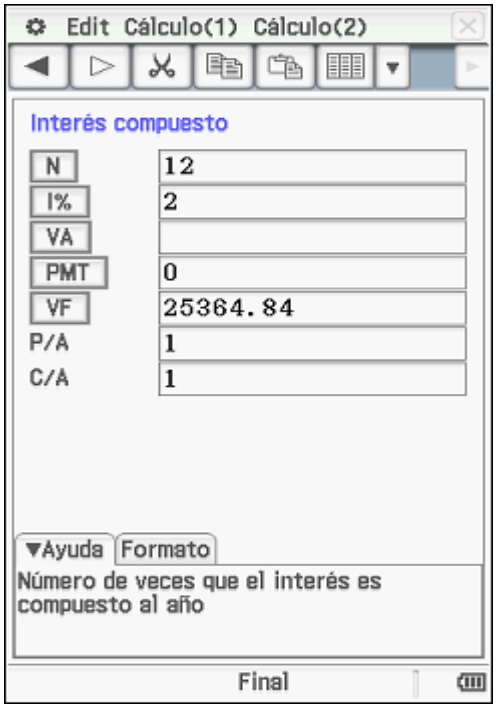
Ejemplo2: ¿En cuánto se transforman 160000 € depositados 4 años al 4.8% anual, si el período de capitalización es mensual?

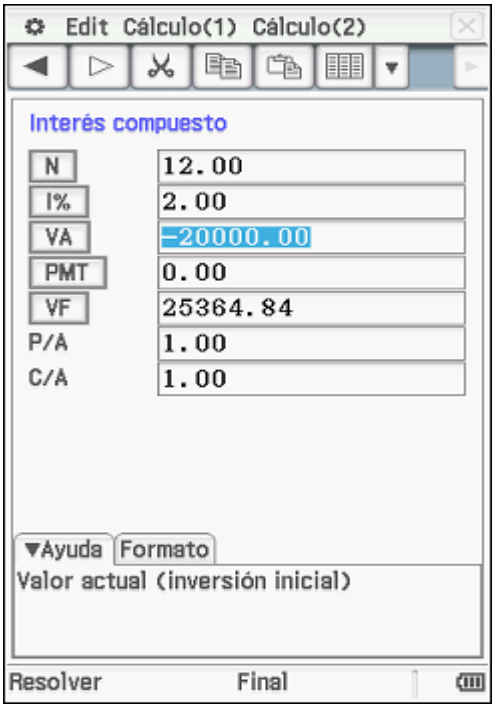
En este caso, el número de plazos será 12x4=48. Además pondremos un 12 en las dos casillas inferiores.



Ejemplo3.- ¿Cuál es el capital ingresado si después de permanecer 12 años al 2% anual tenemos un montante de 25364.84 €?

En este ejemplo las variables a introducir son otras. El número de plazos será 12, el valor final 25364.84, y el interés 2. Como no retiramos nada, a PMT le volvemos a dar como valor un 0. Una vez introducidos los datos, pinchamos en VA para saber cuál era la cantidad ingresada.

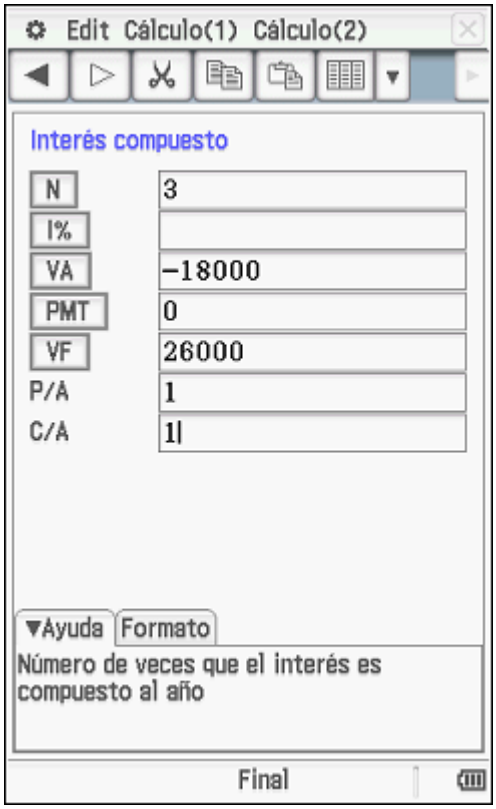


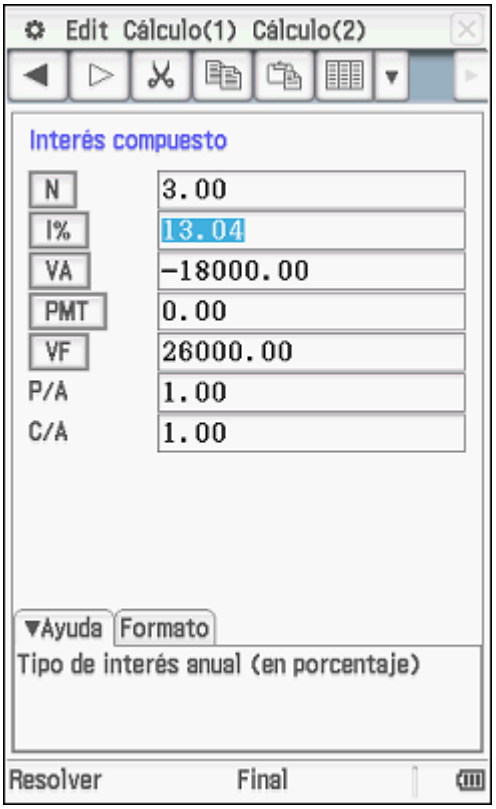


Podemos observar que seleccionando la pestaña “ayuda” en la parte inferior de la pantalla, se nos indica en cada momento qué representa la casilla en la que situamos el cursor.

Ejemplo4.- Un capital de 18000 € ha estado invertido durante 3 años, después de los cuales se obtuvo un montante de 26000 €. ¿A qué interés anual se realizó la operación?

En este ejercicio hay que rellenar todos los campos excepto el interés, que es lo que deseamos averiguar.

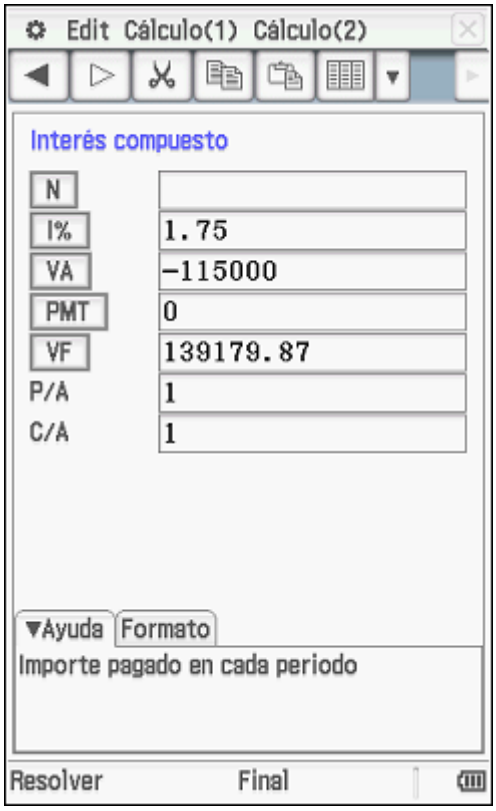


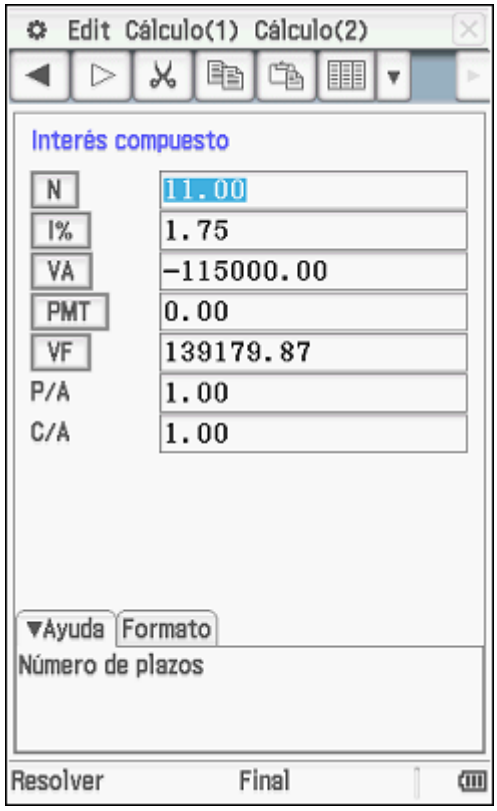


De esta forma comprobamos que nos han aplicado un interés bastante elevado: un 13.04% anual.

Ejemplo5.- ¿Dentro de cuánto tiempo una persona que invirtió 115000 € al 1.75% anual obtendrá un montante de 139179.87 €?

En este tipo de ejercicios resulta especialmente interesante fijar el número de decimales, ya que posiblemente el valor del montante final haya sido redondeado. Introducimos todos los datos en la Classpad 400 y pinchamos en N para saber cuántos años ha permanecido el capital ingresado.



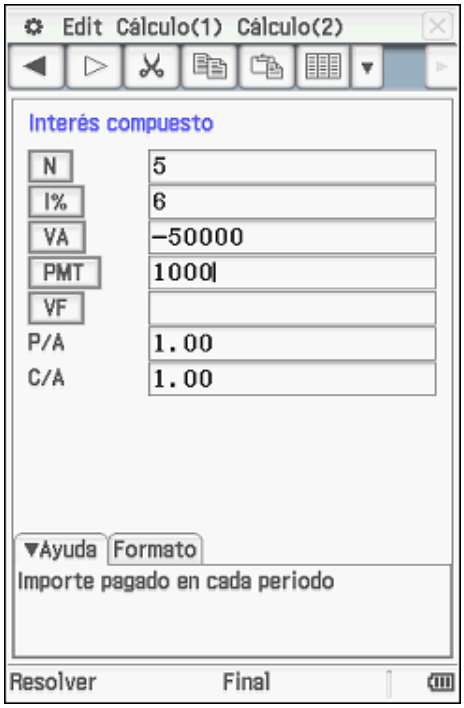


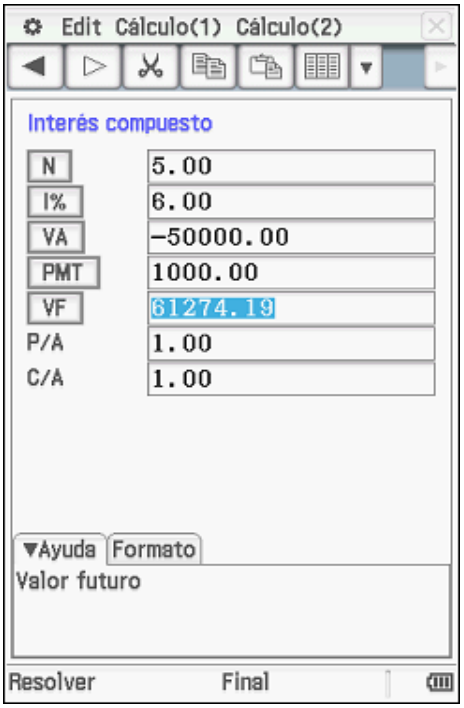
El dinero ha estado ingresado 11 años.

Veamos en el siguiente ejemplo qué ocurre cuando sacamos del fondo de inversión una cierta cantidad cada año.

Ejemplo 6.- Ingresamos un capital de 50000 € al 6% anual durante 5 años. Si cada año sacamos 1000 €. ¿Cuánto dinero habrá después de 5 años?

En este caso marcamos la casilla PMT=1000, indicándole a la aplicación que en cada período, después del cobro de intereses anuales, retire 1000 €.

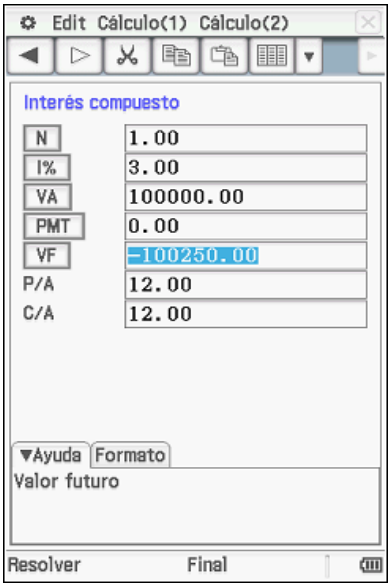




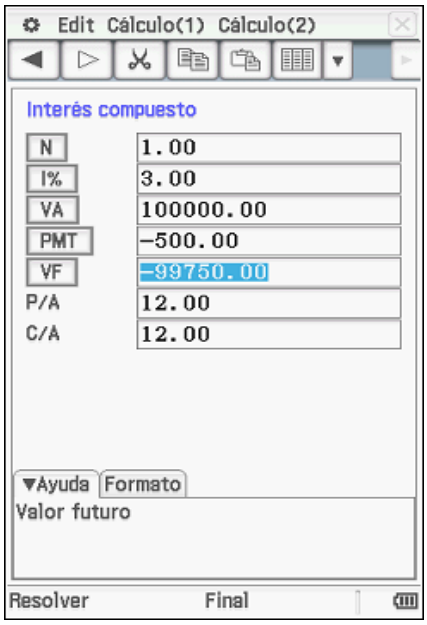
La cantidad final obtenida, 61274.19 €, está calculada considerando que hemos terminado cobrando intereses y sacando 1000 € por quinta vez.

Ejemplo 7.- Solicitamos un préstamo hipotecario al 3% anual. Si el prestamista me hace pagar una letra de 500 euros mensuales, ¿lograremos alguna vez deshacernos del préstamo?

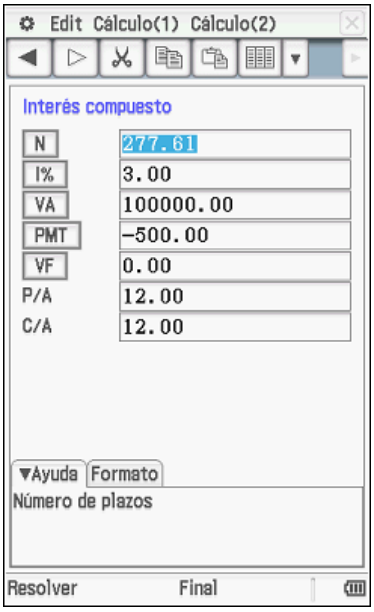
En este interesante ejemplo, marcaremos las dos casillas inferiores con un 12, mientras que la N será igual a 1, ya que nos interesa saber cuánto pagaremos cada mes.



Podemos observar que la deuda después de un mes ha aumentado en 250 euros, de modo que si tuviésemos una letra de 500 euros mensuales, esto implicaría que estaríamos pagando 250 euros de intereses, y 250 € de capital. Dicho de otro modo, durante el primer mes nos habríamos quitado 250 € del capital. Podemos verlo marcando PMT = -500.



La respuesta es que sí acabaríamos deshaciéndonos de este préstamo. ¿Cuándo? Para conocer esta respuesta, tenemos que poner un 0 en VF (indicando así que nuestra deuda está a 0), y pinchamos en N para saber cuántos meses necesitaríamos. Como vemos en la pantalla siguiente, son 277 los meses que plazos que habremos de pagar, algo más de 23 años.



ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- Un capital de 600 € está produciendo durante 90 días al 6% anual. ¿Cuál es el interés que produce?

2.- ¿Qué interés recibiremos por una inversión de 4500€ al 4% anual si se retira 2 meses y 9 días después del comienzo de la inversión?

3.- ¿En cuánto se convierten 2000€ durante 10 años al 4% anual de interés compuesto? ¿Y durante 6 meses?

4.- ¿En cuánto se transforman 3000 € depositados 7 años al 2,5% anual, si el período de capitalización es mensual?

5.- Después de permanecer 5 años al 4% anual hemos recibido un montante de 4349,53 ¿Cuál es el capital ingresado?

6.- Si hemos obtenido un montante de 1286,15€ después de depositar una capital de 600€ durante 8 años. ¿A qué interés anual se realizó la operación?

7.- ¿Cuánto tiempo habrá que dejar un capital al 2% para que se duplique?

8.- Ingresamos un capital de 35000 € al 8% anual durante 7 años. ¿Cuánto dinero habrá después de 7 años? ¿Y si vamos retirando 2000€ al año?

9.- Hemos solicitado un préstamo hipotecario de 120.000 euros al 4% de interés anual. Si cada mes pagamos una letra de 600 euros, ¿cuánto tiempo tardaremos en devolverlo?

Tema 7.
CÁLCULO MATRICIAL

- Introducción
- Creación de matrices desde la aplicación Principal
- Cálculos básicos con matrices
- Comandos relacionados con la creación de matrices: El menú secundario [Matriz-Crear]
- Comandos relacionados con los cálculos matriciales: El menú secundario [Matriz-Calcular]
- Actividades resueltas
- Actividades propuestas

INTRODUCCIÓN

La calculadora **ClassPad 400** permite crear matrices y realizar, entre otras más complejas que se verán, las siguientes operaciones básicas con matrices:

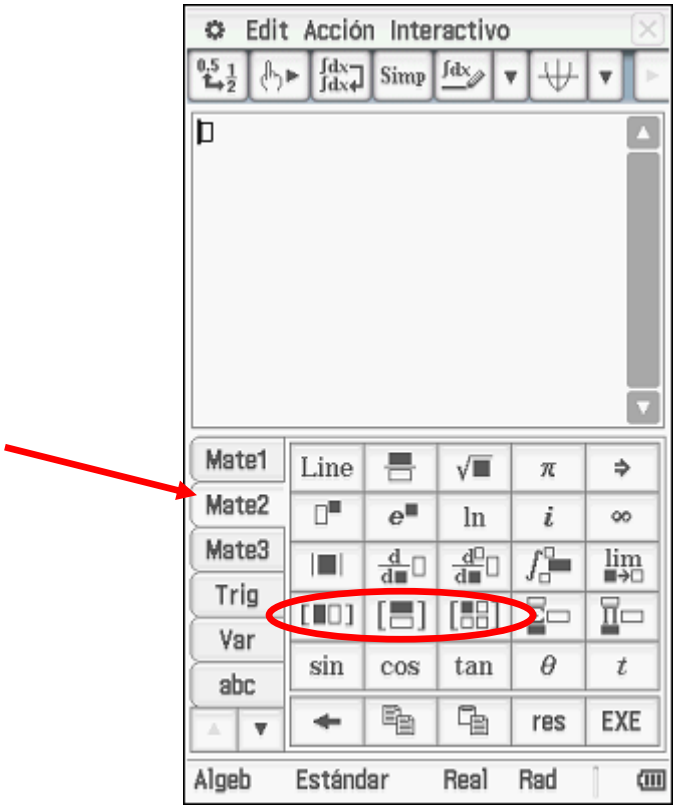
- Suma, resta y multiplicación.
- Multiplicación de una matriz por un escalar.
- Trasposición de matrices.
- Inversa de una matriz cuadrada.
- Cuadrado y cualquier potencia de una matriz cuadrada.
- Determinante de una matriz cuadrada.

CREACIÓN DE MATRICES DESDE LA APLICACIÓN PRINCIPAL

Se puede utilizar el keyboard de la calculadora para introducir valores matriciales. Vamos a crear varias matrices.

Para ello, en el menú entramos en PRINCIPAL y activamos el keyboard (justo encima del teclado numérico):

Una vez activado el keyboard, entramos en la opción "Mate2", donde nos encontraremos con la opción de crear matrices.



Si queremos añadir una columna, usaremos la primera opción. Para añadir una fila nueva, la opción del medio. La última opción es para añadir una fila y una columna simultáneamente.

(1) **(2)** **(3)**

(1) Crear una matriz nueva de 1 fila x 2 columnas.

Añadir una columna a la matriz actual en pantalla.

(2) Crear una matriz nueva de 2 filas x 1 columna.

Añadir una fila a la matriz actual en pantalla.

(3) Crear una matriz nueva de 2 filas x 2 columnas.

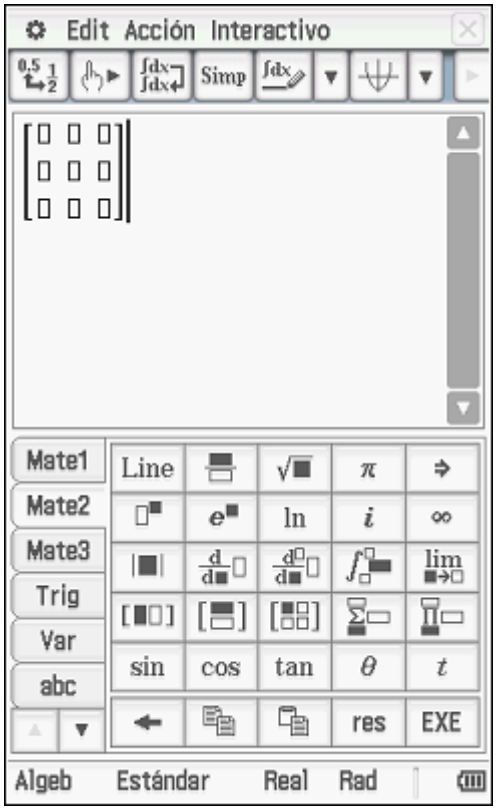
Añadir una fila y una columna a la matriz actual en pantalla.

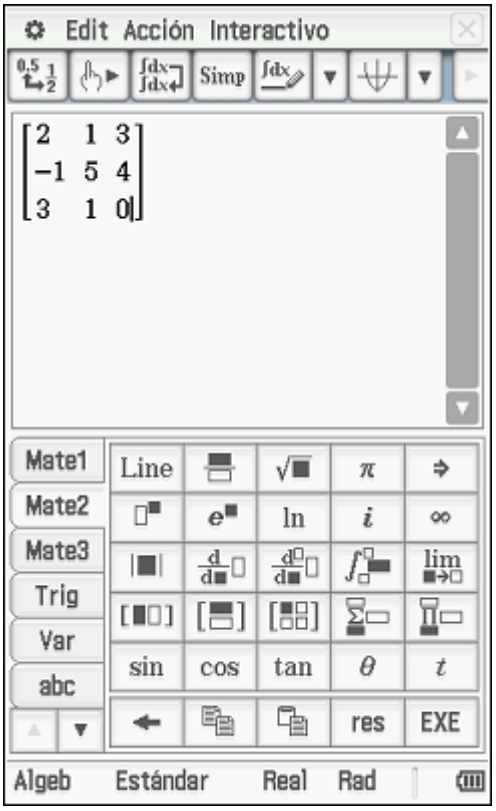
Es obvio que combinando las tres opciones podemos obtener una matriz en blanco de introducción de datos de la dimensión que queramos.

Vamos a crear las matrices:

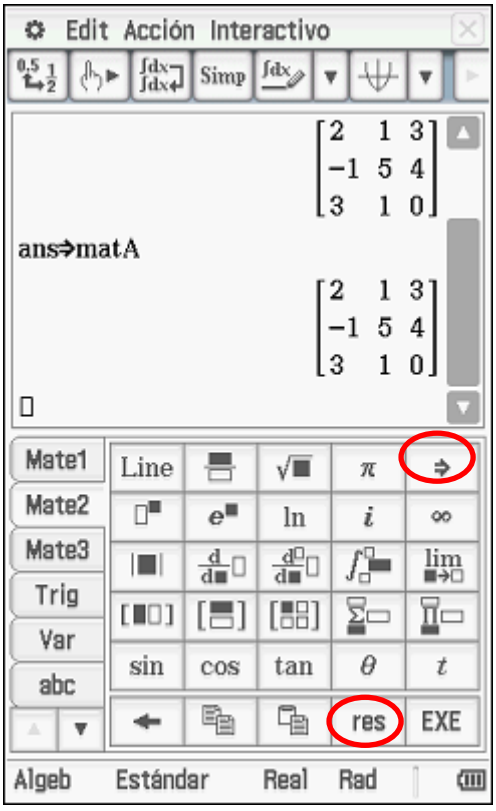
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, para A, construimos una matriz en blanco de 3X3, y posteriormente la rellenamos, tal y como se ilustra en los siguientes ejemplos:

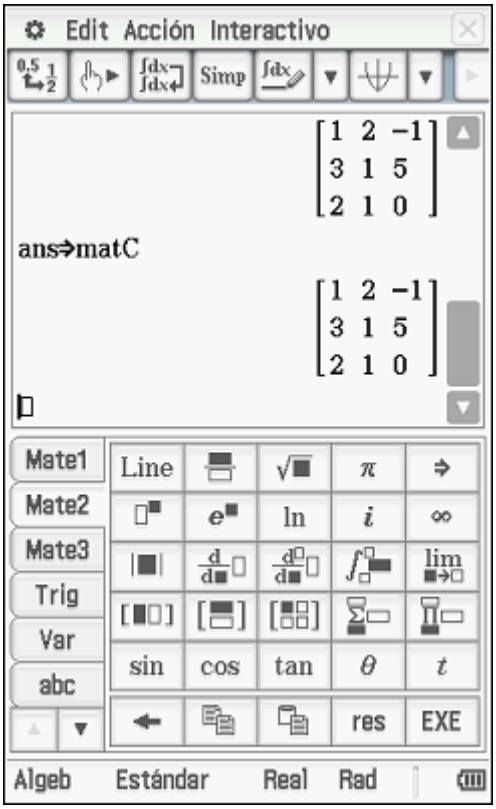




Pulsamos enter, y asignamos la matriz escrita a una variable, para no tener que escribirla cada vez. Para ello, usamos la combinación res (answer), la flecha de asignación, y un nombre alusivo para la matriz, por ejemplo matA.



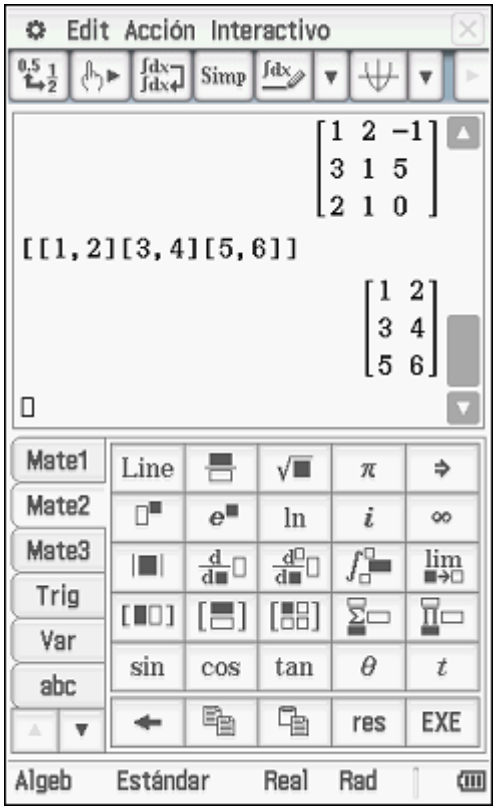
Hacemos lo mismo con la matriz C:

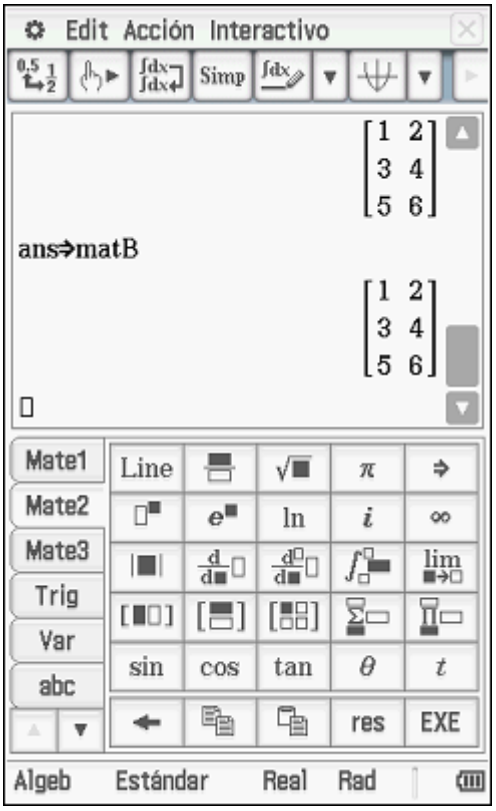


Para introducir la matriz B vamos a emplear otra forma. Los caracteres] y [designarán nuestra matriz, en la que introduciremos los datos fila a fila de la siguiente forma:

[[1,2][3,4][5,6]]

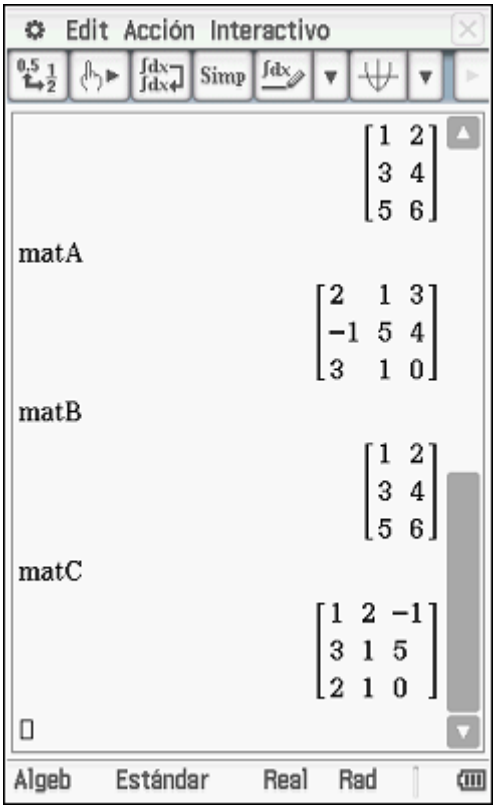
Nótese que sólo se pondrán comas para separar los números dentro de una misma fila. No se escribirán comas para separar las distintas filas de la matriz. El resultado obtenido con esta sintaxis es el siguiente (posteriormente, y al igual que hemos hecho con anterioridad, asignaremos la nueva salida a una matB):





En adelante, cada vez que queramos recuperar una de las matrices introducidas, nos bastará con teclear matA, matB o matC, seguida de EXE.

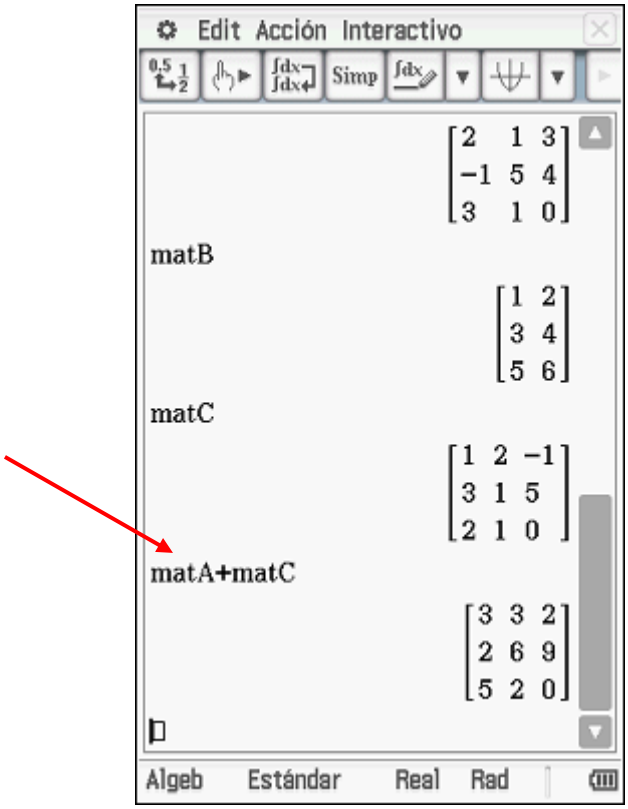
Ya tenemos las siguientes matrices, y ahora vamos a realizar cálculos con ellas:



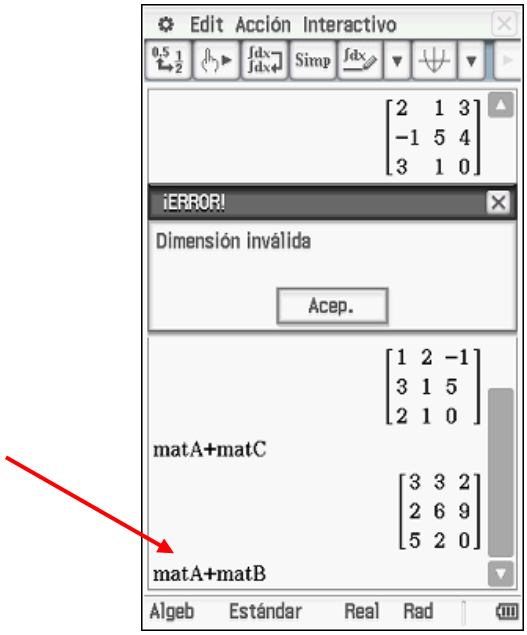
CÁLCULOS BÁSICOS CON MATRICES

- **Suma de matrices**

Realizar la suma de dos matrices es así de fácil:

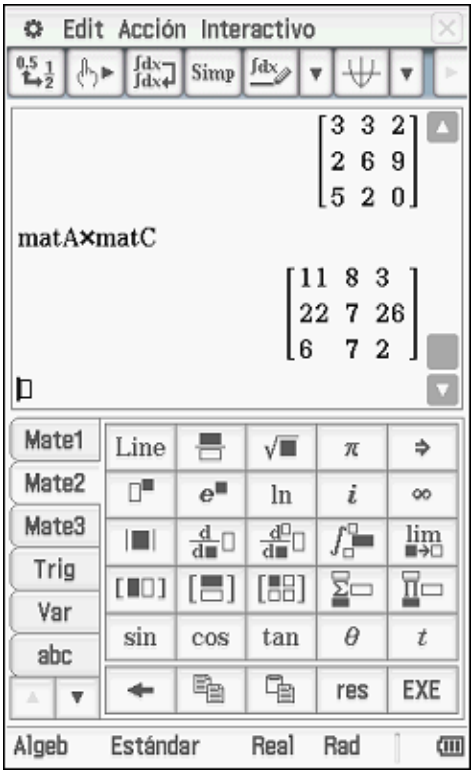


Cabe observar que si intentamos sumar dos matrices con dimensiones diferentes, la calculadora nos dará un mensaje de error. Por ejemplo, intentemos sumar A y B:



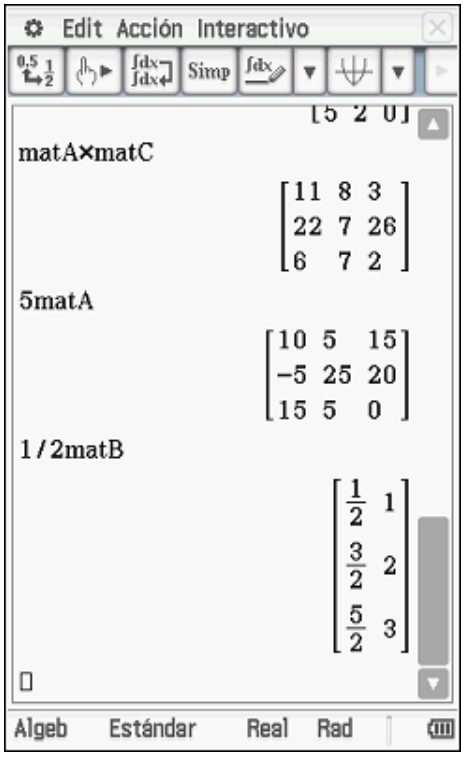
- **Multiplicación de matrices**

Calculemos F=AxC



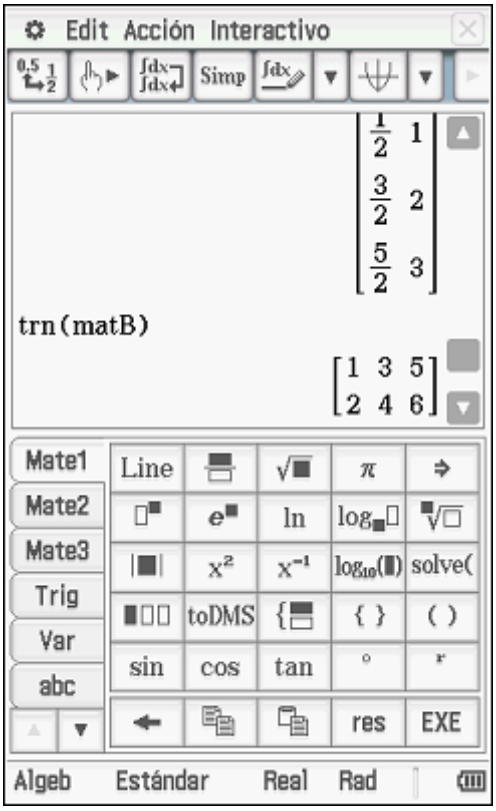
- **Producto de un número real por una matriz**

Calculemos $5 \cdot A$ y $\frac{1}{2} \cdot B$. En ninguno de los casos será necesario poner símbolo alguno de multiplicación entre escalar y matriz.



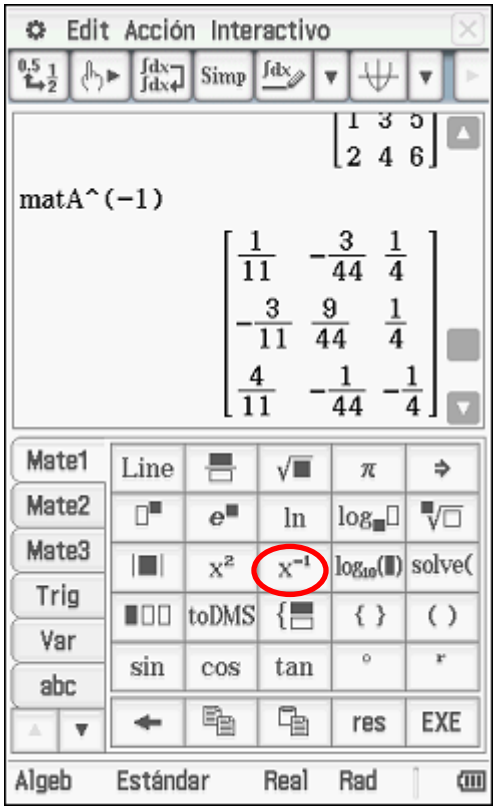
- **Traspuesta de una matriz**

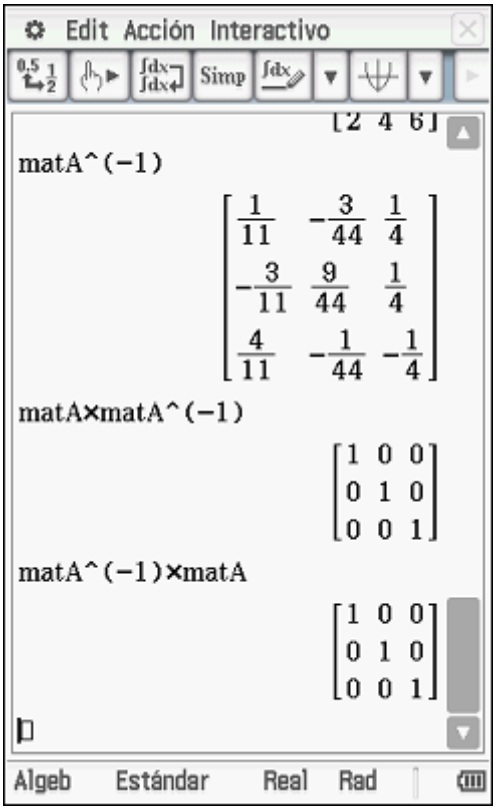
Calculemos la traspuesta de la matriz B. Se utiliza la sintaxis**: trn**



- **Inversa de una matriz cuadrada**

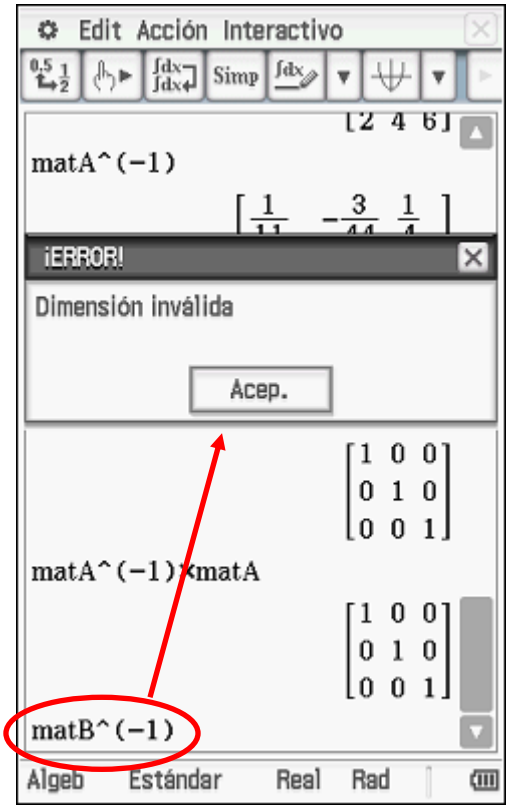
Calculemos la inversa de la matriz A. Para ello basta con elevar a -1 usando cualquiera de las formas que la calculadora permite:





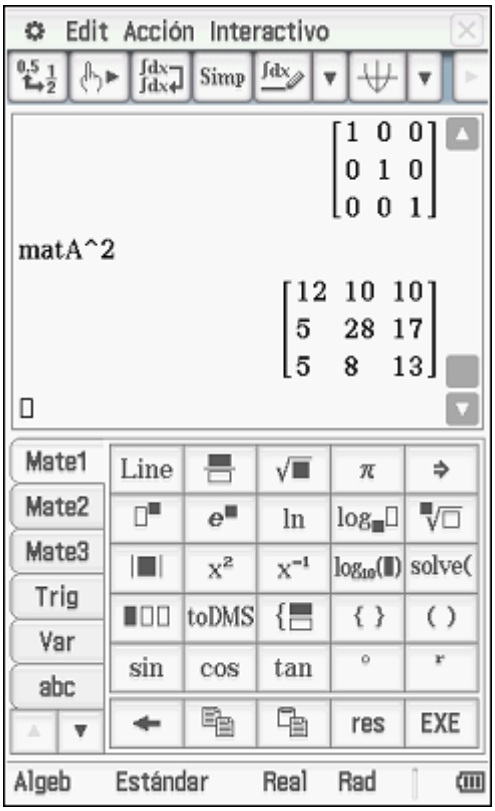
Puede observarse que en las últimas operaciones hemos comprobado que, en efecto, se trata de la inversa de A.

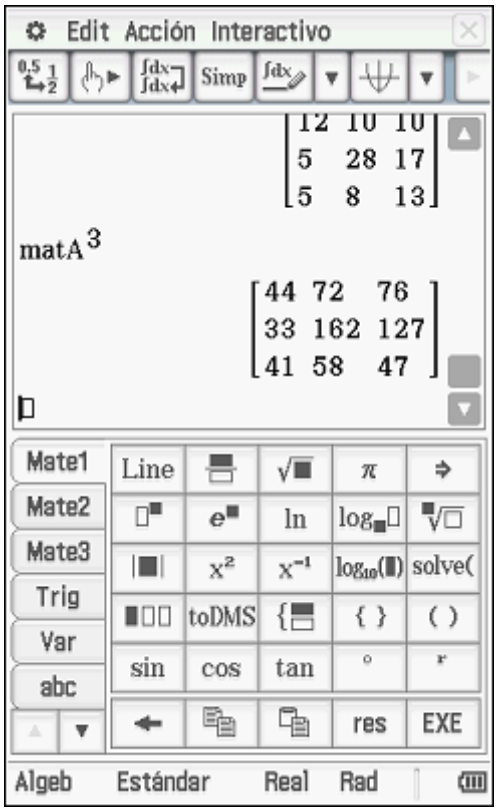
Si la matriz no es invertible obtenemos un mensaje de error:



- **Potencia de una matriz cuadrada**

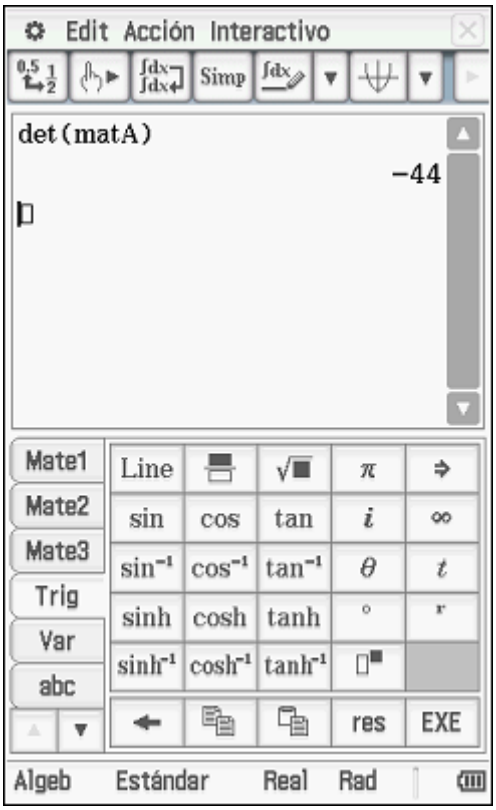
Calculemos A^2 y A^3





- **Determinante de una matriz cuadrada**

Calculemos |A| . Para ello usaremos la función **det**.

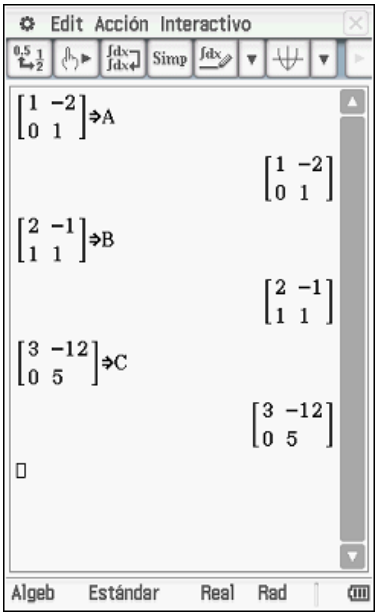


Combinando las operaciones podemos resolver fácilmente problemas como el que sigue: *Dadas las matrices:*

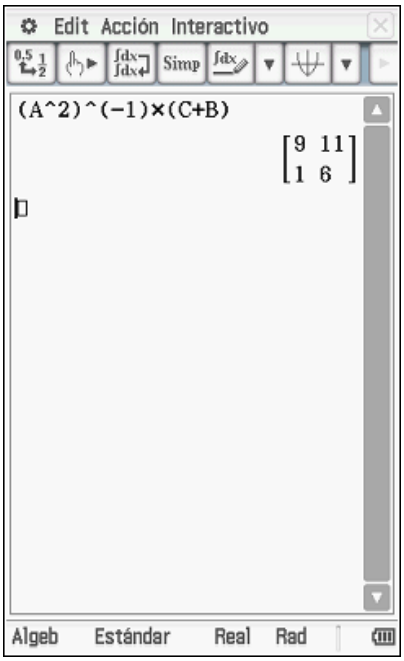
$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}3 & -12\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

Calcula X *para que se cumpla* $A^2X-B=C$

Empezamos por definir las matrices:



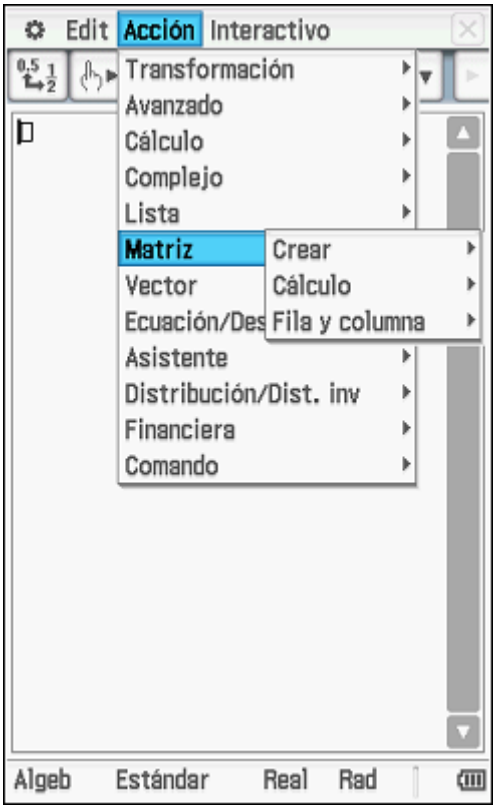
Despejando en la ecuación anterior, sabemos que la matriz X que nos piden se calcula como X= $(A^2)^{-1}(C+B)$



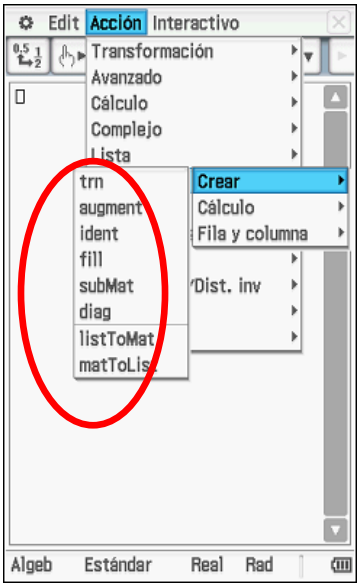
COMANDOS RELACIONADOS CON LA CREACIÓN DE MATRICES: EL MENÚ SECUNDARIO [Matriz-Crear]

El menú secundario **[Matriz-Crear]** contiene comandos relacionados con la creación de matrices.

Se accede a él desde el **menú principal**, a través de la pestaña **Acción**.



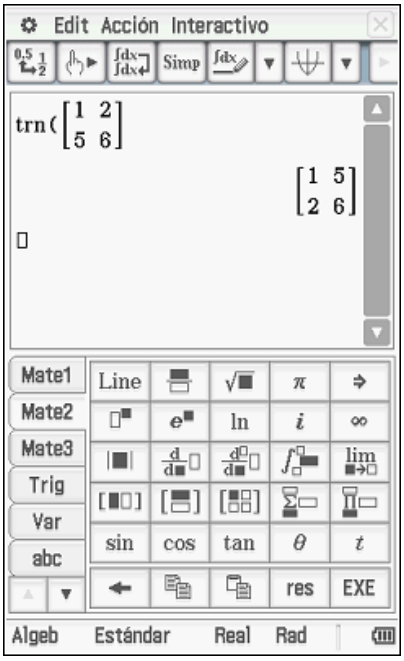
Vamos a detallar y hacer un ejemplo de cada comando.



- **trn**

  Función: Devuelve una matriz traspuesta. (Ya lo hemos utilizado anteriormente).

  Sintaxis: **trn(Mat)**



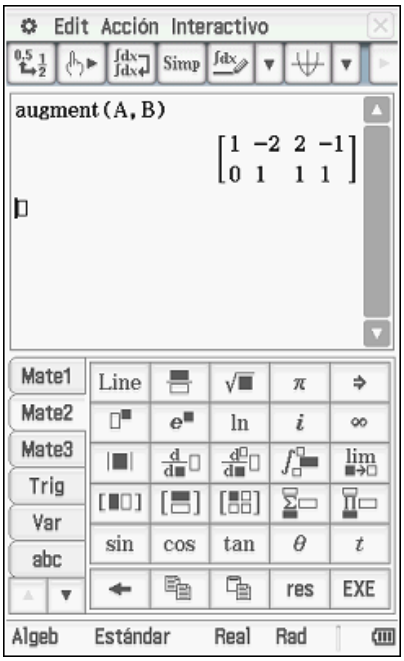
- **augment**

  Función: Devuelve una matriz que combina otras dos matrices.

  Sintaxis: **augment(Matriz1, Matriz2)**

  Ejemplo: Combinar las dos matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

  Si las tenemos previamente definidas, nos bastará con:

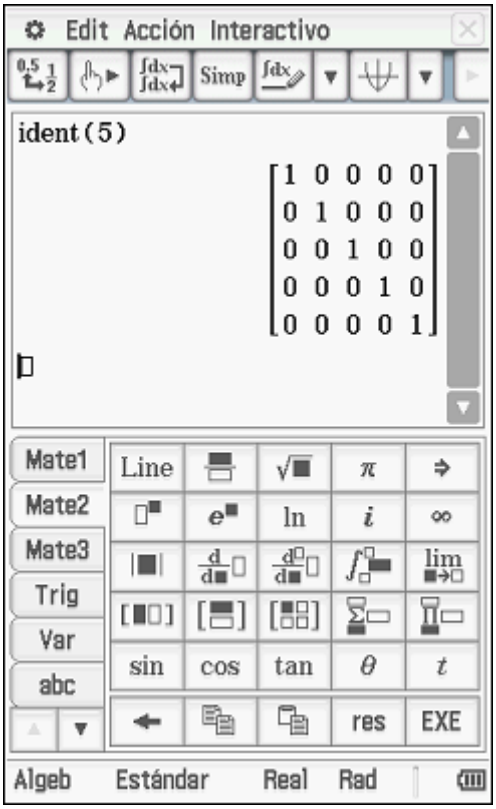


- **ident**

  Función: Crea una matriz identidad.

  Sintaxis: **ident(número natural)**

  Ejemplo: Crear una matriz identidad de orden 5.



- **fill**

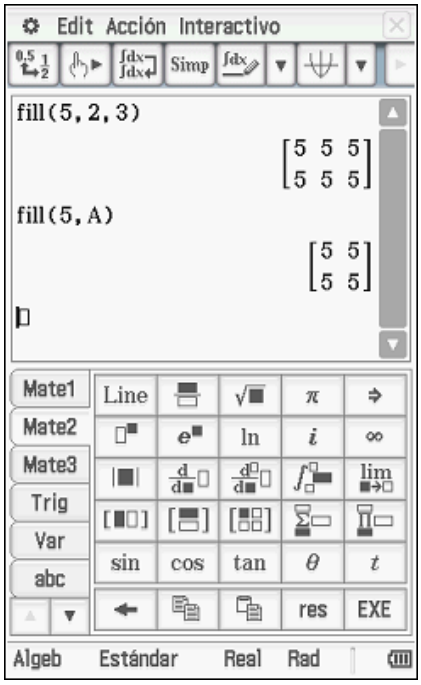
  Función: Crea una matriz con un cierto número de filas y columnas, o reemplaza los elementos de una matriz por una expresión.

  Sintaxis: **fill(Exp,número de filas, número de columnas)**

  fill(Exp,Mat)

  Ejemplo1: Crear una matriz 2 × 3, con todos sus elementos iguales a 5.

  Ejemplo2: Reemplazar todos los elementos de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ por 5.



- **subMat**

  Función: Extrae una parte concreta de una matriz a una matriz nueva.

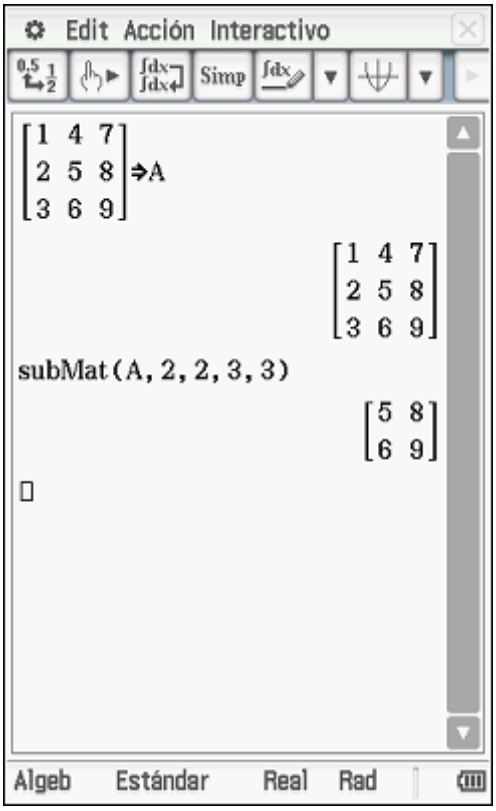
  Sintaxis: **subMat(Mat,fila inicial,columna inicial,fila final,columna final)**

  • "1" es el valor por defecto cuando se omite "fila inicial" y "columna inicial".

  •El número de la última fila es el valor por defecto cuando se omite "fila final".

  •El número de la última columna es el valor por defecto cuando se omite "columna final".

  Ejemplo: Extraer desde la fila 2, columna 2, hasta la fila 3, columna 3 de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

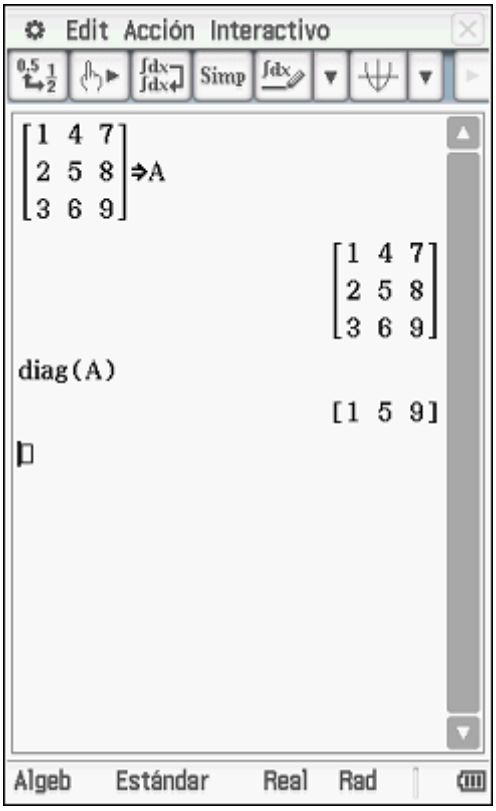


- **diag**

  Función: Devuelve una matriz de una fila que contiene los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada.

  Sintaxis: **diag(Mat)**

  Ejemplo: Extraer los elementos de la diagonal de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

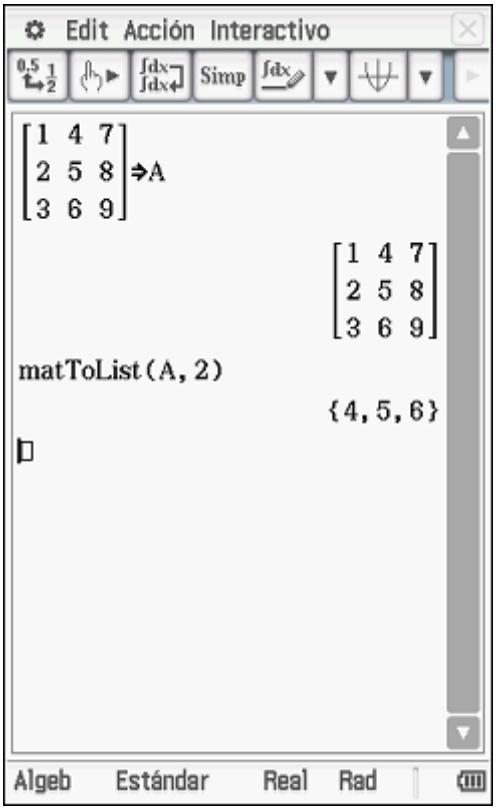


- **matToList**

  Función: Transforma una columna de una matriz en una lista.

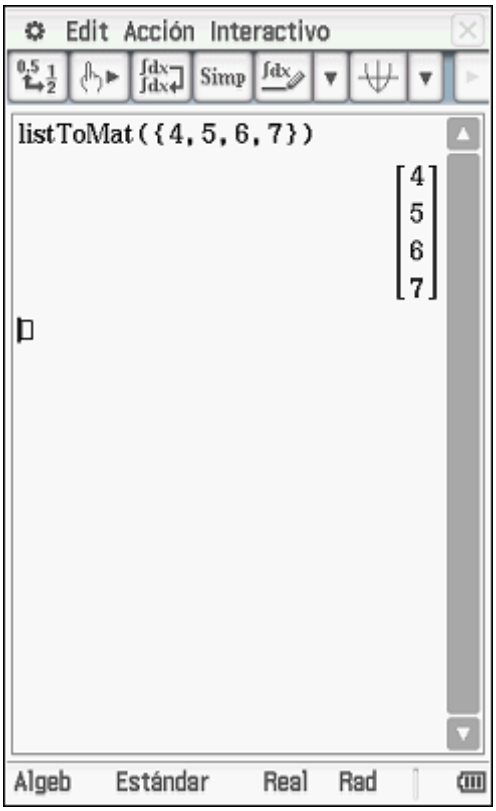
  Sintaxis: **matToList (Mat, número de columna)**

  Ejemplo: Transformar la columna 2 de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ en una lista.



- **listToMat,** hace que una lista se convierta en matriz columna. Hay que utilizar llaves { y } para dar la lista de elementos.

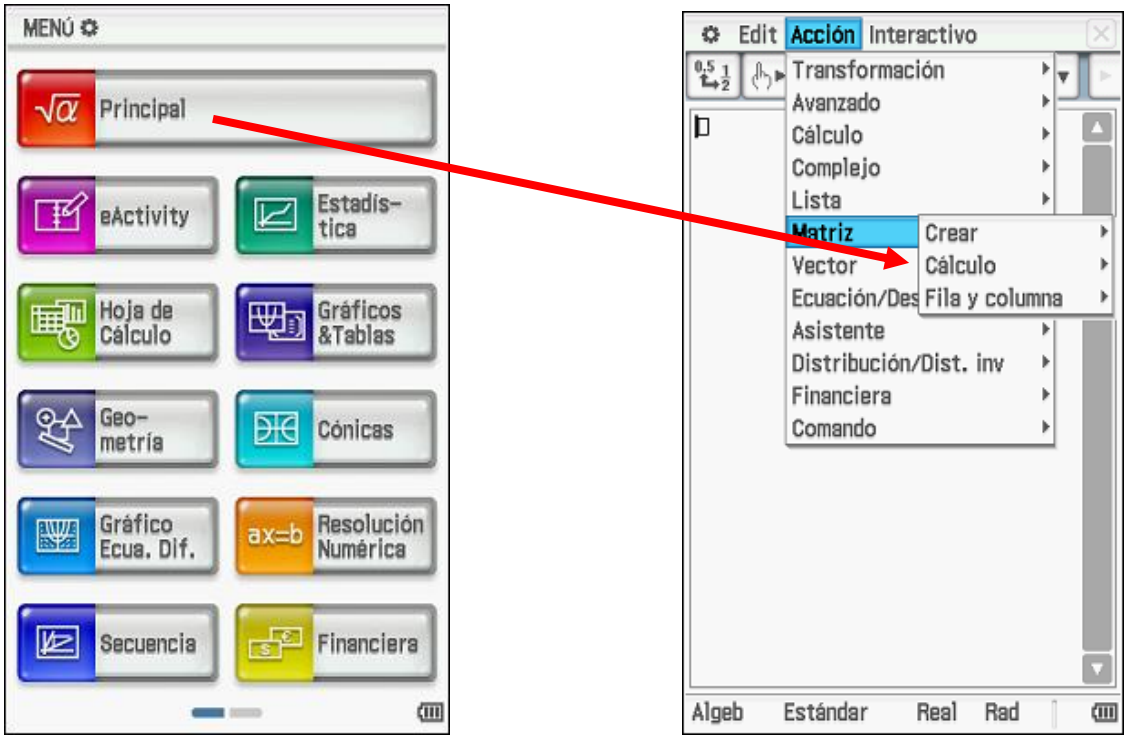
  Ejemplo:



COMANDOS RELACIONADOS CON LOS CÁLCULOS MATRICIALES: EL MENÚ SECUNDARIO [MATRIZ-CALCULAR]

El menú secundario **[Matriz-Calcular]** contiene comandos relacionados con los cálculos matriciales.

Para acceder a él:



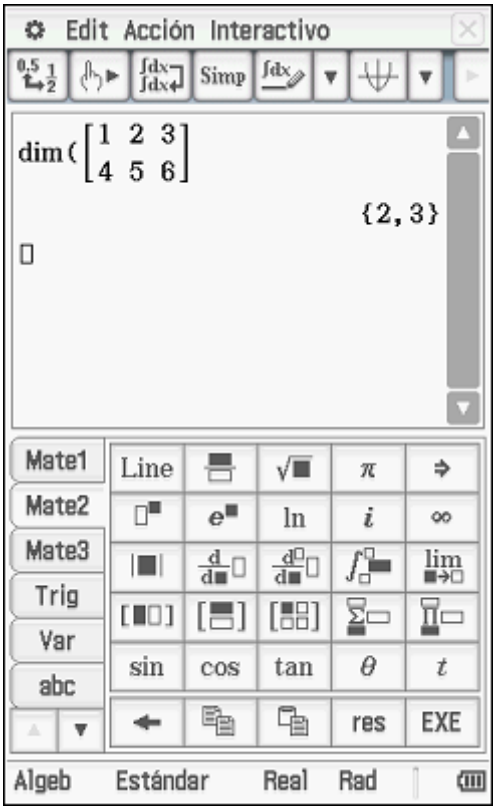
Vamos a detallar y hacer un ejemplo de cada comando.

- **dim**

  Función: Devuelve las dimensiones de una matriz como una lista de dos elementos {número de filas, número de columnas}.

  Sintaxis: **dim (Mat)**

  Ejemplo: Determinar las dimensiones de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$



Nos da como salida {2,3}, lo cual quiere decir que la matriz tiene dos filas y tres columnas.

- **det**

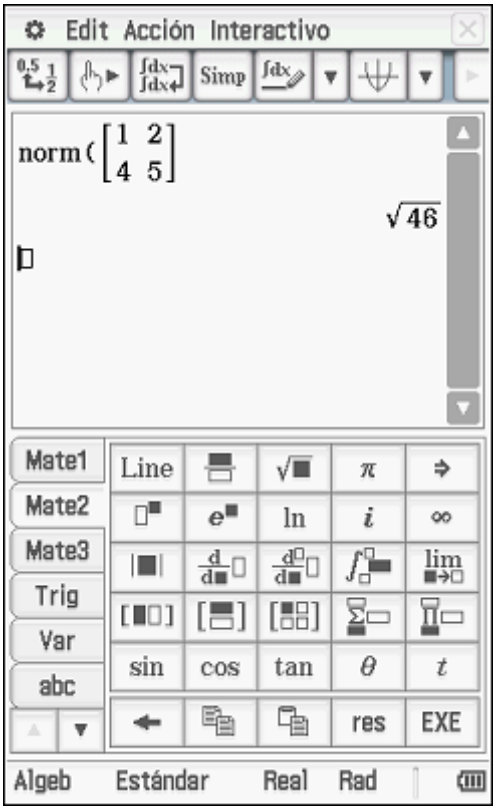
  Función: Devuelve el determinante de una matriz cuadrada. (Ya lo hemos utilizado anteriormente).

- **norm**

  Función: Devuelve la norma de Frobenius de la matriz.

  Sintaxis: **norm(Mat)**

  Ejemplo: Determinar la norma de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

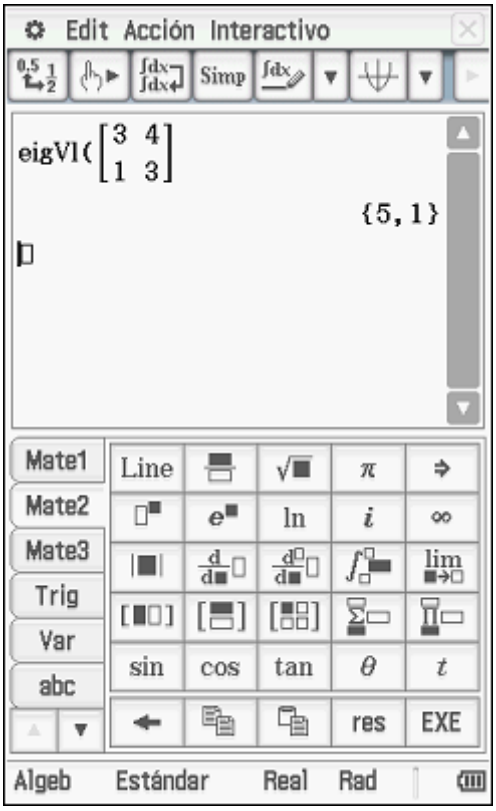


- **eigVl**

  Función: Devuelve una lista que contiene el/los valores propio(s) de una matriz cuadrada (los autovalores).

  Sintaxis: **eigVI(Mat)**

  Ejemplo: Obtener el/los valor(es) propio(s) de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$



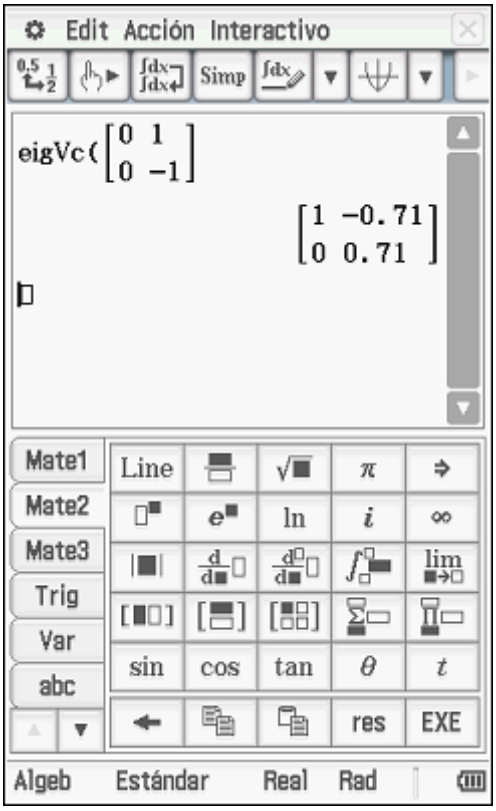
- **eigVc**

  Función: Devuelve una matriz en la que cada columna representa un vector propio de una matriz cuadrada (autovectores).

  Como un vector propio normalmente no se puede determinar de manera unívoca, se normaliza a su norma, que es 1.

  Sintaxis: **eigVc (Mat)**

  Ejemplo: Obtener el/los vector(es) propio(s) de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

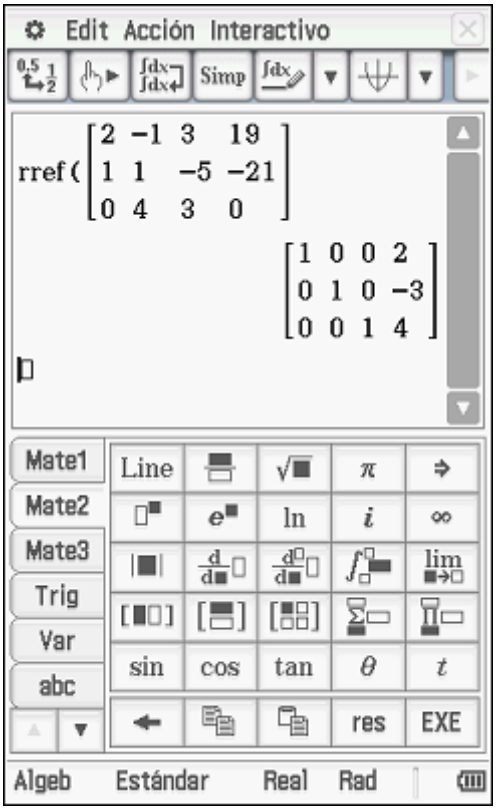


- **rref**

  Función: Devuelve la forma escalonada reducida por filas de una matriz.

  Sintaxis: **rref (Mat)**

  Ejemplo: Obtener la forma escalonada reducida por filas de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 19 \\ 1 & 1 & -5 & -21 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

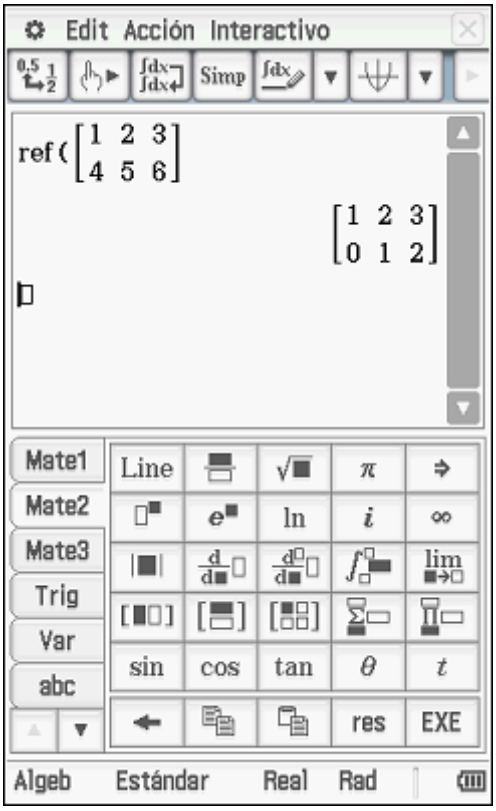


- **ref**

  Función: Devuelve la forma escalonada por filas de una matriz.

  Sintaxis: **ref (Mat)**

  Ejemplo: Obtener la forma escalonada por filas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$



- **LU**

Función: Devuelve la descomposición LU de una matriz cuadrada.

Sintaxis: **LU (Mat, L, U)**

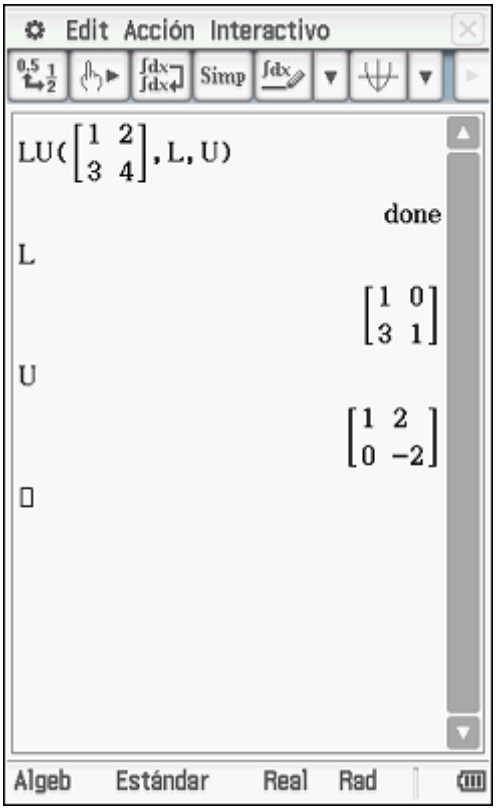
Las letras L y U son opcionales, y se pueden utilizar otras variables en las que la calculadora almacenará las salidas.

Ejemplo: Obtener la descomposición LU de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

• La matriz inferior se asigna a la primera variable L, mientras la matriz superior se asigna a la segunda variable U.

Para ver la matriz inferior se tecleará L y enter.

Para ver la matriz superior se tecleará U y enter.



- **QR**

  Función: Devuelve la descomposición QR de una matriz cuadrada.

  Sintaxis: **QR (Mat, Q, R)**

  Ejemplo: Obtener la descomposición QR de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

  • La matriz unitaria se asigna a la variable Q, mientras la matriz triangular superior se asigna a la variable R (las letras elegidas son opcionales).

  Para ver la matriz unitaria: elemento del menú: Q

  Para ver la matriz triangular superior: elemento del menú: R

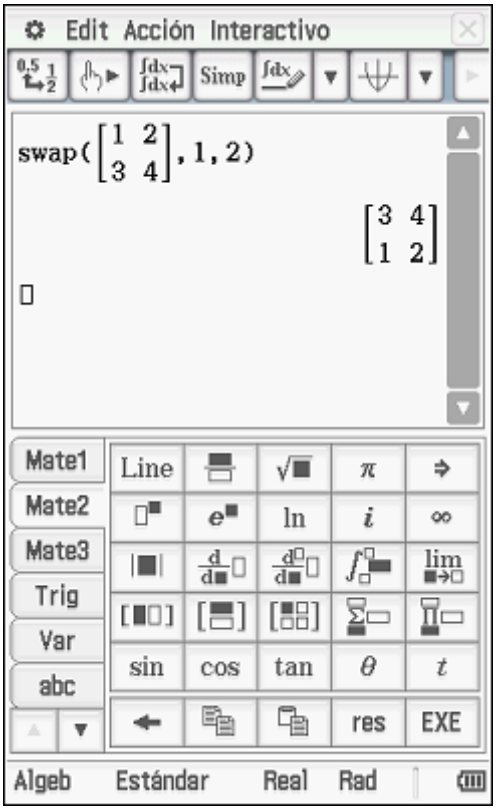
Los siguientes cuatro comandos se hallan en el menú "Fila y Columna" y proporcionan herramientas para poder resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss, escribiendo previamente su matriz asociada.

- **swap**

  Función: Intercambia dos filas de una matriz.

  Sintaxis: **swap (Mat, número de fila 1, número de fila 2)**

  Ejemplo: Intercambiar la fila 1 con la fila 2 de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$



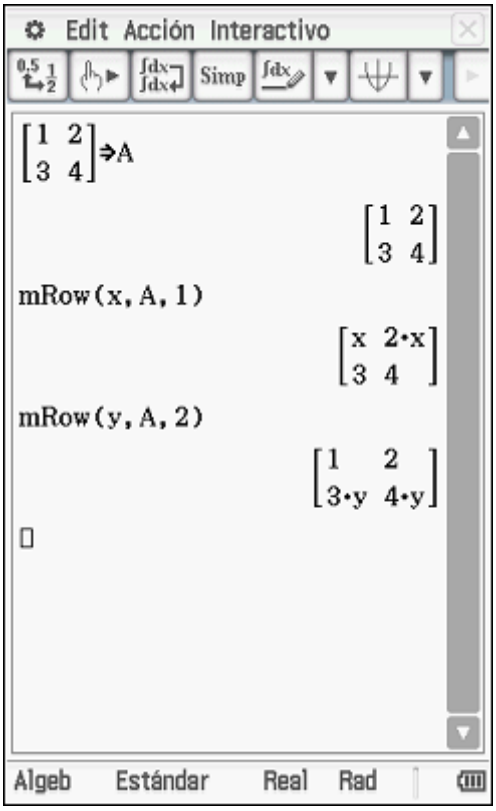
- **mRow**

  Función: Multiplica los elementos de una fila de una matriz por una expresión.

  Sintaxis: **mRow (Exp, Mat, número de fila)**

  Ejemplo: Multiplicar la fila 1 de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ por x.

  Ejemplo: Multiplicar la fila 2 de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ por y.



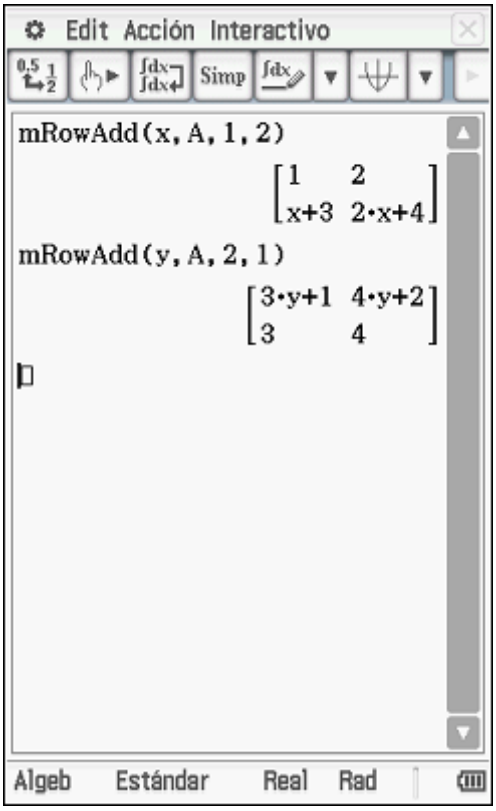
- **mRowAdd**

  Función: Multiplica los elementos de una fila de una matriz por una expresión, y luego suma el resultado a otra fila.

  Sintaxis: **mRowAdd (Exp, Mat, número de fila 1, número de fila 2)**

  Ejemplo: Multiplicar la fila 1 de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ por x, y luego sumar el resultado a la fila 2.

  Ejemplo: Multiplicar la fila 2 de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ por y, y luego sumar el resultado a la fila 1.

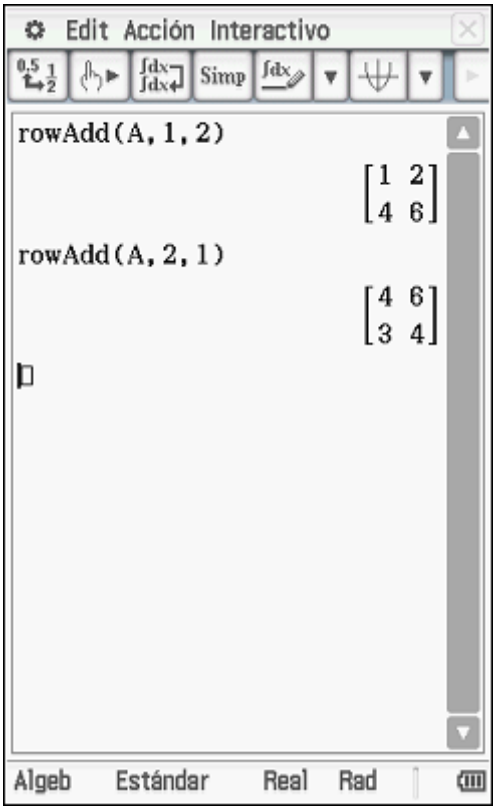


- **rowAdd**

  Función: Suma una fila de una matriz a otra fila.

  Sintaxis: **rowAdd (Mat, número de fila 1, número de fila 2)**

  Ejemplo: Sumar la fila 1 de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ a la fila 2.

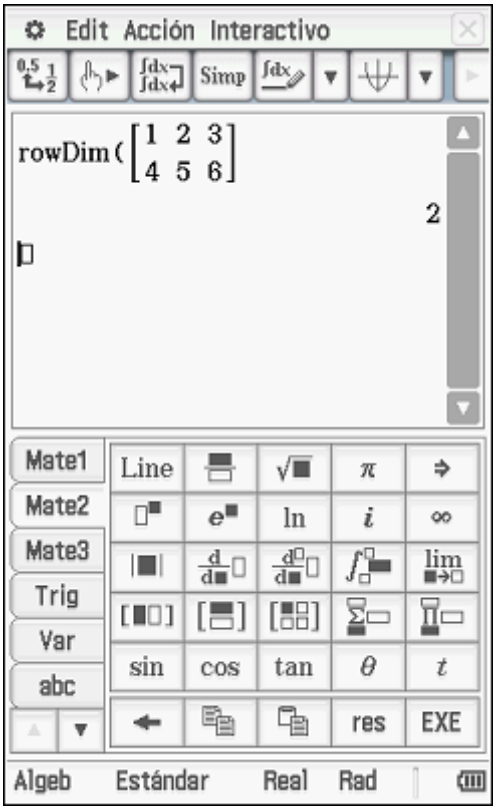


- **rowDim**

  Función: Devuelve el número de filas de una matriz.

  Sintaxis: **rowDim (Mat)**

  Ejemplo: Obtener el número de filas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

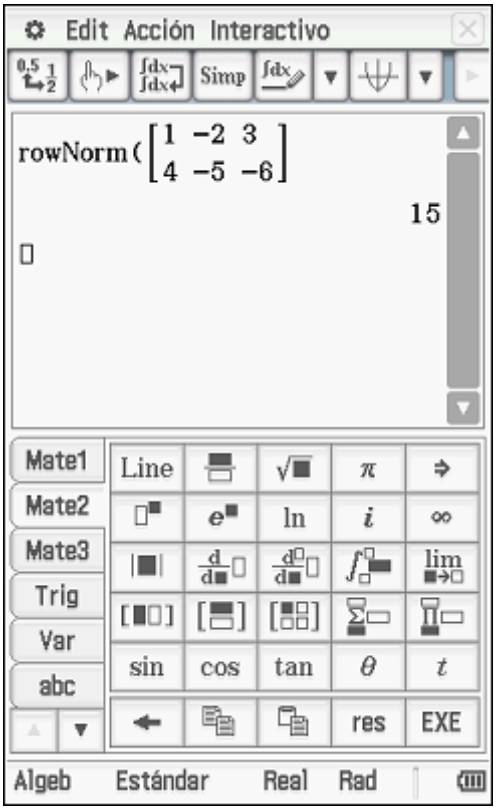


- **rowNorm**

  Función: Calcula las sumas de los valores absolutos de los elementos de cada fila de una matriz, y devuelve el valor máximo de las sumas.

  Sintaxis: **rowNorm (Mat)**

  Ejemplo: Calcular las sumas de los valores absolutos de los elementos de cada fila de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$, y obtener el valor máximo de las sumas.

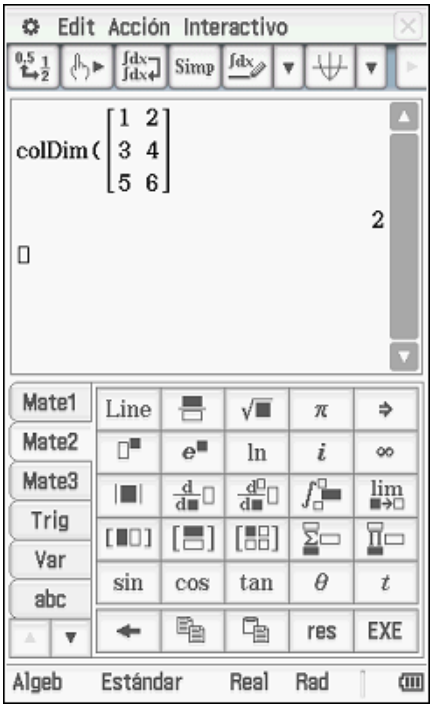


- **colDim**

  Función: Devuelve el número de columnas de una matriz.

  Sintaxis: **colDim (Mat)**

  Ejemplo: Obtener el número de columnas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

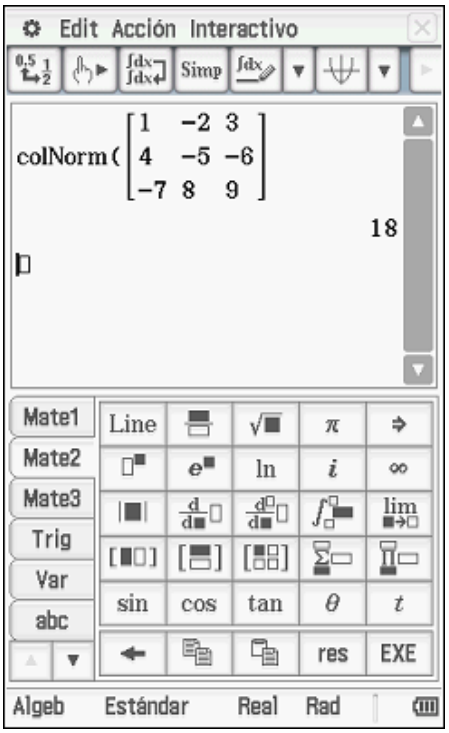


- **colNorm**

  Función: Calcula las sumas de los valores absolutos de los elementos de cada columna de una matriz, y devuelve el valor máximo de las sumas.

  Sintaxis: **colNorm (Mat)**

  Ejemplo: Calcular las sumas de los valores absolutos de los elementos de cada columna de la matriz [[1, –2, 3][4, –5, –6][–7, 8, 9]], y obtener el valor máximo de las sumas.



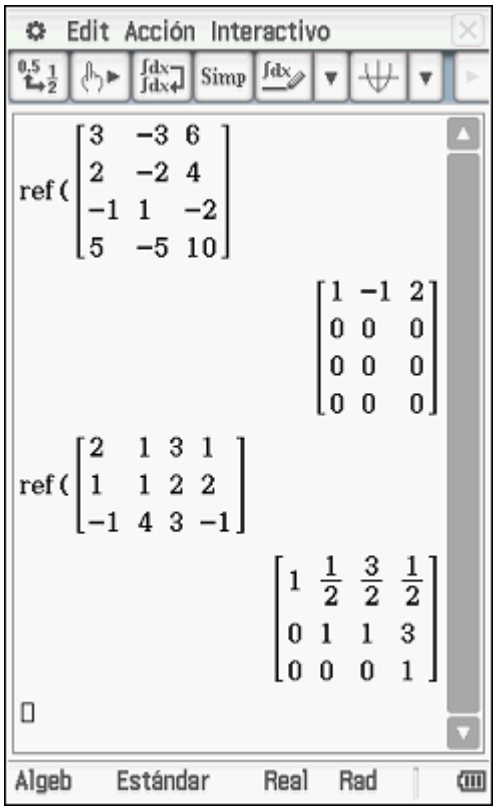
ACTIVIDADES RESUELTAS

Vamos a resolver los siguientes ejercicios utilizando algunos de los comandos anteriores.

Ejemplo 1 Hallar el rango de las siguientes matrices:

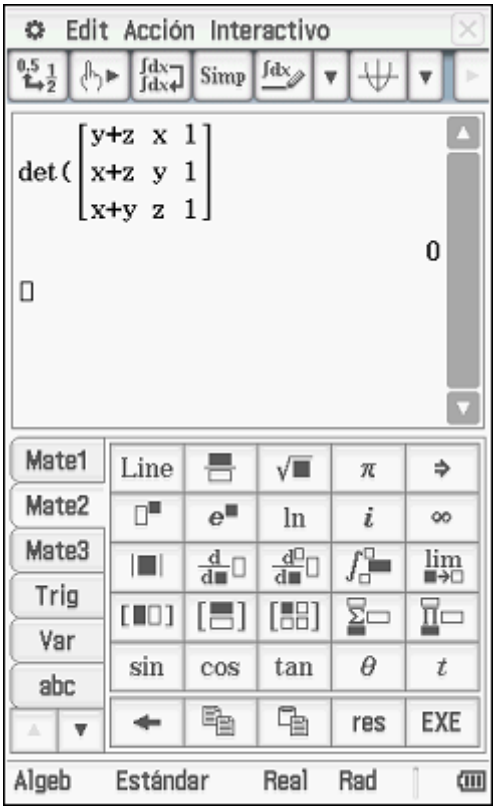
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(Recordemos que el rango de una matriz escalonada es el número de filas no nulas de la matriz)



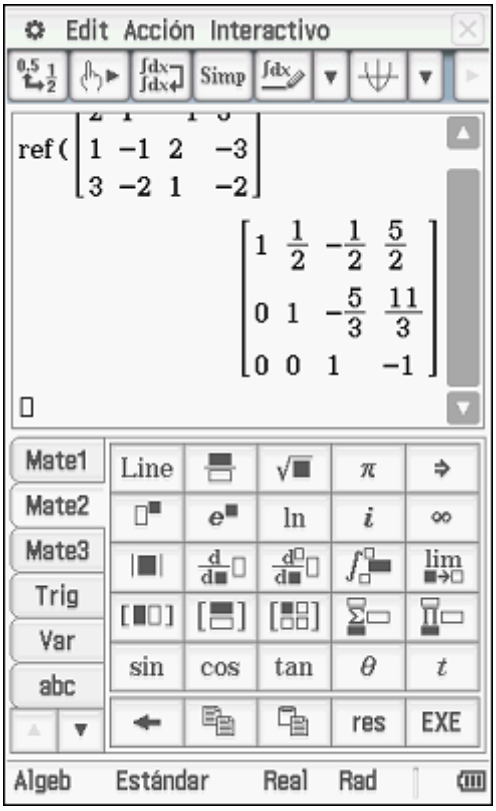
El rango de la matriz A es 1 puesto que sólo queda una fila no nula El rango de la matriz B es 3

Ejemplo 2 Comprobar la siguiente igualdad: $\begin{vmatrix} y+z & x & 1 \\ x+z & y & 1 \\ x+y & z & 1 \end{vmatrix} = 0$



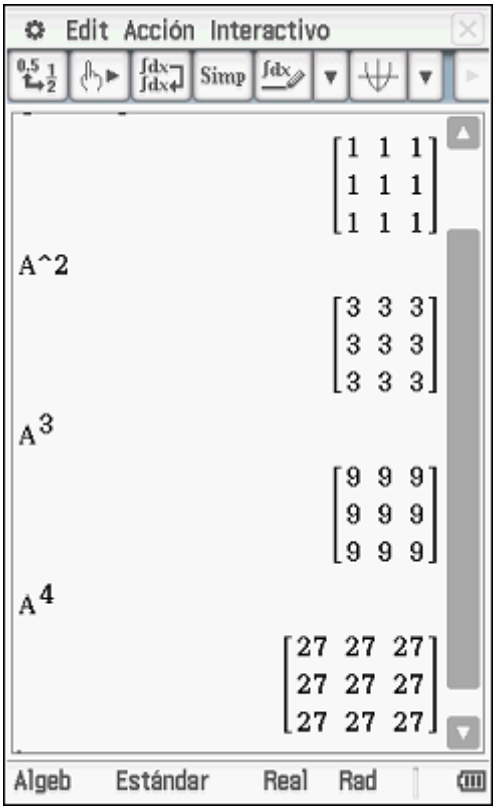
Ejemplo 3. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones usando la matriz asociada a dicho sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y-z&=5 \\ x-y+2z&=-3 \\ 3x-2y+z&=-2 \end{aligned}\right\}$$



Obtenemos un sistema escalonado cuyas soluciones se pueden calcular por sustitución regresiva: $z=-1, y=2, x=1$

Ejemplo 4 Hallar la potencia n-ésima de la matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$



Es fácil comprobar que $A^n = 3^{n-1} \cdot A$

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- Dadas las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

calcular:

a) A= M+N-(2M-3N)

b) B=MN-(M+I)(N-I)

2.- Calcular la matriz $(A^tA^{-1})^2$, siendo A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

3.- Hallar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

4.- Halla la matriz X que verifique:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

5.- Calcula la potencia n-ésima de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.- Resuelve la ecuación $\left| A^{-1} - x \right| = 0$, siendo A la matriz triangular superior de orden 3 cuyos elementos no nulos son todos iguales a 1, e I la matriz identidad de orden 3.

7.- Resuelve el siguiente sistema utilizando la matriz asociada: $\left.\begin{array}{r} x + 3y - 2z = 4 \\ 3x + 2y + z = 5 \\ 4x + 4y + 2z = 6 \end{array}\right\}$

Tema 8.
OTRAS APLICACIONES GRÁFICAS

INTRODUCCIÓN

Este tema completa las distintas opciones expuestas en el tema cuatro correspondientes a la representación gráfica de funciones, dedicando un apartado a la resolución gráfica de problemas de programación lineal aprovechando las opciones para dibujar desigualdades que ofrece la calculadora.

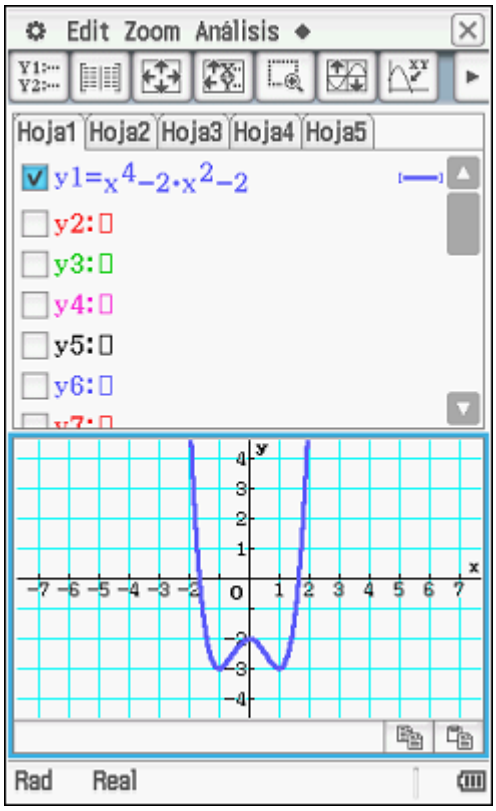
Además, se expondrán otras opciones gráficas que aparecen en el menú principal como es el caso de la representación de sucesiones. Completaremos este tema con el estudio y representación de funciones en el espacio.

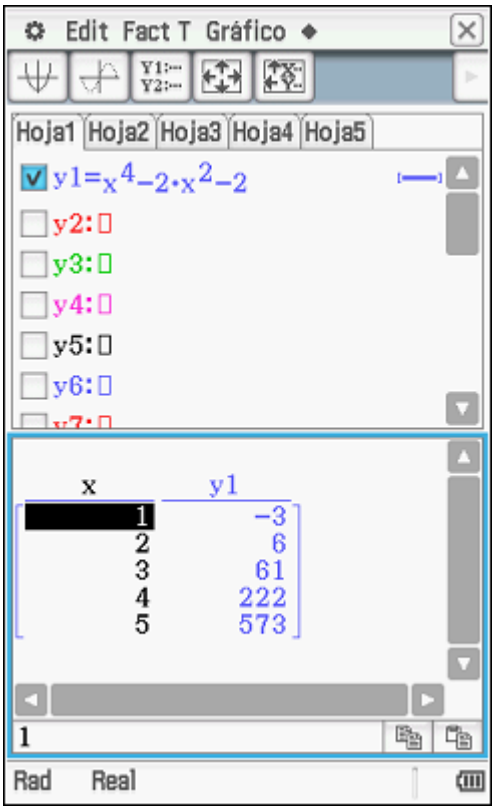
TABLA DE VALORES DE UNA FUNCIÓN

A partir de la representación gráfica de una función ***y*=f(*x*)** se puede obtener una tabla de valores. Entramos en 

dentro del menú principal y escribimos una función.

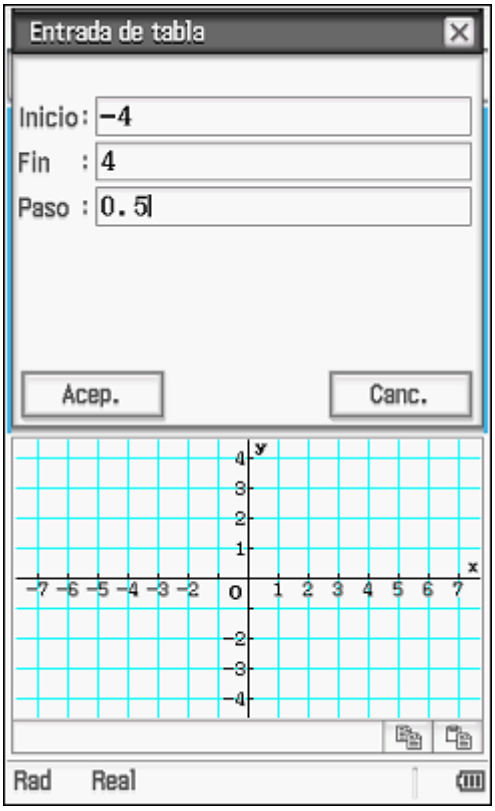
Una vez introducida la expresión de la función, seleccionamos la opción  para obtener la correspondiente tabla de valores.

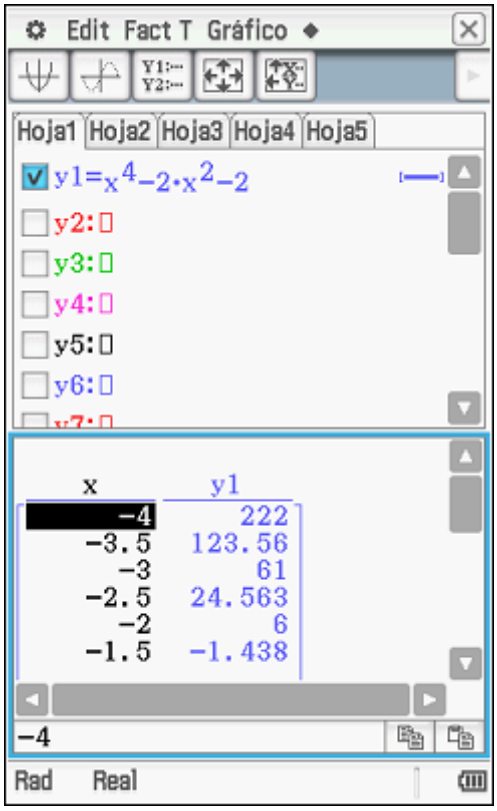




Para configurar los valores de la tabla pulsamos sobre la opción  que aparece en el menú de herramientas, aparecerá el siguiente cuadro de diálogo para introducir el valor inicial de la variable independiente a partir del cual se construirá la tabla (**Inicio**), el valor final (**Fin**) y el incremento que se tomará para calcular el siguiente valor (**Paso**).

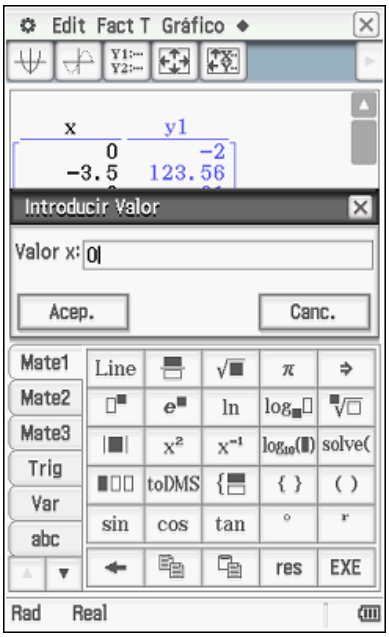
Por ejemplo, si cambiamos los valores obtendremos una nueva tabla mostrada en las imágenes siguientes:

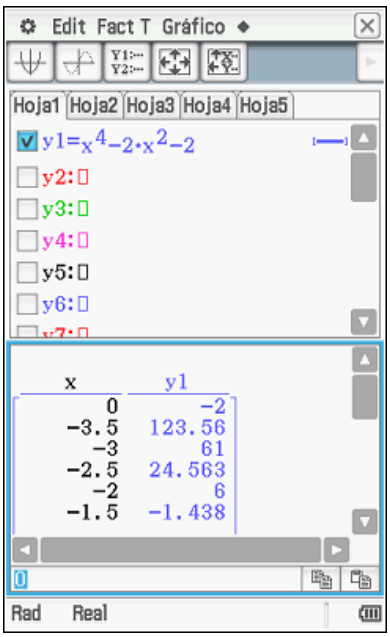




La tabla numérica puede servir para obtener de manera directa el valor de la función para un valor determinado de la variable independiente, sin más que situarse en una posición de la columna correspondiente a dicha variable e introducir el nuevo valor.

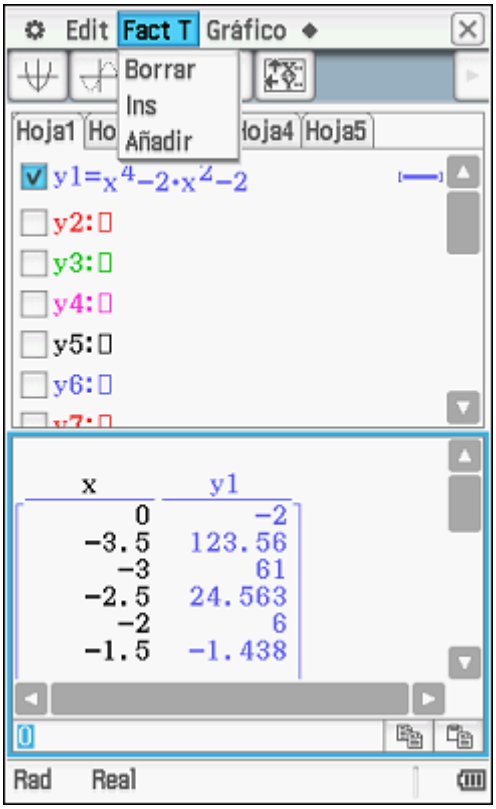
Aparecerá el siguiente cuadro de diálogo para escribir el nuevo valor:





Al pulsar sobre el botón **Acep.** aparecerá el valor correspondiente de la función para el valor de la variable x previamente introducido.

En la barra de menú se encuentra la opción **Fact T** que facilita las opciones para borrar filas en la tabla de valores (**Borrar**), insertar filas (**Insert.**) o añadir filas (**Añadir**).

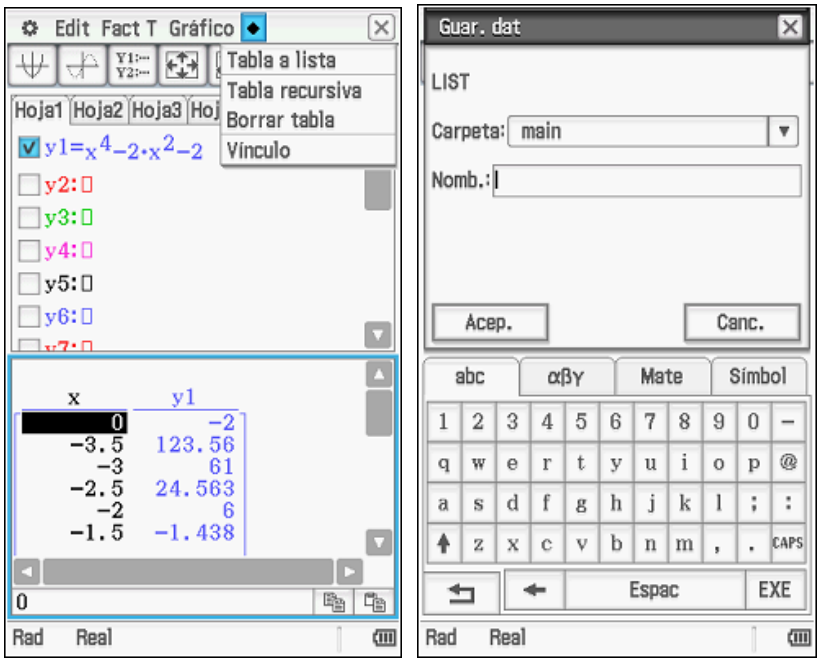


En ocasiones, al dibujar una función puede ser de gran utilidad acceder a la tabla de valores, sobre todo cuando no aparece nada en la pantalla y es necesario conocer los valores que toma la función para ajustar la ventana de visualización.

Los valores contenidos en una tabla se pueden guardar en una estructura de datos denominada lista para su utilización posterior en cualquier otra aplicación de la calculadora.

Para guardar los valores de una columna en una lista realizamos los siguientes pasos:

- Situamos el cursor en cualquiera de los elementos de la columna que deseamos almacenar en una lista.
- Abrimos el menú correspondiente a la opción ♦
- Seleccionamos la opción **Tabla a lista**.



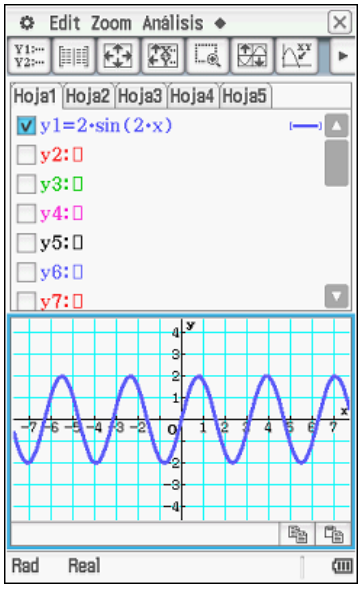
- Aparece una nueva ventana para asignar un nombre a la lista que se desea crear y para seleccionar la carpeta en la que se guardará.

Una vez asignado el nombre se guardarán los valores en la correspondiente lista.

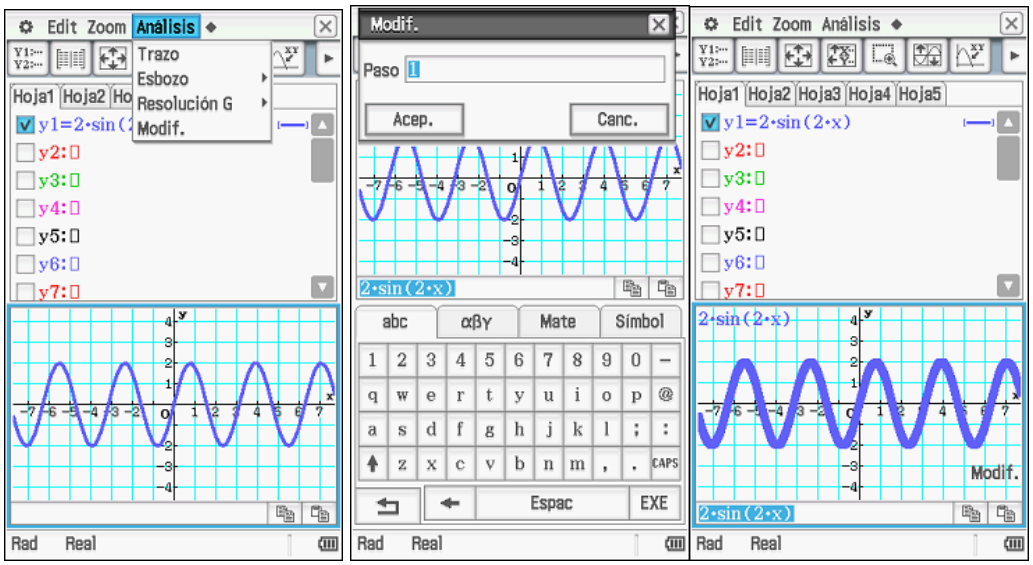
Todo lo estudiado en este apartado puede aplicarse sobre varias funciones cuando estas aparezcan seleccionadas en la ventana correspondiente al editor de gráficos.

ACTUALIZACIÓN DE UN GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN

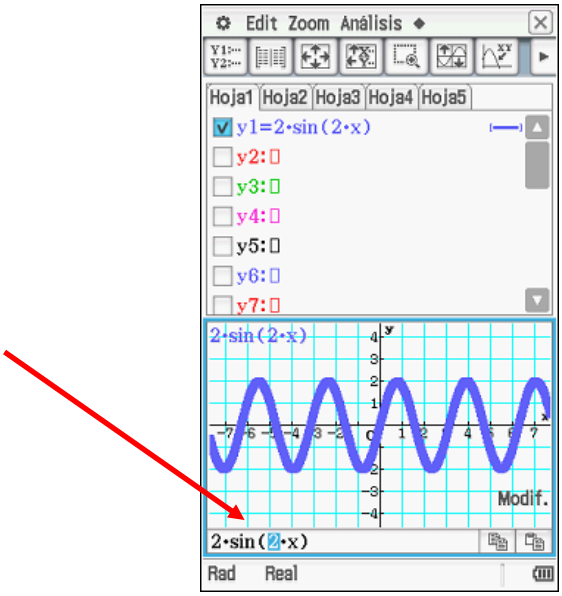
Comenzaremos dibujando una función cualquiera en la que vamos a cambiar distintos valores para conocer las variaciones que sufrirá la función.



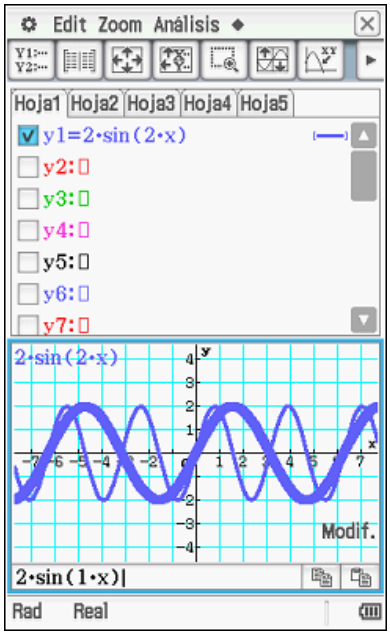
Desde el menú **Análisis**, escogemos la opción **Modif**. que facilita la actualización del gráfico cambiando distintos valores en su expresión.



Para estudiar los cambios que produce en la función la modificación de cualquiera de los valores de su ley de formación basta con seleccionarlo previamente, tal y como aparece en la figura siguiente:



Por ejemplo, si reducimos este valor a 1, obtendremos la siguiente representación:



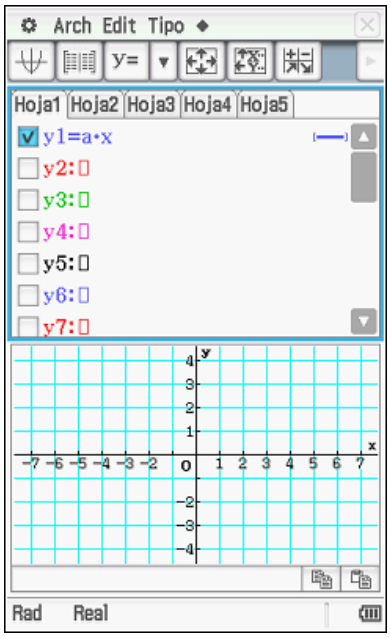
De manera análoga se podrá modificar cualquiera de los valores contenidos en la expresión de la función.

Para cambiar el incremento o disminución para cada uno de los valores anteriores debemos acceder de nuevo a **Modif.** desde el menú **Análisis**, y cambiar el valor correspondiente a **Paso**.

GRÁFICOS DINÁMICOS

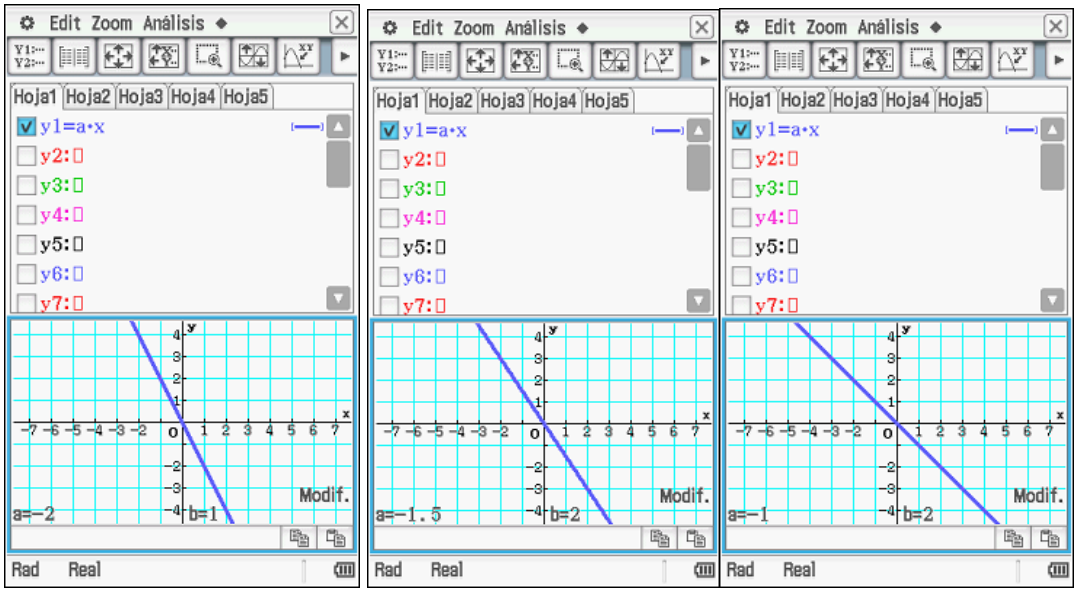
Desde el menú ✥ encontramos la opción **Gráfico dinámico** para realizar gráficos dinámicos en los que los parámetros cambiarán desde el valor inicial hasta el final según el incremento indicado, mostrando en la pantalla los distintos gráficos de manera automática.

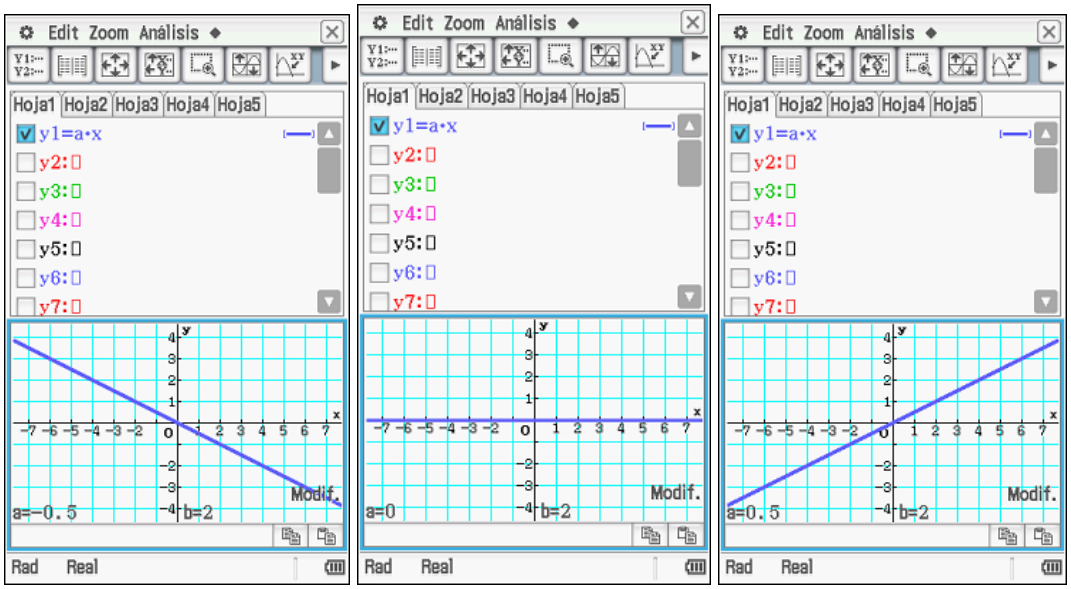
Estudiemos la función de proporcionalidad $f(x) = a\,x$



Escogemos la opción de ✥ / **Gráfico Dinámico**, donde podremos definir el rango de valores para ***a***. Podemos escoger entre una representación manual y otra de automática. Debido a la rapidez del ordenador, la representación automática es demasiado rápida para apreciar los cambios en la función. Escogeremos pues la representación manual.

Para poner en marcha la representación pulsar **Aceptar** y cambiaremos el valor del a pulsando en la tecla de cursor hacia la derecha (o hacia la izquierda). (Si deseáramos variar la variable ***b*** deberíamos usar las teclas de cursor arriba y abajo).

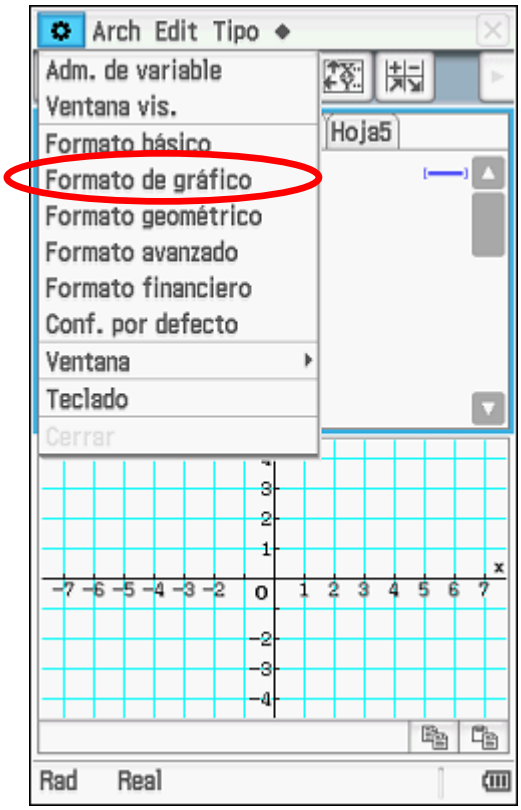


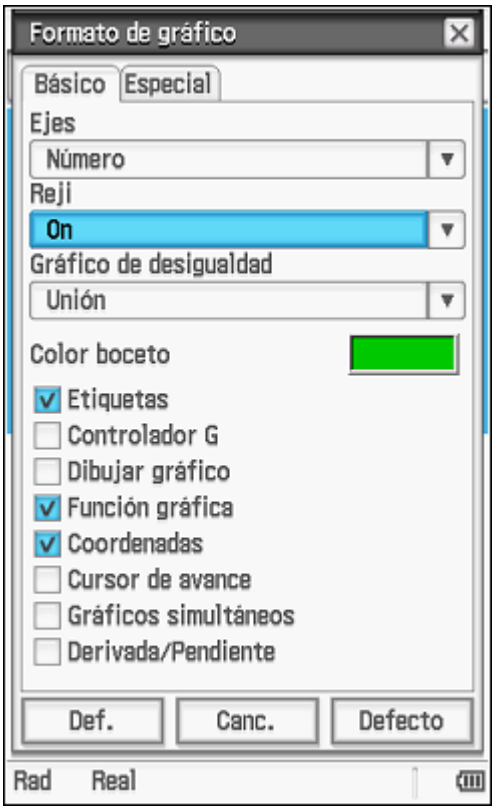


Parar salir del gráfico dinámico, se debe pulsar 

del panel de iconos.

Para un mejor estudio de la función y de la pendiente se puede activar **Rejilla On** dentro del **Formato de gráfico**:



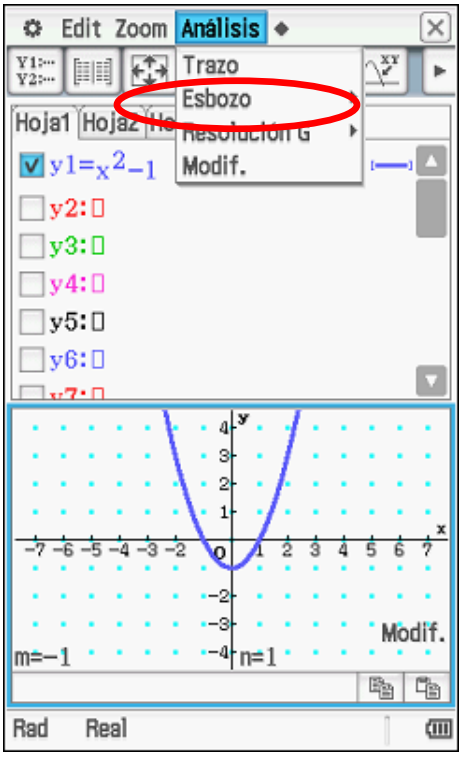


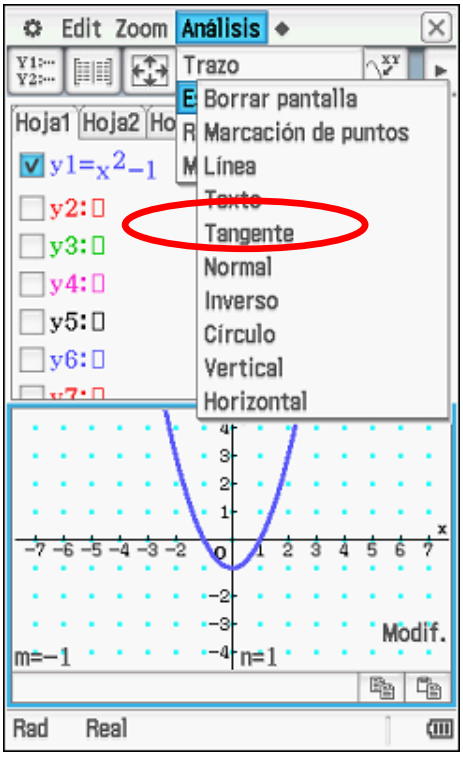
Los nombres asignados a las variables no tienen porque ser ***a*** y ***b***, es posible escoger cualquier otra variable, por ejemplo $y = m\,x + n$

Una vez finalizado el estudio con gráficos dinámicos, es conveniente borrar las variables utilizadas: / **Adm. de variable** y seleccionar las variables que deban ser eliminadas.

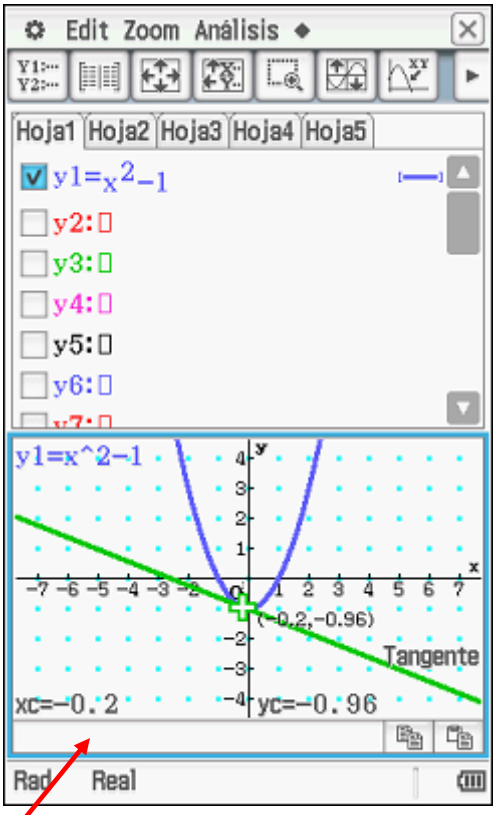
RECTA TANGENTE A UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Entre las opciones del menú **Análisis** se encuentra **Esbozo** que ofrece distintas posibilidades para incluir nuevos elementos en el gráfico de una función.

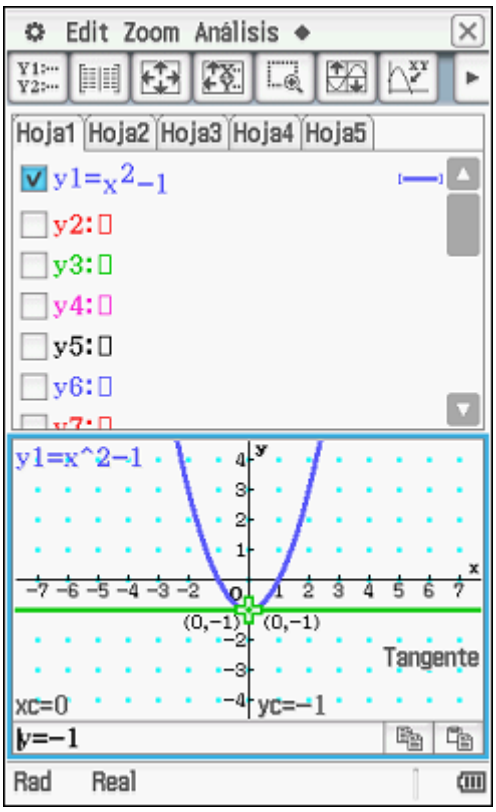


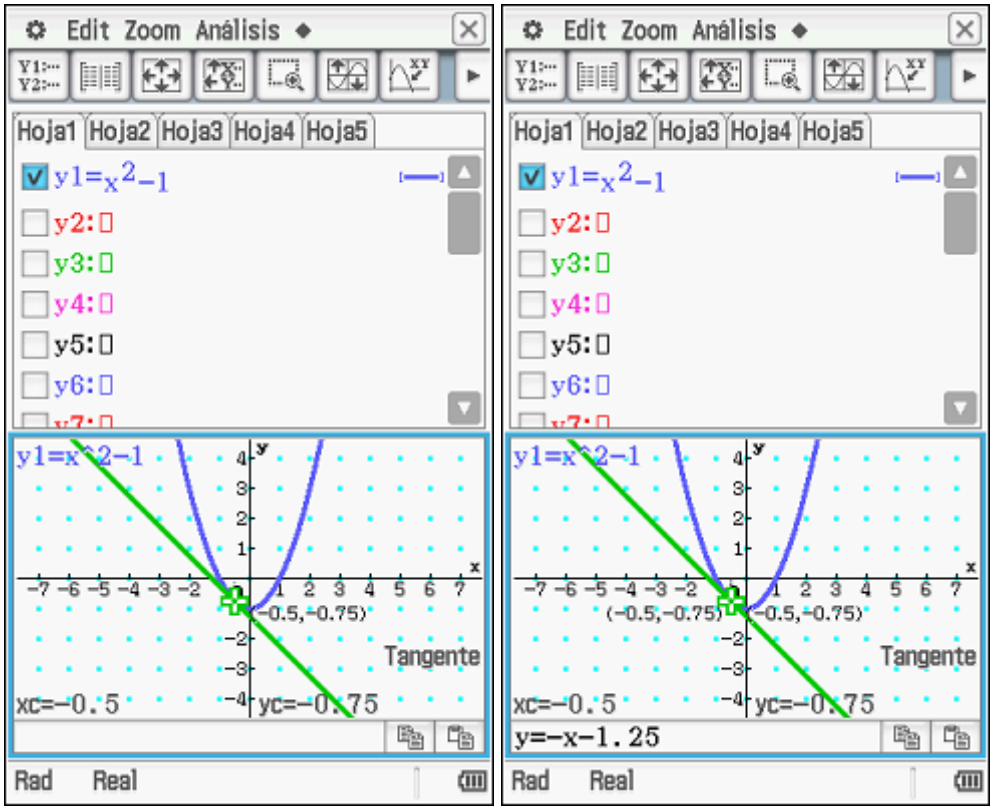


La opción **Tangente** dibuja la recta tangente a la función en el punto indicado. Podemos mover el cursor para obtener las distintas rectas tangentes.

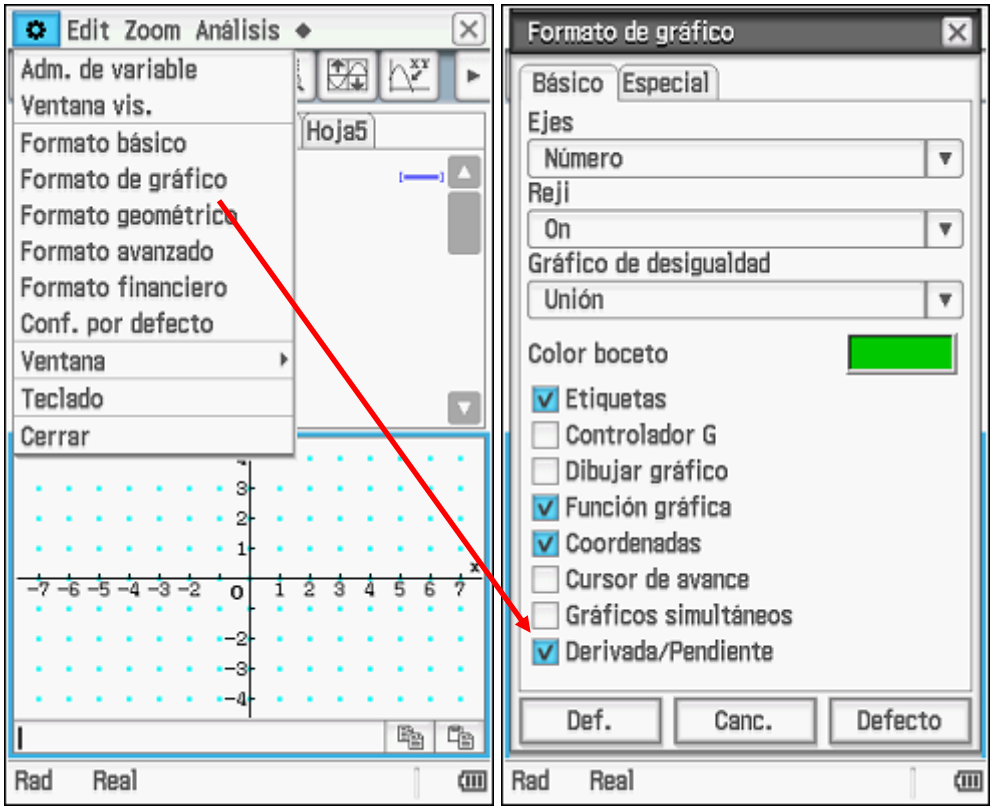


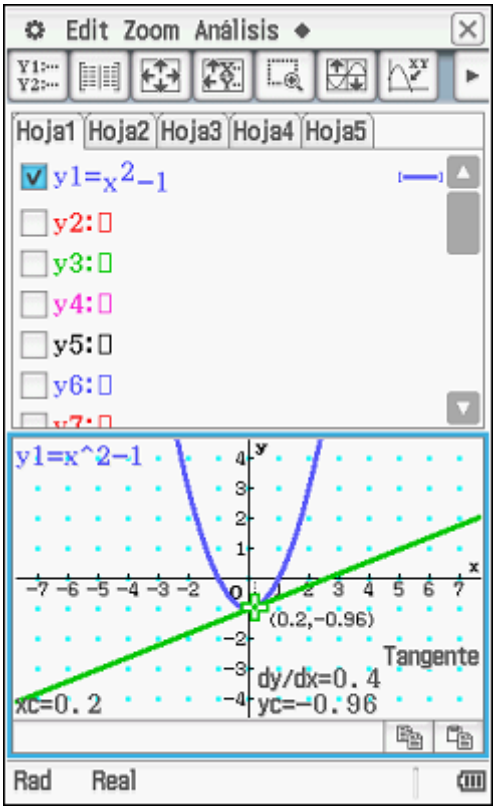
Podemos obtener la ecuación de cada una de las tangentes sin más que colocar el cursor en la barra de abajo y pulsar enter, una vez que tenemos la recta tangente en el punto que deseamos.



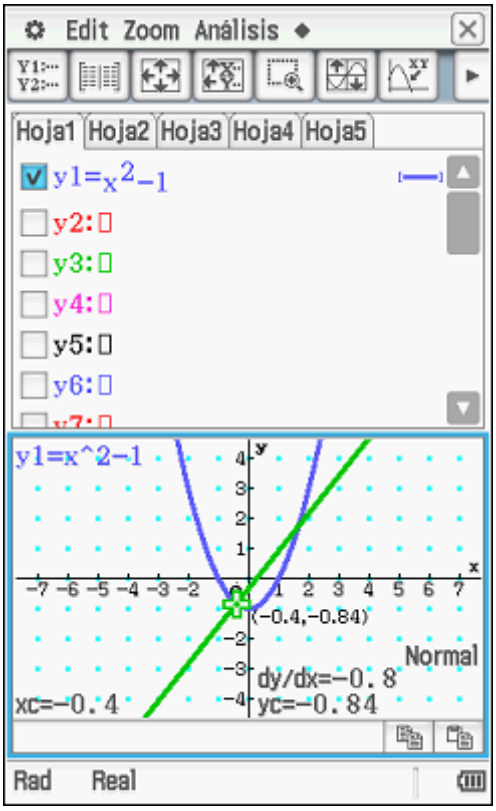


Si activamos la opción **Derivada/Pendiente** del formato de gráfico, obtendremos visualmente el valor de la derivada de la función en el punto, es decir de la pendiente de la recta tangente en dicho punto.



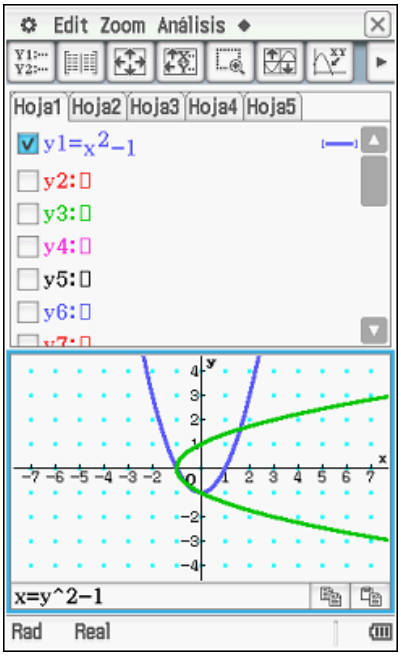


De manera análoga se dibujará la recta normal a una curva en un punto, seleccionando en este caso la opción **Normal** dentro de **Análisis-Esbozo**.



El resto de opciones de este menú se utilizarán para borrar los elementos dibujados (**Borrar pantalla**), dibujar un punto (**Marcación de puntos**), un segmento (**Línea**), un círculo (**Círculo**), incluir texto (**Texto**) o trazar una recta horizontal o vertical.

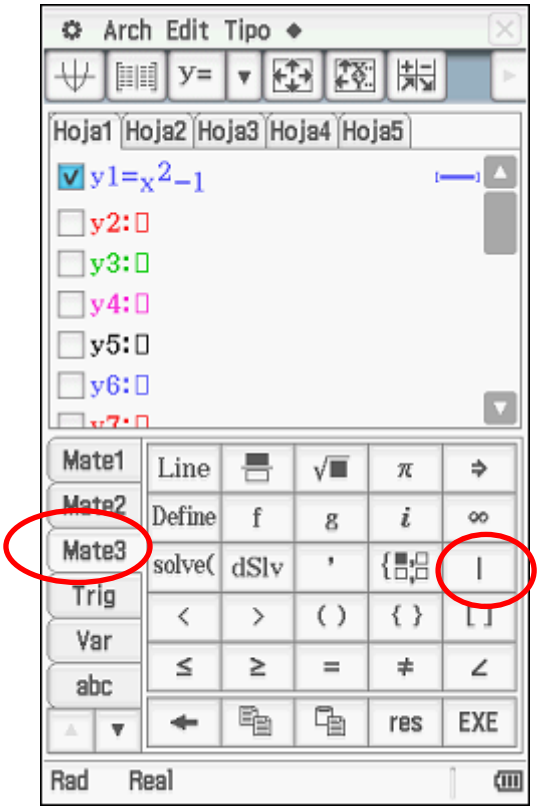
Además, en este menú se encuentra la opción **Inverso** para representar la inversa de una función.



FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

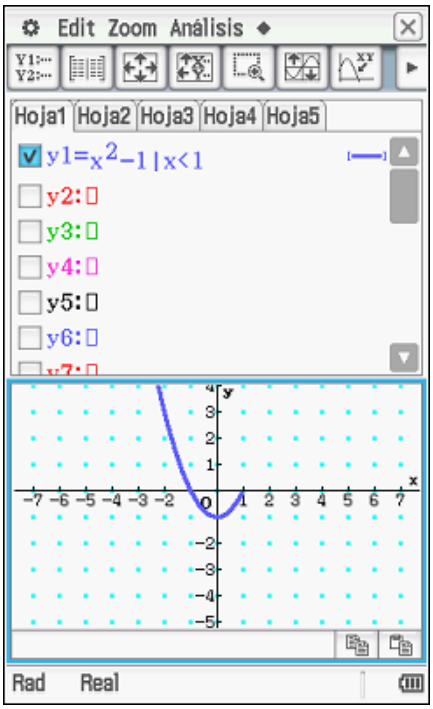
Es posible restringir el dominio de definición de una función utilizando el operador "**si**" que aparecerá representado por |.

Este operador aparece al seleccionar la pestaña **Mate3** en el keyboard. Así mismo aparecen en el mismo teclado las desigualdades <, >, ≤ y ≥, tan necesarias para definir los intervalos de definición.



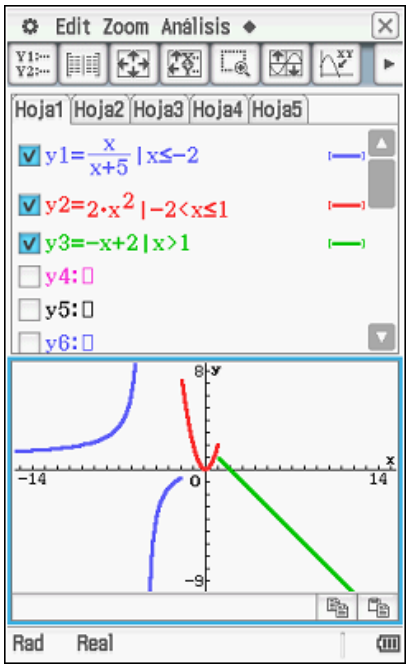
Ejemplo 1.

Por ejemplo, al escribir x^2 - 1 | x < 1 representará la función x^2-1 en el intervalo (-∞, 1).



Ejemplo 2.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x+5} & x\le 2 \\ 2x^2 & -2<x\le 1 \\ -x+2 & x>1 \end{cases}$$



Se puede observar que cada trozo se representa el un color diferente.

La instrucción **piecewise**

Otra manera de obtener la representación gráfica de una función definida a trozos es mediante la instrucción piecewise cuya sintaxis es:

piecewise(condición, acción$_1$, acción$_2$)

Esta función evalúa la condición indicada realizando la acción$_1$ si es verdadera y la acción$_2$ en caso contrario.

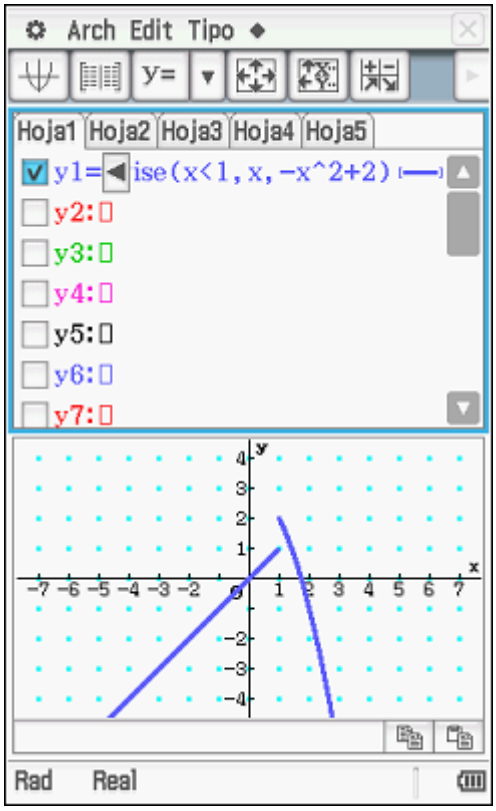
Por ejemplo, para dibujar la función f(x) definida por:

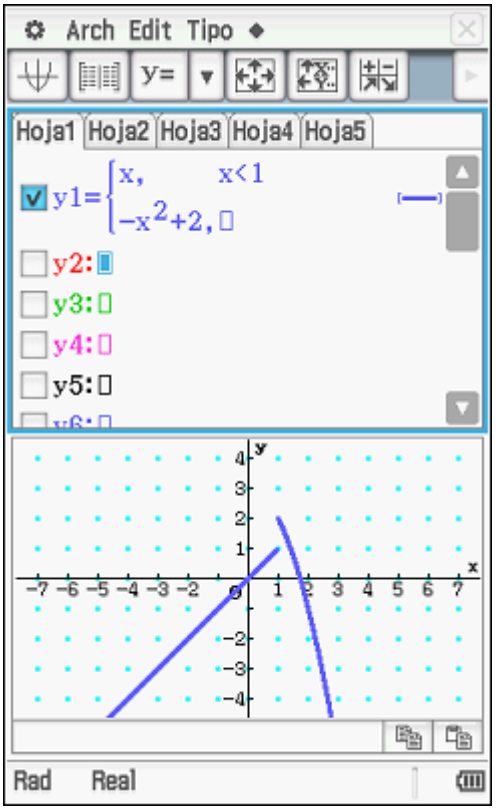
$$f(x)=\begin{cases} x & si \quad x<1 \\ -x^2+2 & si \quad 1\le x \end{cases}$$

introduciremos la expresión siguiente:

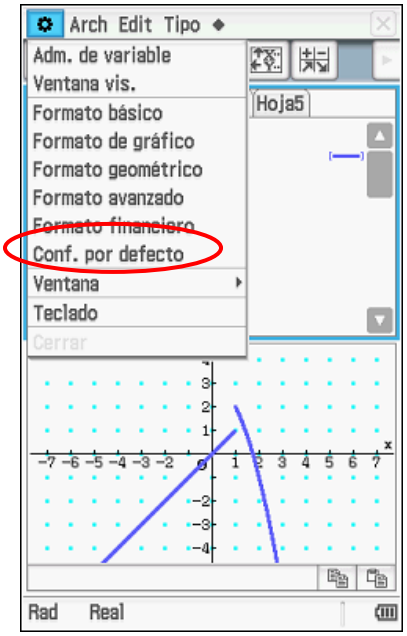
piecewise(x<1, x, -x^2+3)

El resultado aparece en la siguiente figura:

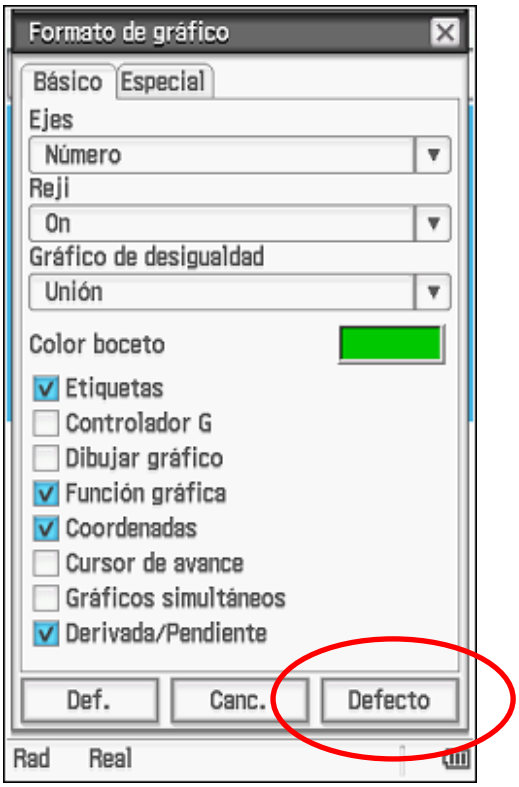




Cuando se realiza alguna modificación en la configuración de la calculadora es posible volver a las opciones por defecto que encontramos al seleccionar en la configuración la opción **Conf. por defecto**.



Si deseamos volver únicamente a la configuración por defecto del **Formato de gráfico**, debemos entrar en el mismo y seleccionar el botón **Defecto**.



.

PROGRAMACIÓN LINEAL. RESOLUCIÓN GRÁFICA

Un problema de programación lineal es aquel en el que pretendemos hallar el máximo o el mínimo de una función, llamada *función objetivo*, sujeta a una serie de restricciones que vienen expresadas en forma de inecuaciones.

Para resolver un problema de programación lineal tendremos que:

1. Encontrar la *función objetivo* y el *conjunto de restricciones*.
2. Determinar la *región factible* correspondiente al conjunto de restricciones, es decir, resolver el sistema de inecuaciones lineales.
3. Calcular el punto o los puntos, si existen, donde la función objetivo alcanza el máximo o el mínimo.

Tendremos que considerar el teorema:

Si una función lineal posee un máximo o un mínimo en un conjunto convexo, toma ese valor en un vértice o en un lado de dicho conjunto.

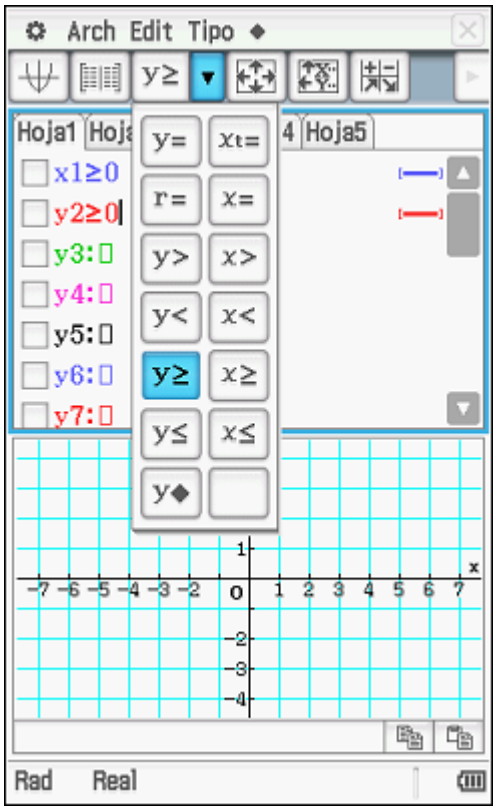
Para hallar el máximo (o mínimo) de la función objetivo **f(x, y)** por el método gráfico se dibujan las rectas de ecuación **f(x, y) = k**, donde *k* toma distintas valores. Estas rectas, denominadas *rectas de nivel*, son paralelas y proporcionan una idea de hacia dónde se desplaza **f(x, y)** cuando esta función aumenta o disminuye. Así, desplazándose paralelamente, se encuentra el vértice o lado, si existe, en el que la función alcanza el máximo o el mínimo.

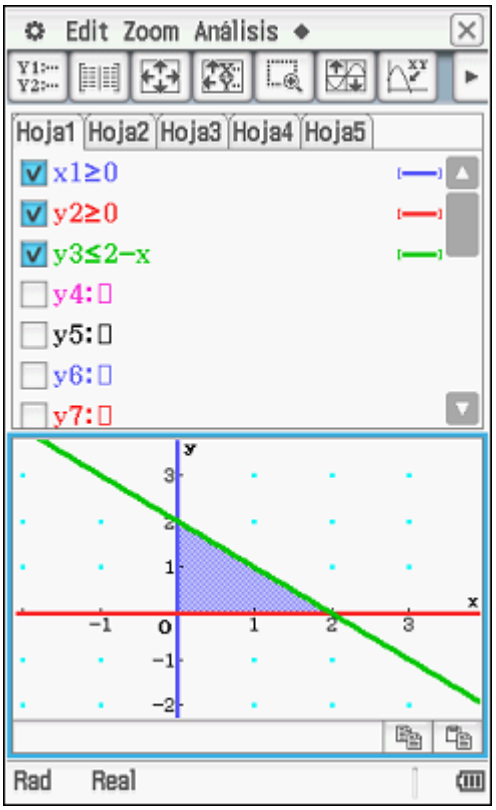
Ejemplo 1

Hallar el máximo de la función $f(x,y) = 2x - 3y$ *sujeto a las restricciones:*

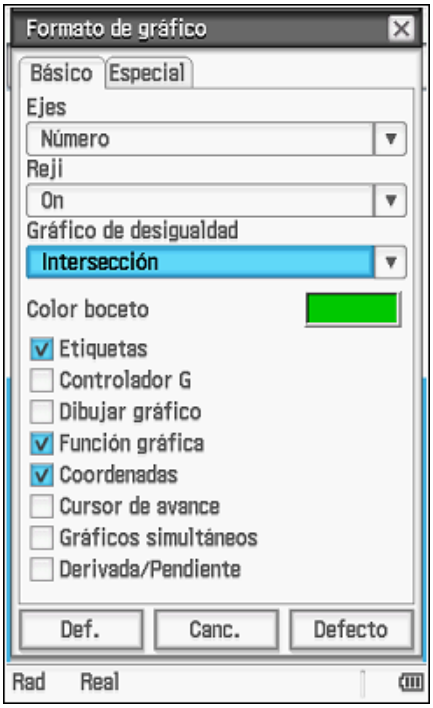
$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad x + y \leq 2$$

En la pantalla del menú principal accedemos al modo gráfico e introducimos el conjunto de restricciones, de esta manera determinamos la región factible. Usaremos la pestaña para encontrar la restricción x o y que nos convenga:



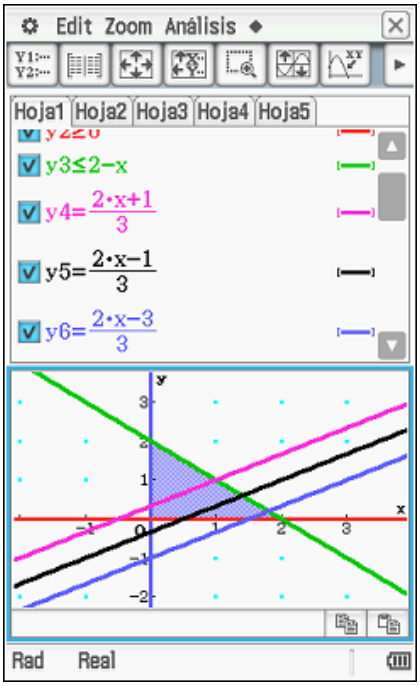


No olvidemos que, antes de empezar a trabajar, tendremos que acceder al "formato de gráfico" y marcar la casilla "**intersección**" dentro de la pestaña "gráfico de desigualdad". De no hacerlo, el aspecto de nuestro gráfico tal vez no sea el más adecuado.



Podemos editar los colores jugando con las líneas horizontales de color que hay a la derecha de cada una de las funciones.

A continuación representamos algunas rectas de nivel $f(x, y) = k$, por ejemplo $2x-3y=-1$, $2x-3y=1$, $2x-3y=3$.



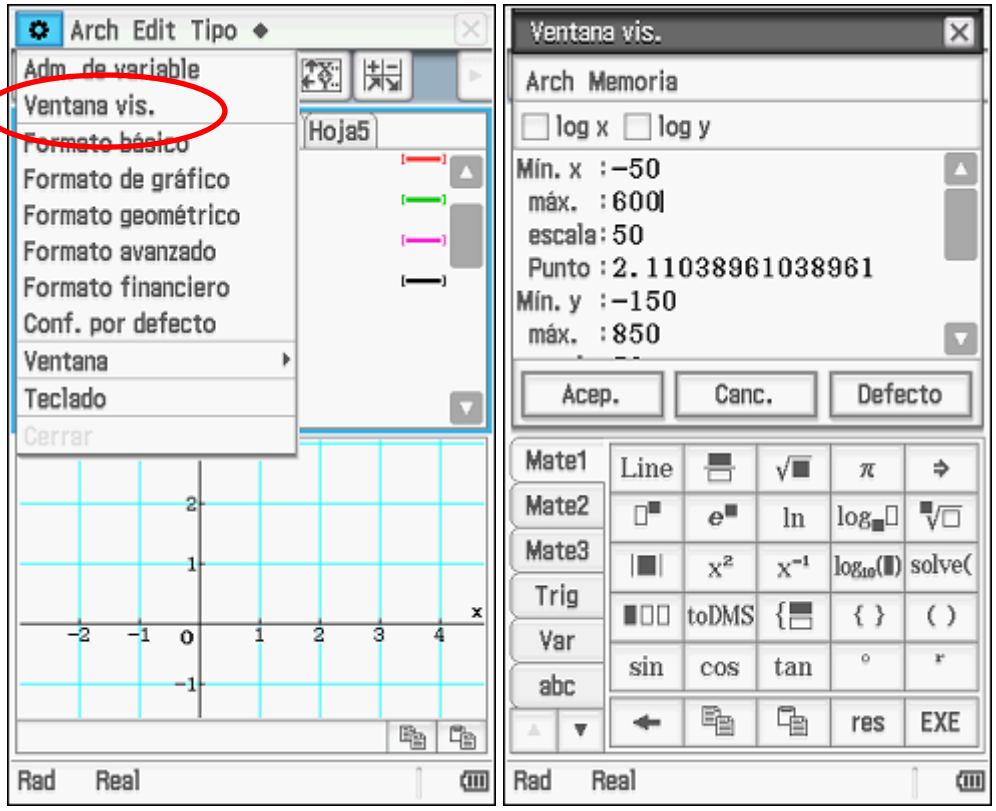
Observamos que a medida que aumentamos la k (en este caso, con el valor 3), el haz de rectas se aproxima al vértice (2,0), que será por lo tanto aquel en el que se alcance el máximo.

Ejemplo 2

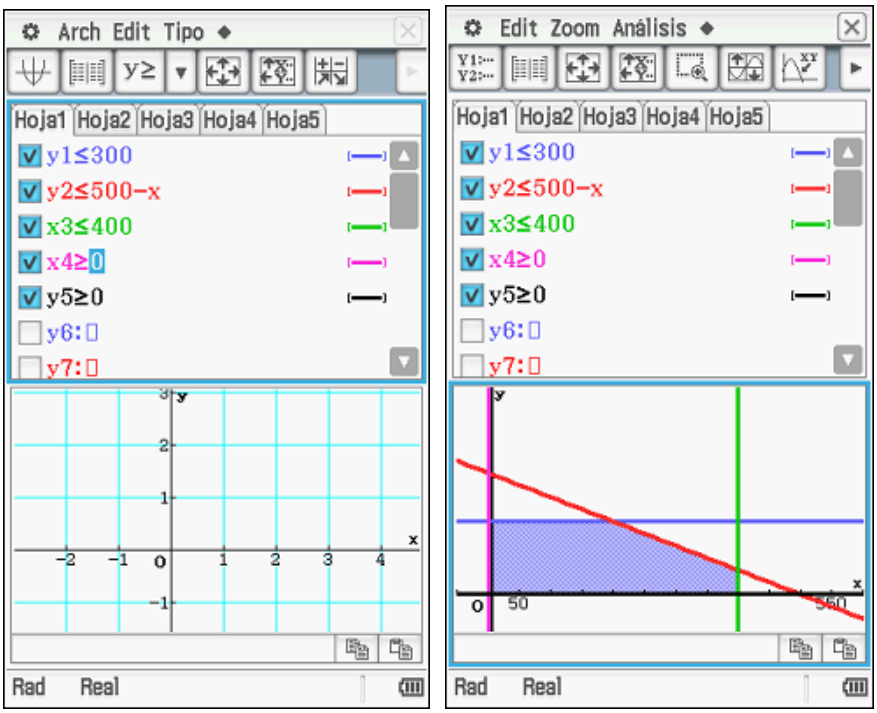
Halla el máximo de la función f(x, y)=450x + 600y sujeto a las restricciones

$$\begin{cases} y \le 300 \\ x + y \le 500 \\ x \le 400 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

En éste ejemplo hay que ajustar los parámetros de escala para la visualización de la ventana; fíjese bien en los que tiene su calculadora pues puede salir una gráfica extraña; unos valores adecuados para este ejemplo serían:



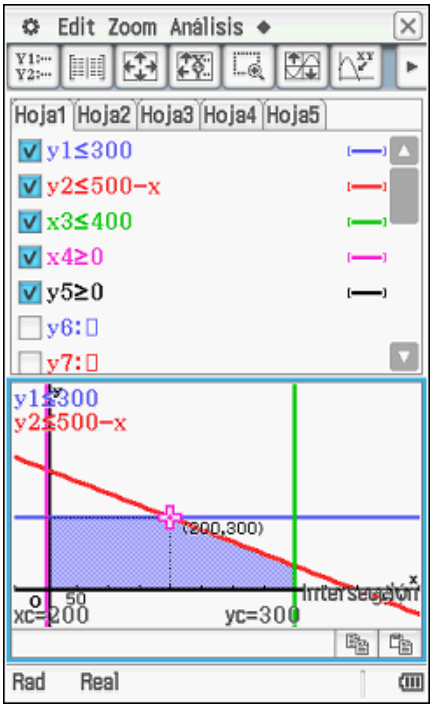
Representamos gráficamente el conjunto de restricciones:



Los vértices **A(0, 0)** B**(0,300)** **E(400,0)** se observan a simple vista.

Para hallar los otros vértices utilizamos las opciones **Intersección** y **Cal *y*** del submenú **Resolución - G** del menú **Análisis.**

En ambos casos podemos movernos por las distintas rectas utilizando las flechas de cursor arriba y abajo.



obteniéndose los vértices **C(200, 300)** y **D(400, 100)**

La recta que representa a la función objetivo cuyos valores son nulos es:

$$450x + 600y = 0$$

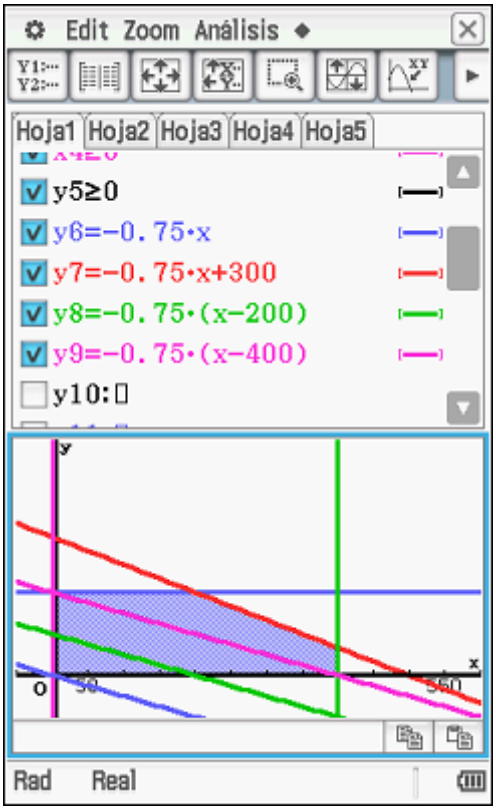
que en forma explícita nos da una pendiente de $m = -0.75$

De todas las infinitas rectas paralelas a ésta que pasan por el conjunto de restricciones, la que nos proporcione el máximo será aquella que corte al eje OY por el punto más lejano del origen. Estas *líneas de nivel* serán rectas que tienen por ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Para representarla en la calculadora la pondremos como $y = m(x - x_1) + y_1$.

En la calculadora, en la lista de funciones, seleccionamos la forma de ecuaciones "**y=**". Vamos a calcular sólo las líneas de nivel que pasan por los vértices calculados



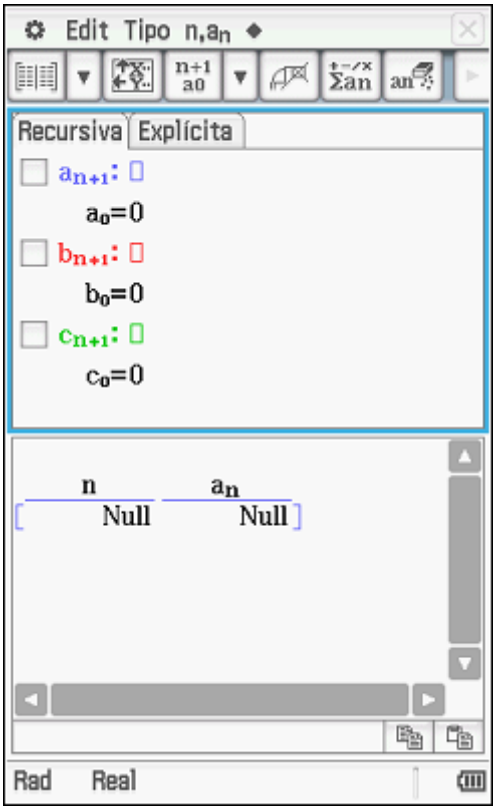
Podemos comprobar que la recta que tiene mayor ordenada en el origen es la que pasa por el punto **C(200,300)**.

REPRESENTACIÓN DE SUCESIONES

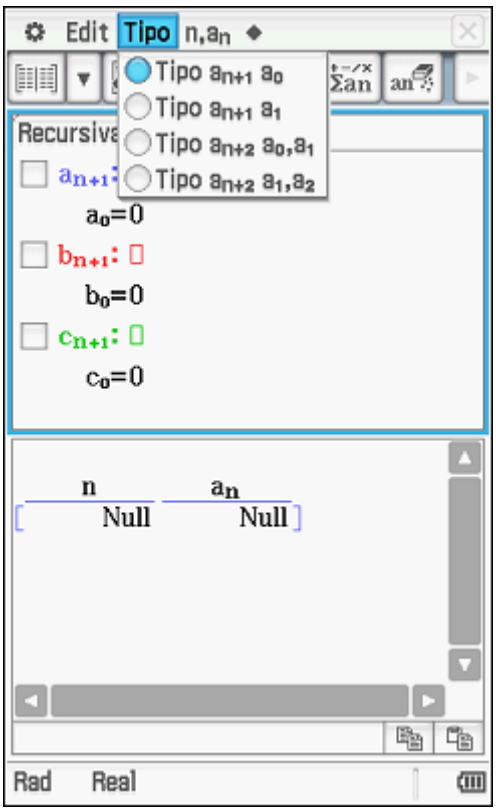
Para acceder a las opciones que ofrece la calculadora **Classpad 400** para trabajar con sucesiones pulsaremos en el menú principal de aplicaciones sobre el icono correspondiente a **Secuencia**.

Aparecerá la pantalla de la calculadora dividida en dos ventanas: la ventana para editar las sucesiones y la ventana de tablas correspondientes a las expresiones anteriores.

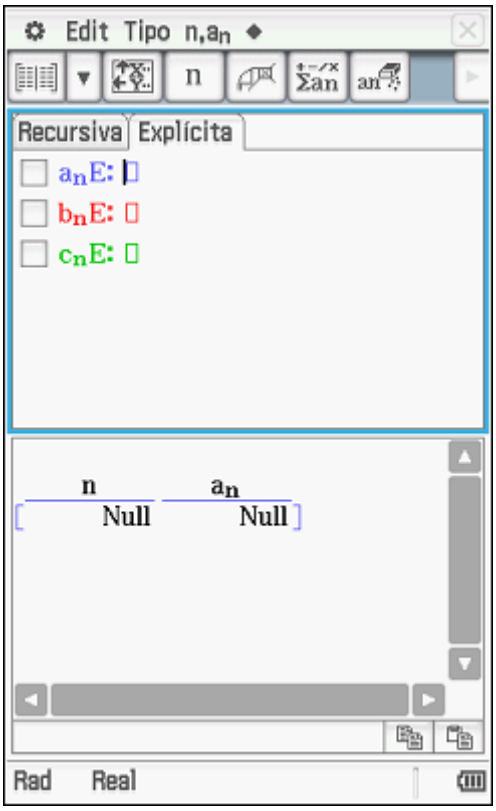
En la ventana de edición observamos dos pestañas que corresponden a los modos en los que es posible introducir las expresiones: en modo recursivo o en modo explícito.



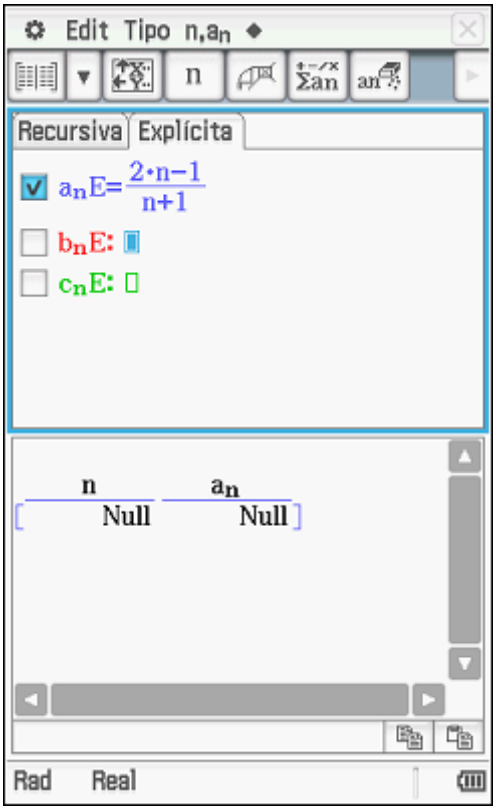
En modo recursivo es posible determinar el formato que tendrá el término general de la sucesión y los valores iniciales a través de la opción **Tipo**.



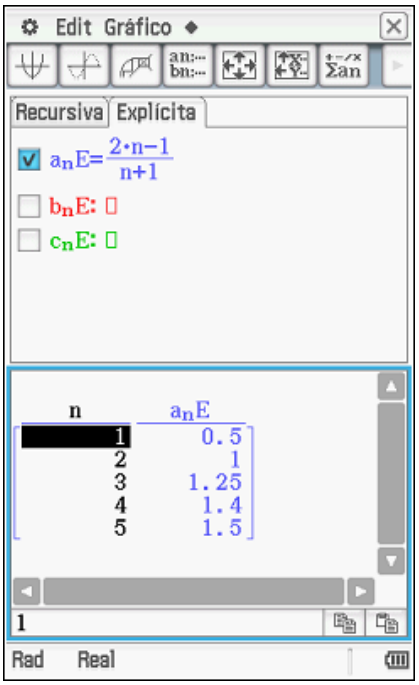
Al seleccionar el modo de trabajo explícito aparece la siguiente ventana para introducir la expresión de las distintas sucesiones:



Introducimos, por ejemplo, la expresión de la sucesión de término general $a_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$.

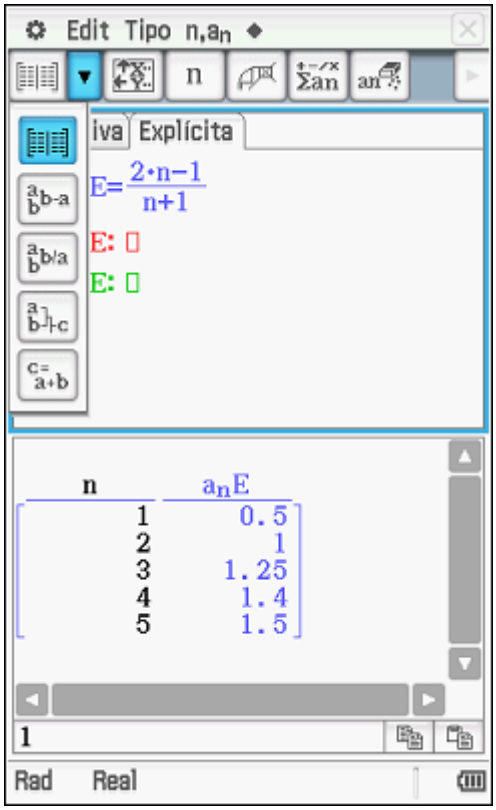


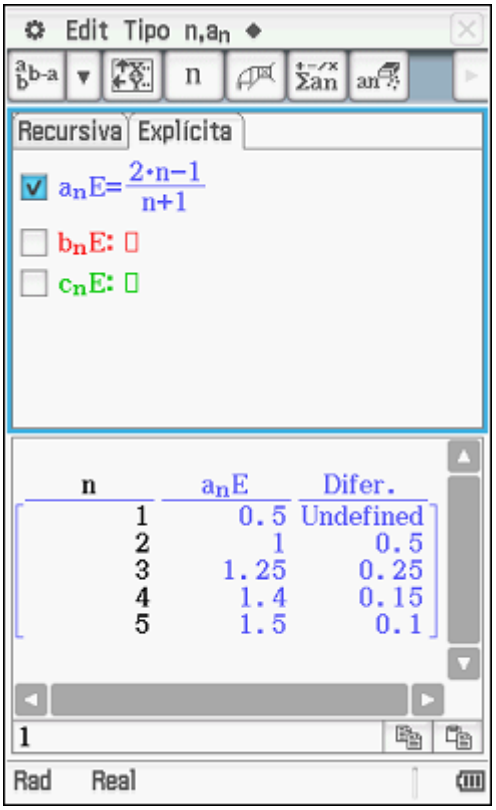
Cuya tabla de valores aparecerá la pulsar sobre el icono como podemos observar en la imagen siguiente:



Una vez dibujada la tabla de valores observamos que es posible acceder a nuevos formatos de tablas a través del menú desplegable que presenta la opción correspondiente a la tabla de valores.

Al pulsar sobre el triángulo se abrirá un nuevo menú que permite obtener tablas con nuevas columnas que corresponden a distintas opciones como por ejemplo, las diferencias entre los términos obtenidos.

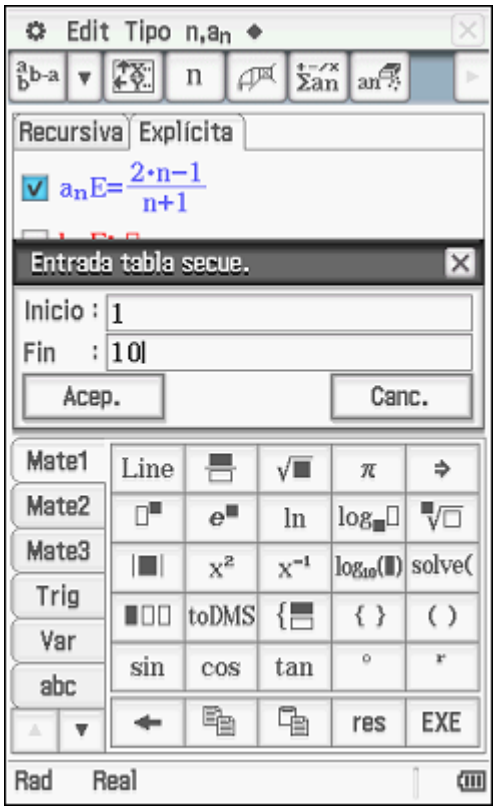


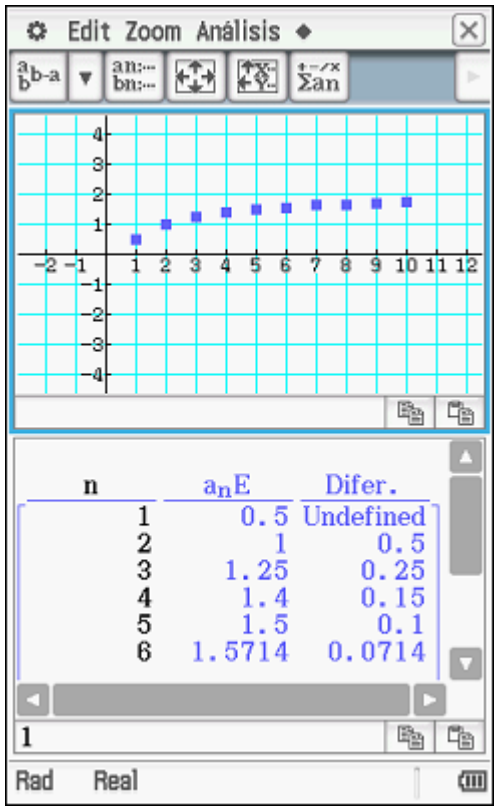


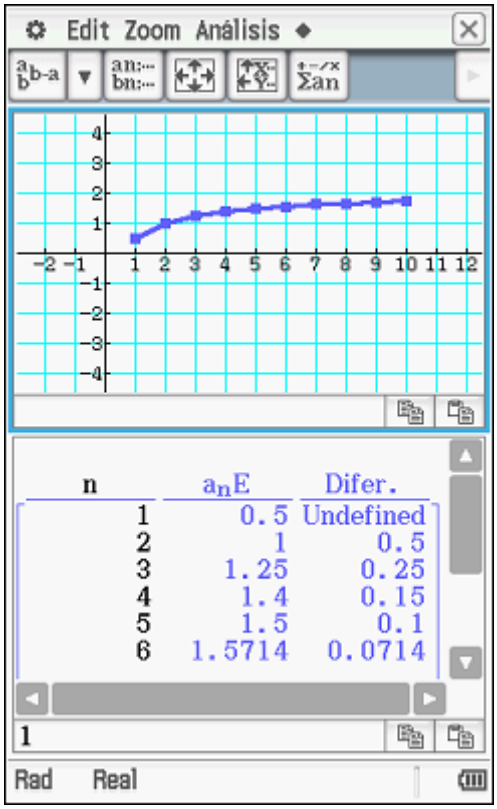
De manera análoga a como ha quedado expuesto en este mismo tema, modificaremos los valores iniciales y el rango de la tabla de valores obtenida para la sucesión anterior usando el botón  .

Los valores representados en la tabla de valores se podrán dibujar al pulsar sobre la opción  , una vez establecida la ventana correspondiente a la tabla como ventana activa.

Para establecer una ventana como activa basta pulsar sobre ella, aparecerá con un marco más grueso.



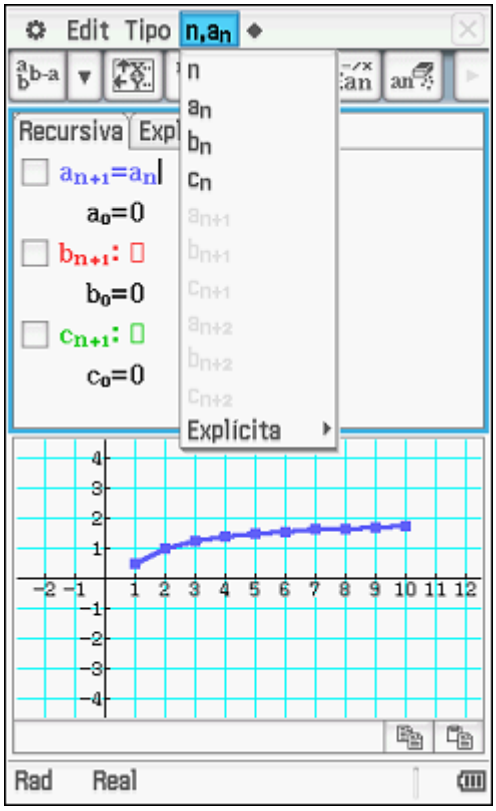


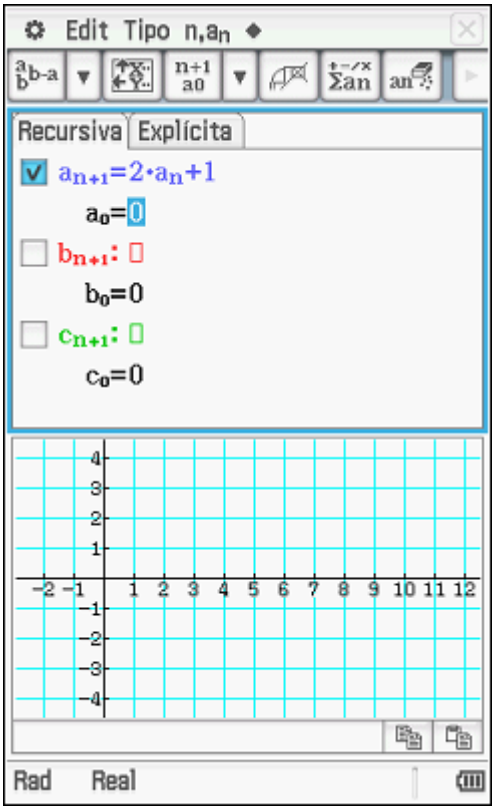


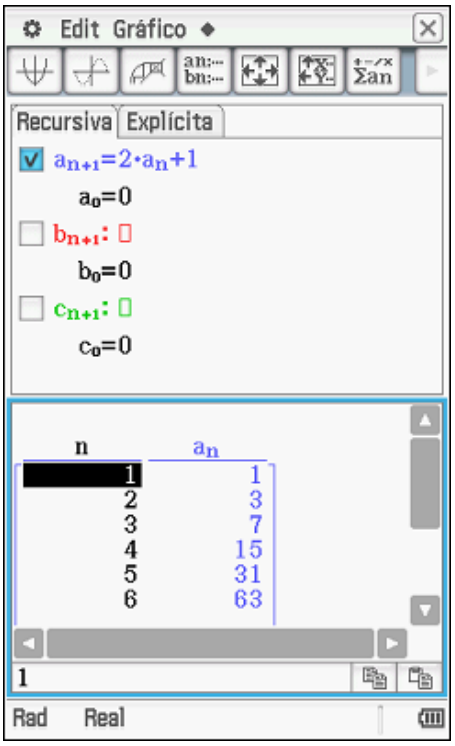
Para representar los puntos sin que aparezcan unidos es necesario seleccionar el icono 

De manera análoga se trabajará con sucesiones expresadas en forma recursiva.

Para hacer referencia al termino $\mathbf{a_n}$ será necesario pulsar sobre la opción **n,an**.



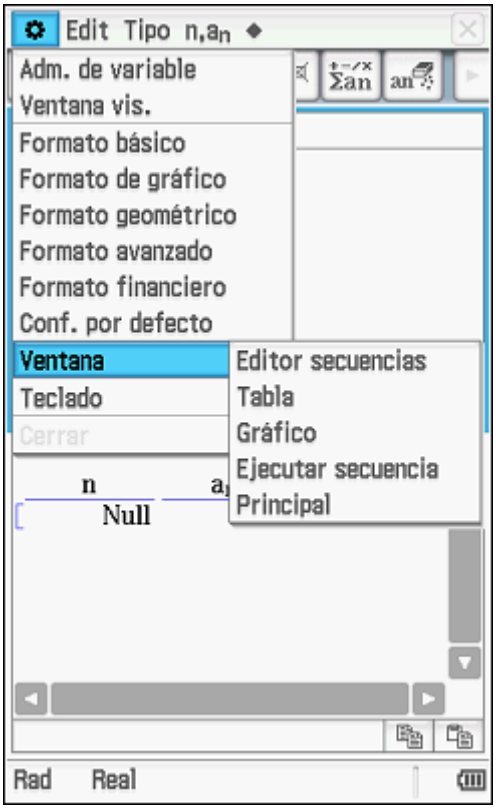




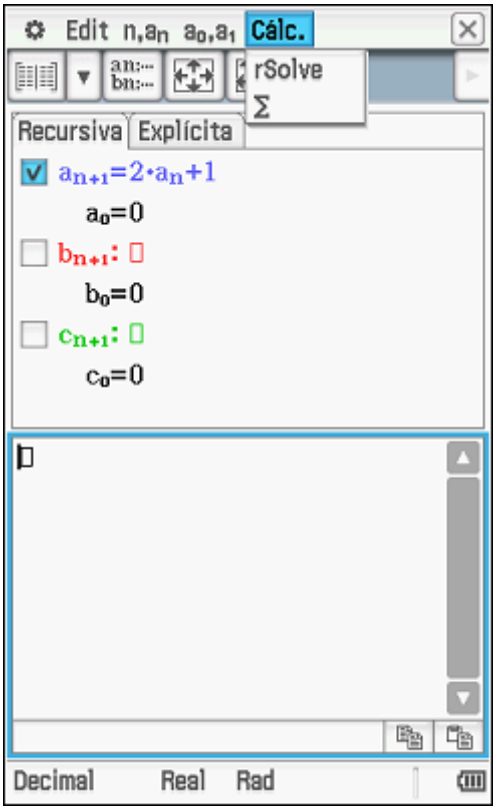
Un proceso similar, ajustando previamente los valores de la ventana nos permite dibujar la sucesión.

A partir de una expresión recursiva se podrá obtener el término general en forma explícita de la sucesión realizando el siguiente proceso:

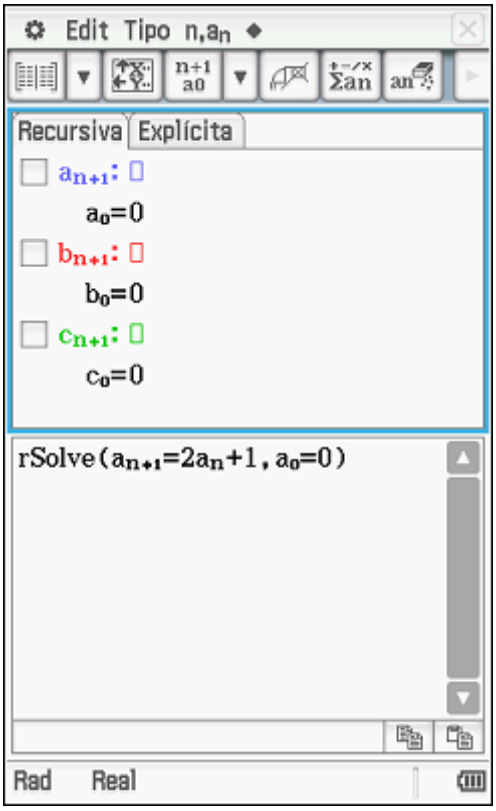
- Seleccionamos la opción **Ejecutar secuencia** en el menú principal-Ventana:



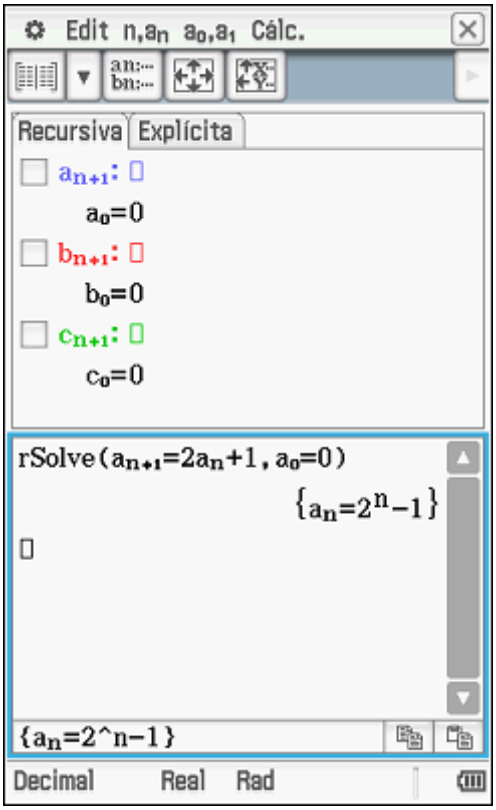
-Elegimos la opción **rSolve** que aparece en el menú correspondiente a la opción **Cálc**.



- Escribimos la expresión recursiva de la sucesión. En este caso $a_{n+1}=2a_n+1$, donde a_0 será igual a 0. En la parte de arriba tenemos distintas opciones para escribir a_0, a_n, a_{n+1}…



- Al pulsar **Enter** o **EXE** aparecerá la expresión del término general de la sucesión.



-

Con un proceso similar es posible calcular la suma de los términos de una sucesión para un cierto rango, utilizando para ello la opción $\sum$ que aparece junto a **rSolve** en el menú **Cálc**.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Sea la función $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$.
   a. Calcula mediante un cálculo sistemático (tablas de valores) los siguientes límites:

   $$\lim_{x\to 1^-} f(x) \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x)$$

   b. Halla el valor de los límites anteriores desde la aplicación principal.
   c. Representa gráficamente la función, la asíntota vertical y la asíntota horizontal.

2. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

   $f(x) = x^4 - 2x^2$

   $g(x) = x^2 + 3x - 1$

   $h(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$

   $i(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$

   $j(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

   $k(x) = \sqrt{x^2-1}$

   $l(x) = \dfrac{1}{x-4}$

   $m(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

   a. Desde la aplicación principal y con la ayuda del comando **Define**, calcula $f(-x)$ y compara con la función original
   b. Mediante tablas de valores con un rango centrado en $x = 0$.
   c. Representando gráficamente la función.

3. Halla la recta tangente a la función $y = x^4 - 2x^3$, en x = 2. Representa la función y la recta tangente.

4. Halla y representa las rectas tangente y normal a la función $y = -2x^2 + 1$, en x = 1.

5. Representa la función $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad 0<x \end{cases}$

6. Representa la función a trozos:

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & x<0 \\ x^2 & 0\le x<2 \\ -x+6 & x\ge 2 \end{cases}$$

7. Dibuja la función $f(x)=\dfrac{1-x}{2+x}$ y su inversa.

8. Halla *m* y *n* para que la función f sea derivable en R.

$$f(x)=\begin{cases} 3m\,x^2+3 & \text{si} \quad x\le 1 \\ 2x^3+n & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

9. Estudia la continuidad de la función f.

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x<1 \\ x^2+2 & 1\le x<3 \\ 1-x & x\ge 3 \end{cases}$$

10. Hallar los valores no negativos que minimicen la función lineal 3x+2y, a partir del sistema de restricciones:

$$\begin{array}{l} 7x+2y\ge 14 \\ 4x+5y\ge 20 \end{array}.$$

11. Hallar los valores que maximicen la función lineal 5x+4y a partir de las restricciones:

$$\begin{array}{l} 4x+3y\le 24 \\ 3x+4y\le 24 \end{array}$$

12. Representa los veinte primeros términos de la sucesión $a_n = \dfrac{n^2 - 1}{n+1}$.

Tema 9.
GEOMETRÍA CON LA CLASSPAD

- Introducción.
- La aplicación geometría.
- Herramientas para dibujar.
- Herramientas para construir.
- Movimientos en el plano.
- Herramientas para medir.
- Modificar el aspecto de una construcción.
- Animaciones.
- Actividades propuestas.

INTRODUCCIÓN

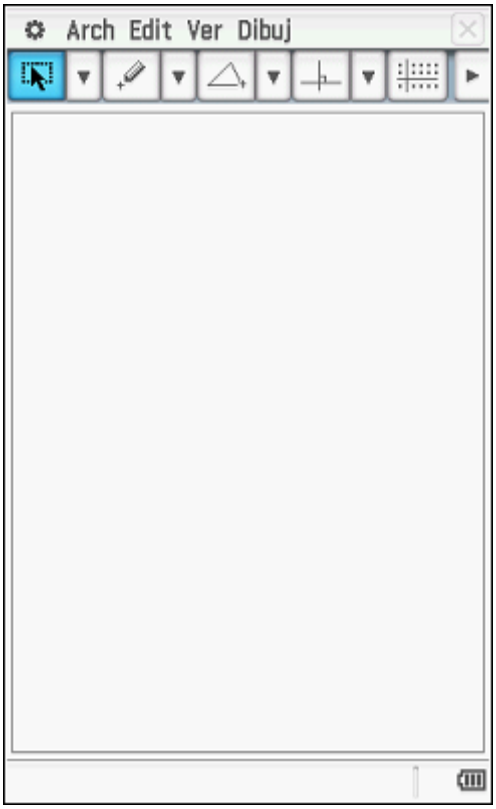
Este tema estará dedicado a la realización de distintas construcciones aprovechando el módulo sobre geometría dinámica que incorpora la calculadora Classpad.

Realizaremos una breve descripción de las diferentes herramientas que ofrece este módulo para realizar construcciones geométricas a partir de objetos elementales como son puntos, segmentos, vectores, rectas o circunferencias, entre otros.

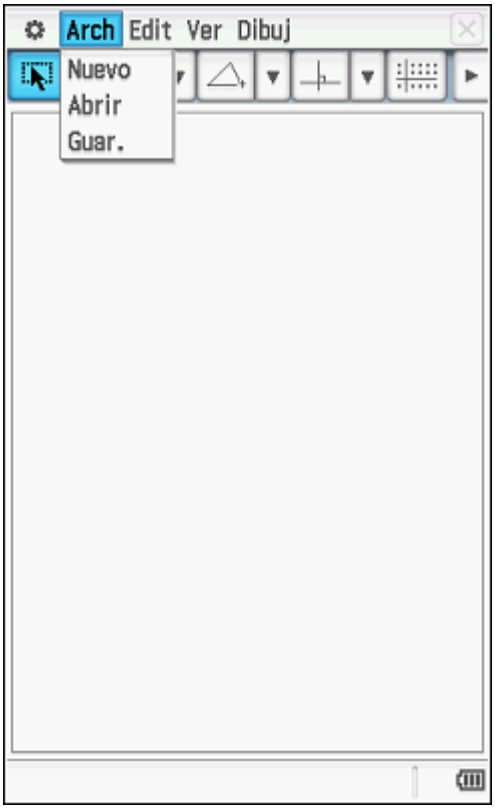
LA APLICACIÓN GEOMETRÍA

Para acceder a la aplicación para trabajar con distintas construcciones geométricas bastará con pulsar el icono correspondiente a **Geometría** en el menú principal.

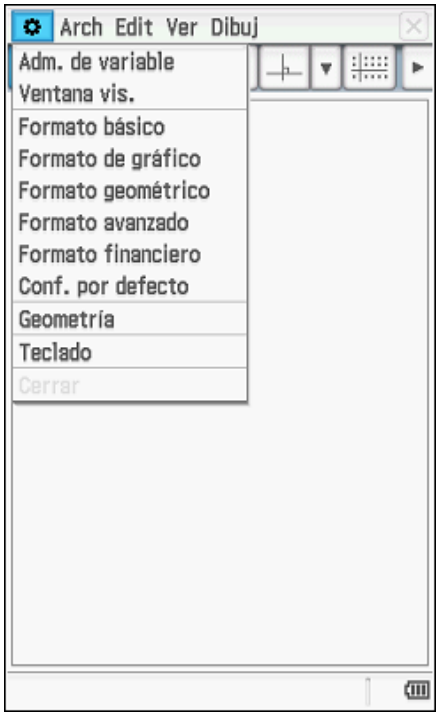
Aparecerá una pantalla similar a la siguiente:



Las opciones correspondientes al menú **Arch** y la mayoría de las opciones disponibles en el menú **Edit** son similares a las expuestas en las distintas aplicaciones estudiadas en temas anteriores.



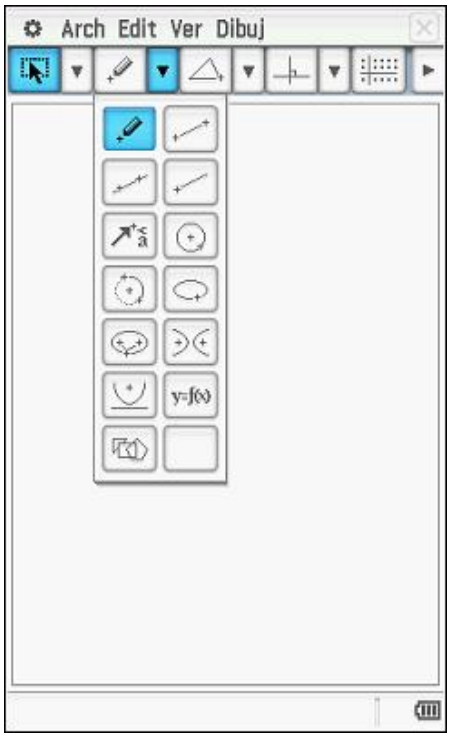
Lo mismo ocurre con las opciones que aparecerán al pulsar sobre en el menú principal.

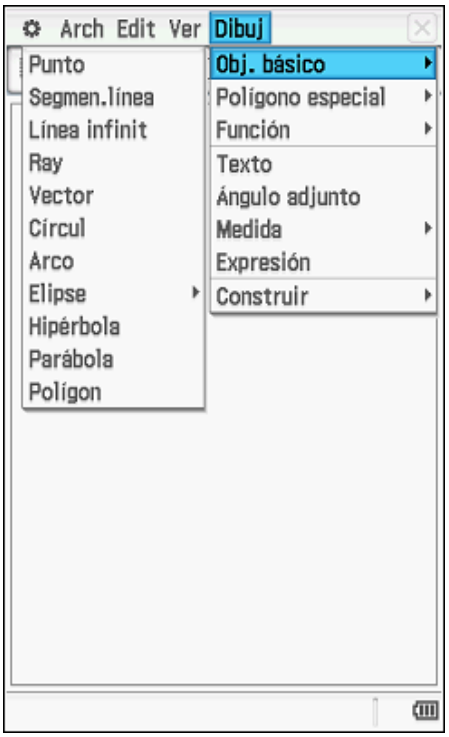


HERRAMIENTAS PARA DIBUJAR

Los elementos básicos a partir de los cuales realizar distintas construcciones geométricas los encontramos en el menú correspondiente a la opción **Dibuj**.

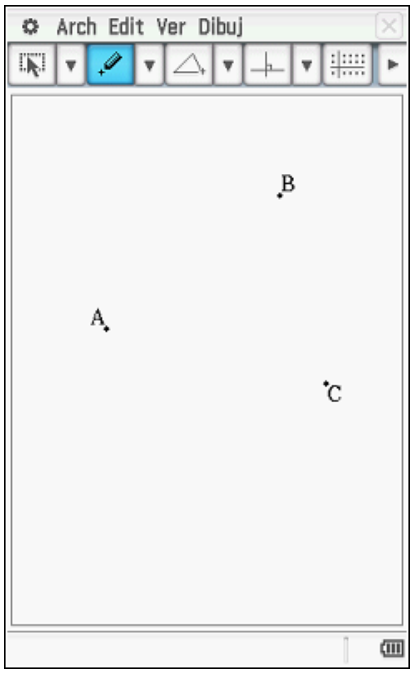
La mayoría de las opciones anteriores también se encuentran disponibles en la barra de herramientas.



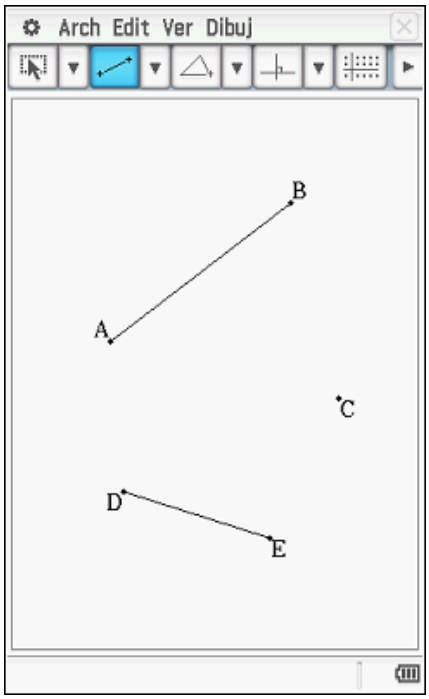


Brevemente exponemos cada una de las opciones disponibles en el menú anterior:

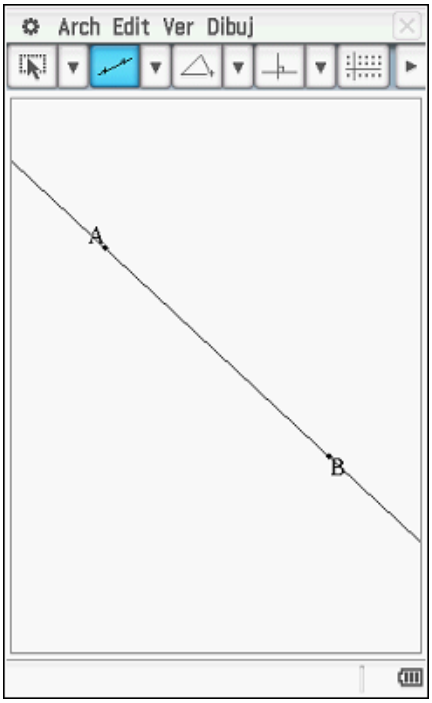
- **Punto**:  dibuja un punto en el plano en la posición en la que se encuentra el cursor al hacer clic en el ratón o al pulsar sobre la pantalla.



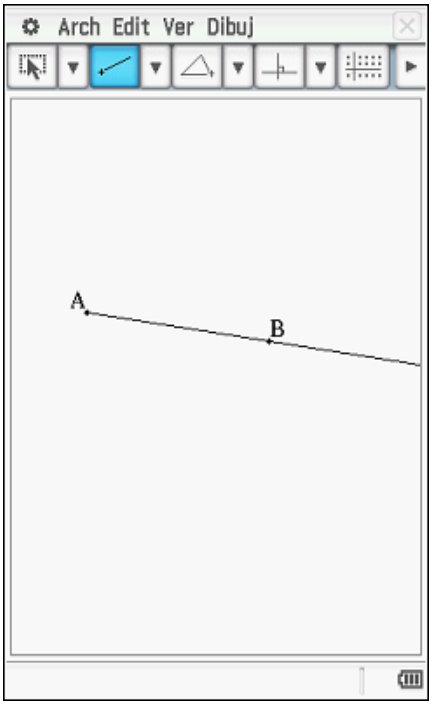
- **Segmento de línea**:  dibuja un segmento en el plano tomando como extremos las posiciones sobre las que se pulsa en la pantalla o tomando como extremos puntos previamente dibujados.



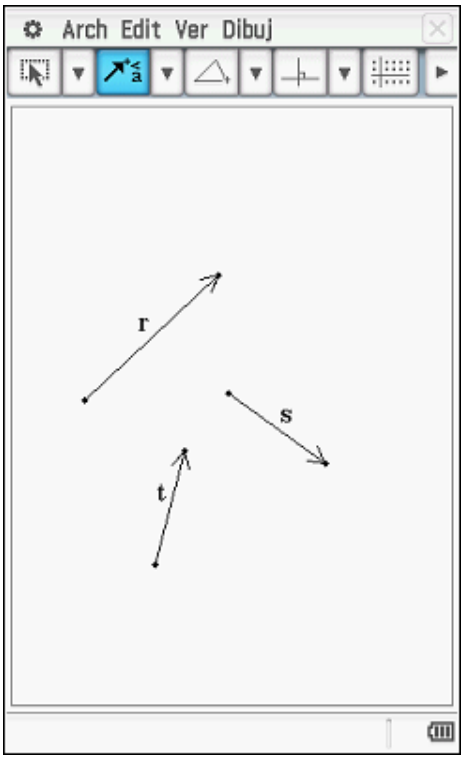
- **Línea infinit (Recta)**:  dibuja una recta a partir de dos puntos que pueden definirse al crear la recta o utilizar dos puntos previamente dibujados.



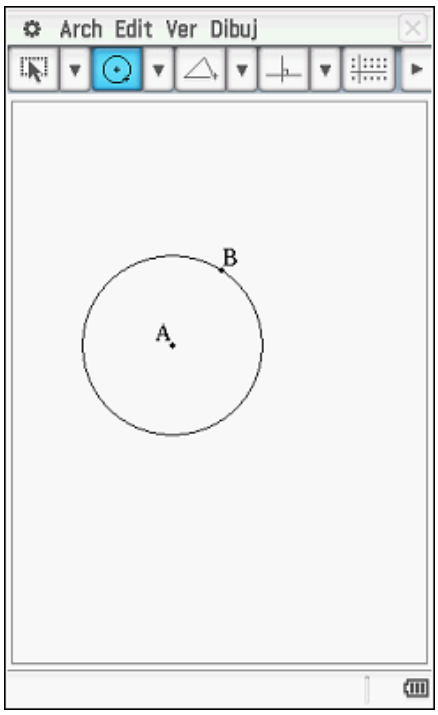
- **Ray (semirrecta)**:  dibuja una semirrecta a partir de dos puntos que pueden definirse al crear la recta o utilizar dos puntos previamente dibujados.



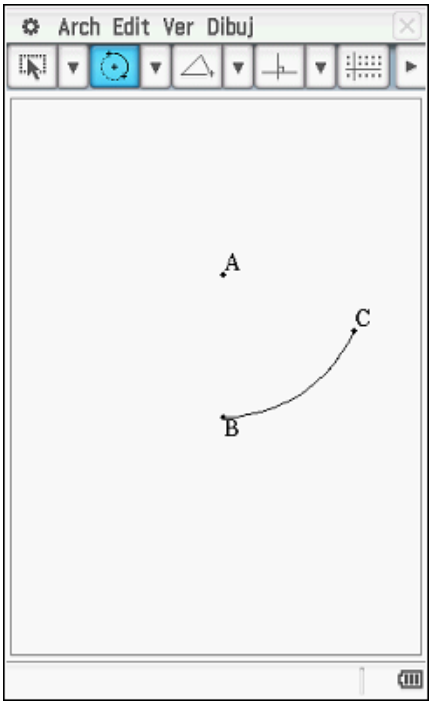
- **Vector**:  dibuja un vector siguiendo los mismos patrones expuesto al trazar un segmento.



- **Círcul (Circunferencia)**:  dibuja un círculo a partir de un primer punto que representa el centro y un segundo punto correspondiente a la circunferencia.



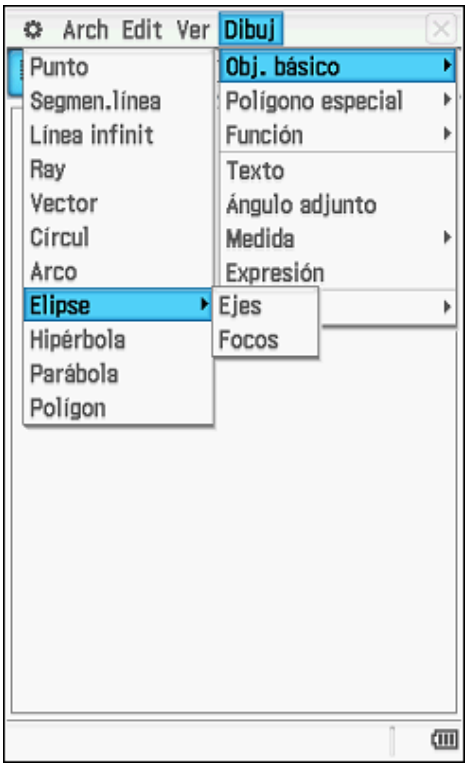
- **Arco**:  traza un arco de circunferencia a partir de tres puntos, el primero representa el centro de la circunferencia sobre la que se encuentra el arco, el segundo punto representa el comienzo del arco y el tercer punto representa el punto final.

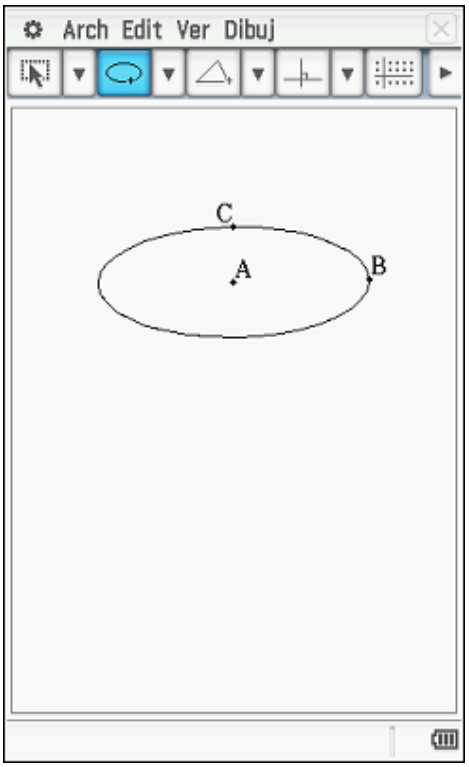


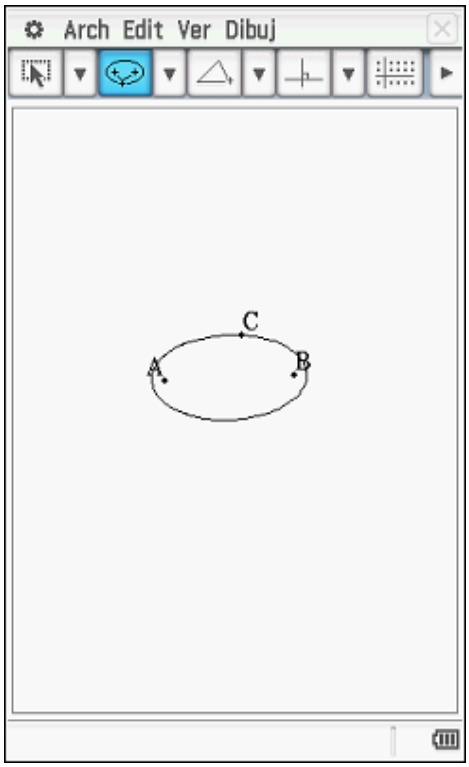
- **Elipse**: dibuja una elipse ofreciendo dos opciones: **Ejes**  o **Focos**  .

Ejes: dibuja la elipse a partir del centro y de los dos puntos correspondientes a los vértices.

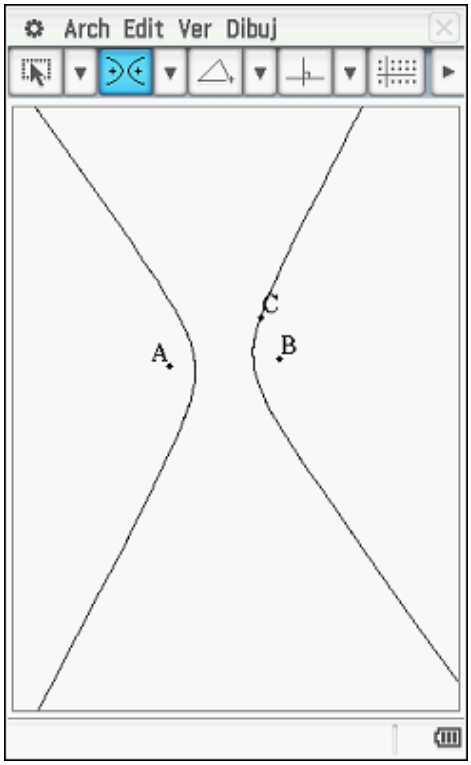
Focos: dibuja la elipse a partir del centro y de los dos puntos correspondientes a los focos.



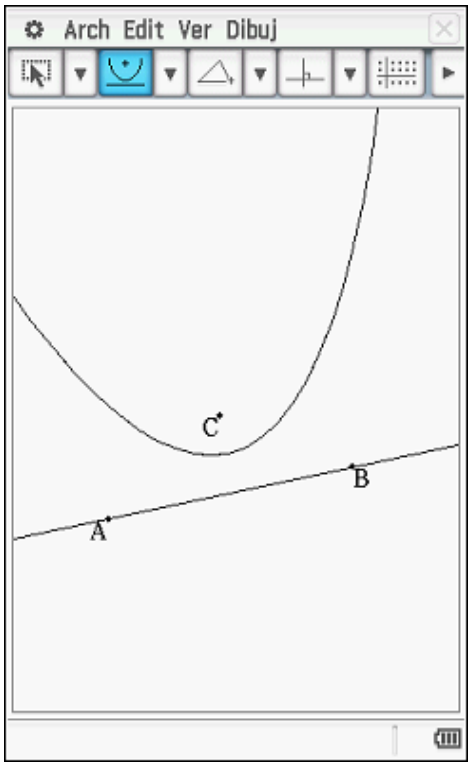




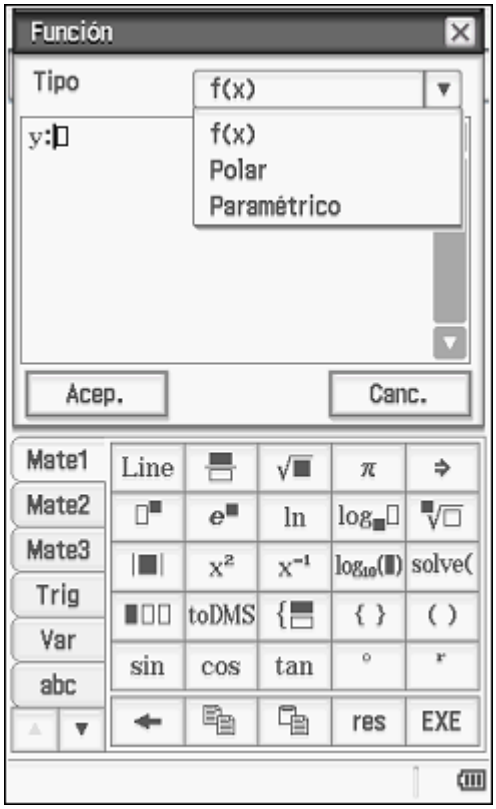
- **Hipérbola**:  dibuja una hipérbola a partir de los focos y de un punto.

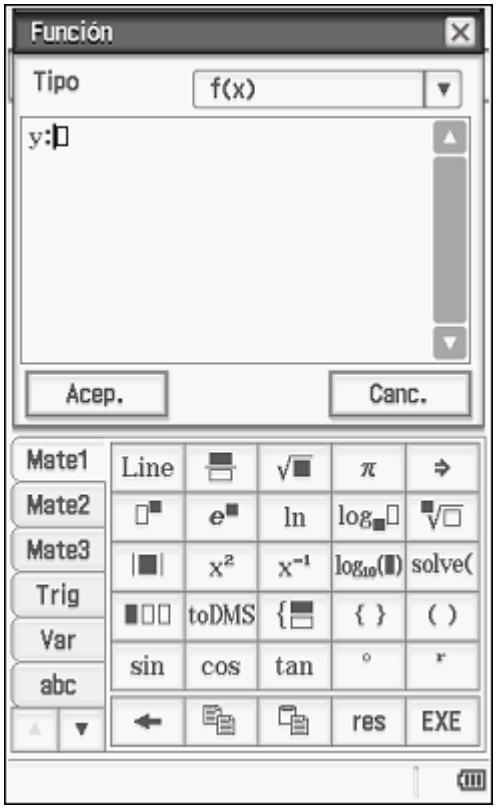


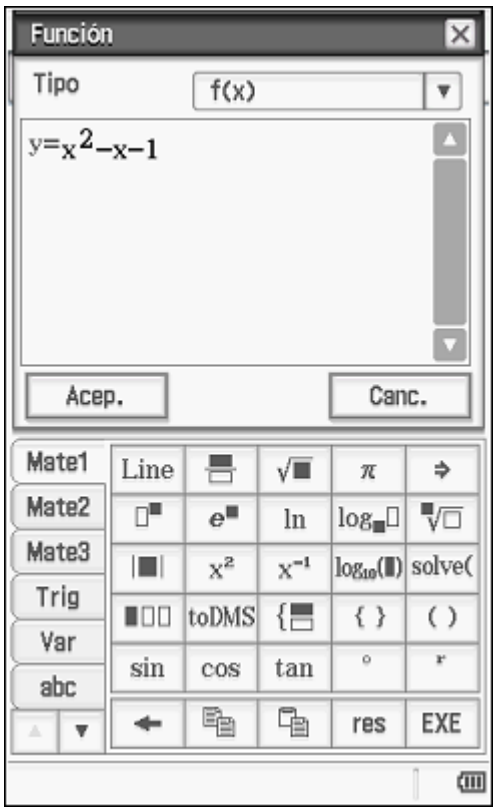
- **Parábola**:  dibuja una parábola a partir de tres puntos. Los dos primeros determinan la directriz y el tercero corresponde al foco.

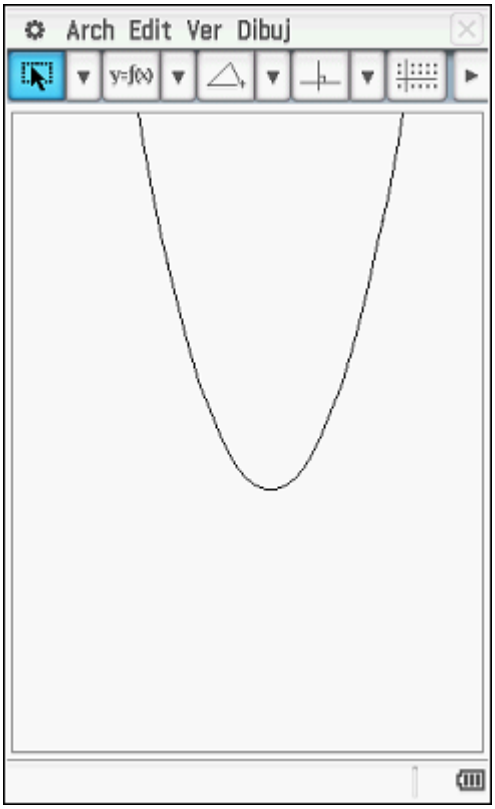


- **Función**:  representa una función a partir de su ley de formación. Las opciones que ofrece son: **f(x)**, **Polar** o **Paramétrico**.

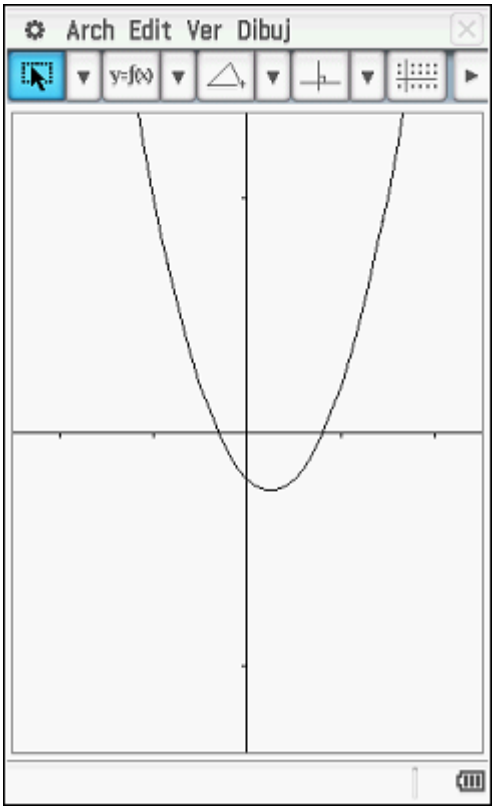


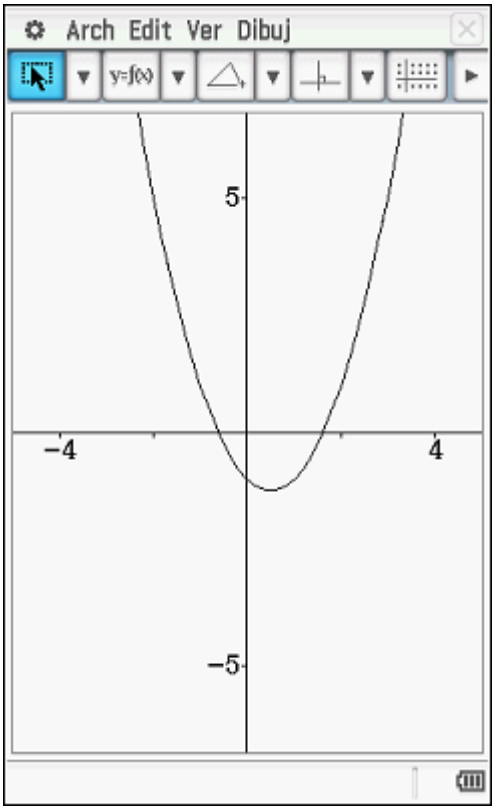


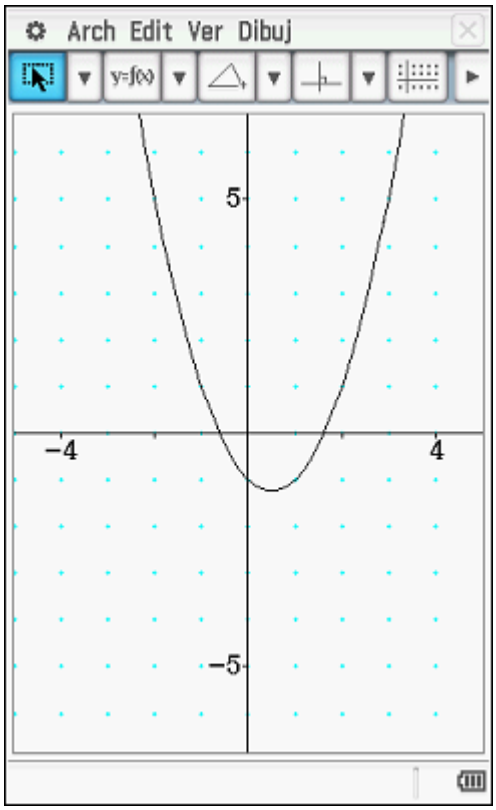


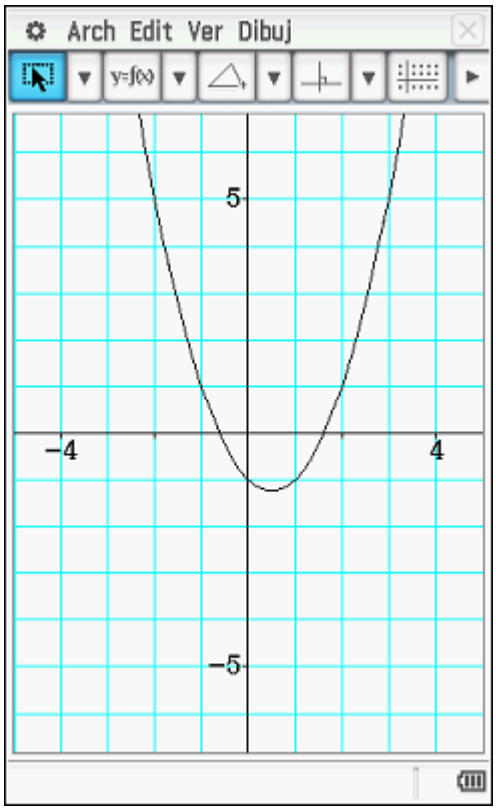


Observaremos mejor la función si activamos la representación de los ejes de coordenadas, pulsando sobre la opción  , al volver a pulsar aparecen las unidades y pulsando de nuevo aparece la rejilla y la cuadrícula.



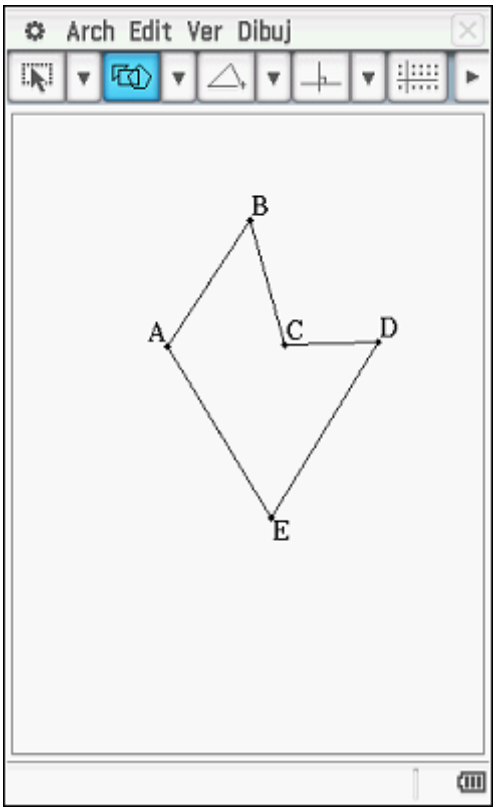






Al volver a pulsar desaparecen todos los elementos anteriores.

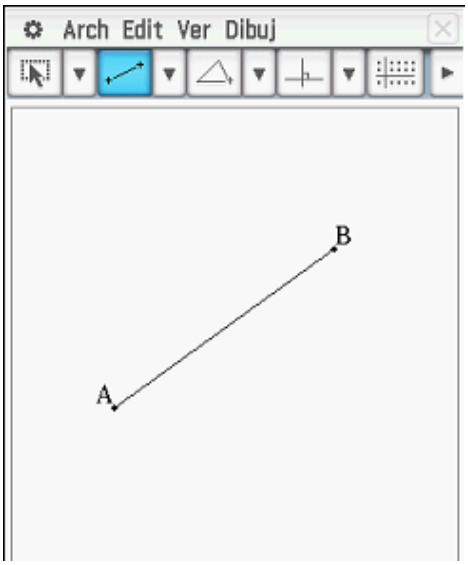
- **Polígono**:  dibuja un polígono a partir de sus vértices. Es necesario cerrar el polígono pulsando de nuevo sobre el vértice inicial.

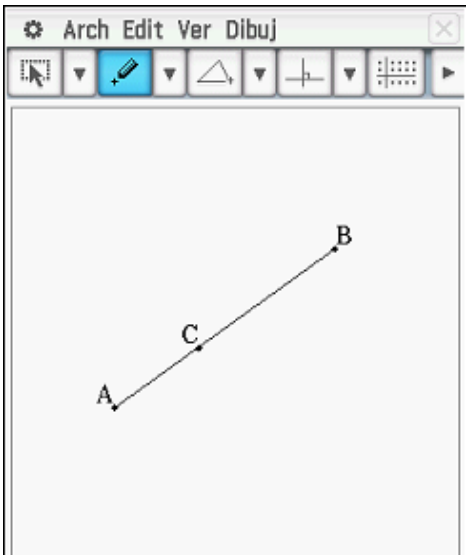


El resto de opciones las expondremos más adelante.

Para crear un punto sobre un objeto previamente creado basta con señalar sobré la posición correspondiente en dicho objeto.

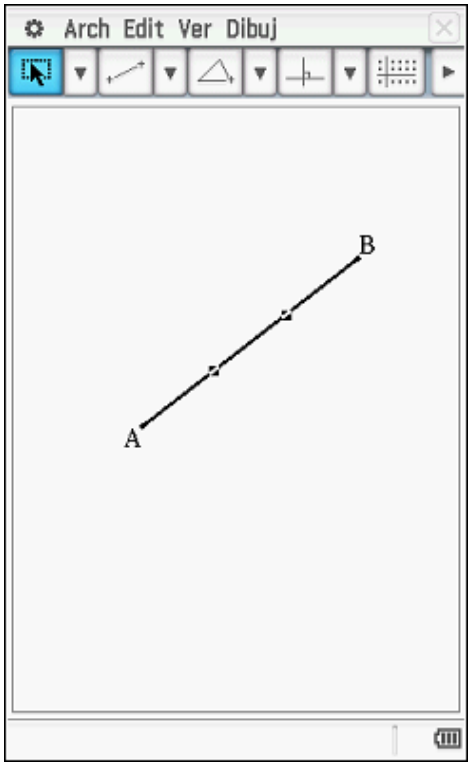
Por ejemplo para crear un punto sobre un segmento AB basta con seleccionar la herramienta **Punto**, marcando a continuación sobre el segmento para que aparezca el punto C.





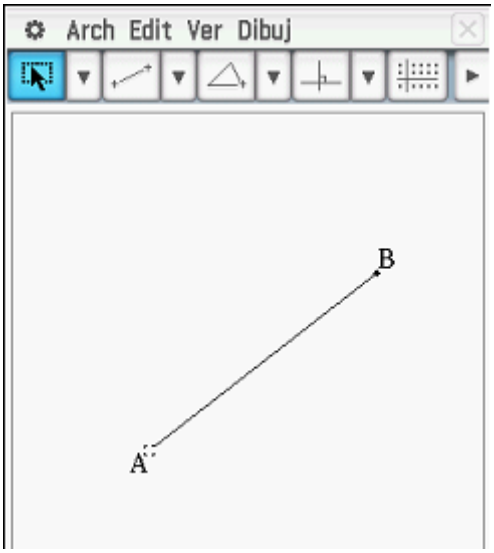
Podemos observar que antes de dibujar el punto C aparecen dos pequeños cuadrados sobre el segmento para indicar que dicho objeto está seleccionado y por tanto el nuevo punto se dibujará sobre el segmento.

Para seleccionar un objeto es necesario pulsar sobre él, aunque previamente es necesario marcar la herramienta **Puntero** representada por el icono  .

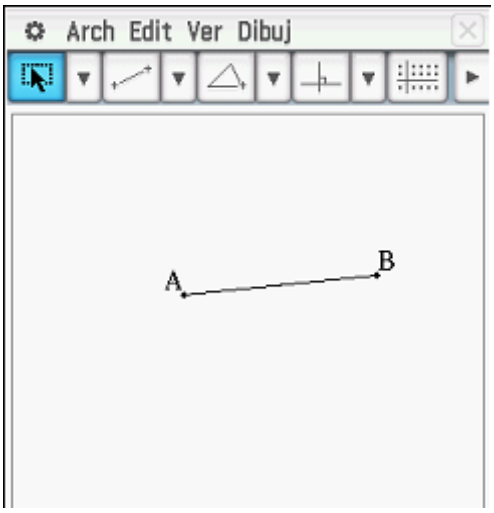


A partir de la herramienta **Puntero** es posible cambiar la posición de los elementos dibujados. Para ello, pulsamos sobre el objeto (clic), arrastrando a continuación a una nueva posición.

Cuando un objeto está seleccionado aparece el símbolo ■ y cuando se está desplazando aparecerá el símbolo O,



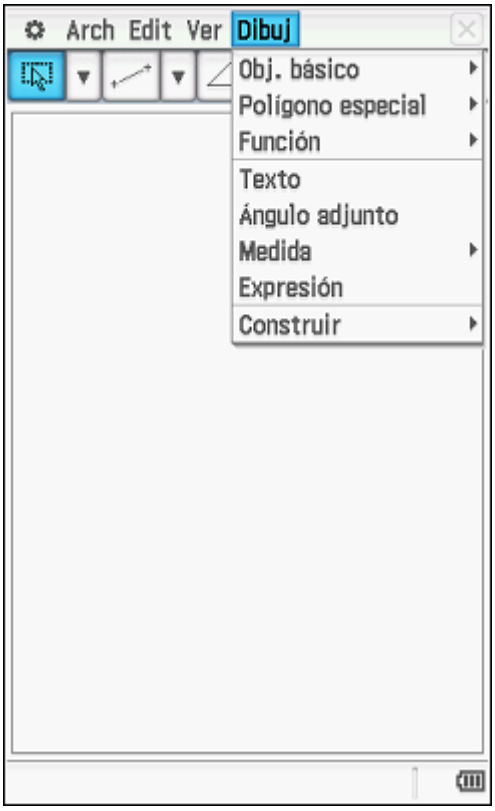
El punto A está seleccionado y lo desplazamos a una nueva posición.

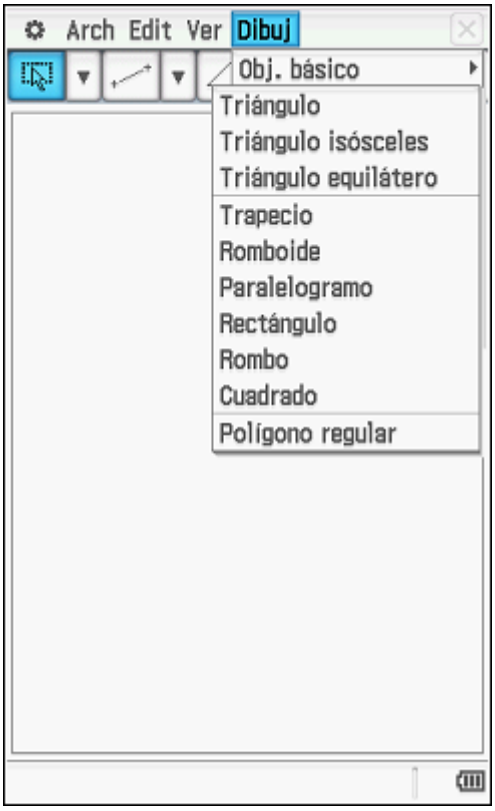


Para anular la selección de uno o varios objetos basta con pulsar sobre una zona libre de la pantalla.

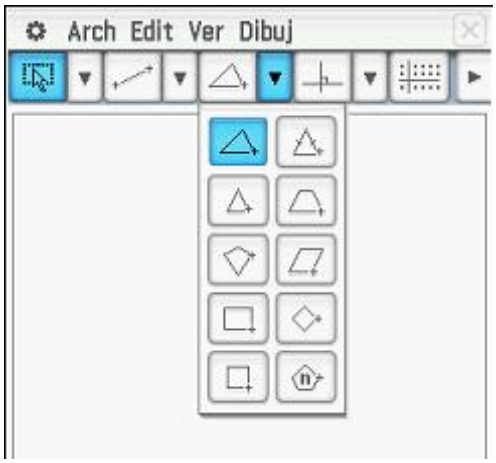
Con los objetos seleccionados es posible aplicar las distintas opciones del menú **Edit** realizando tareas como **Cortar**, **Copiar**, **Pegar** o **Borrar**.

Otros elementos se podrán dibujar a partir de las opciones que aparecerán al pulsar sobre **Polígono especial** en el menú **Dibuj**.

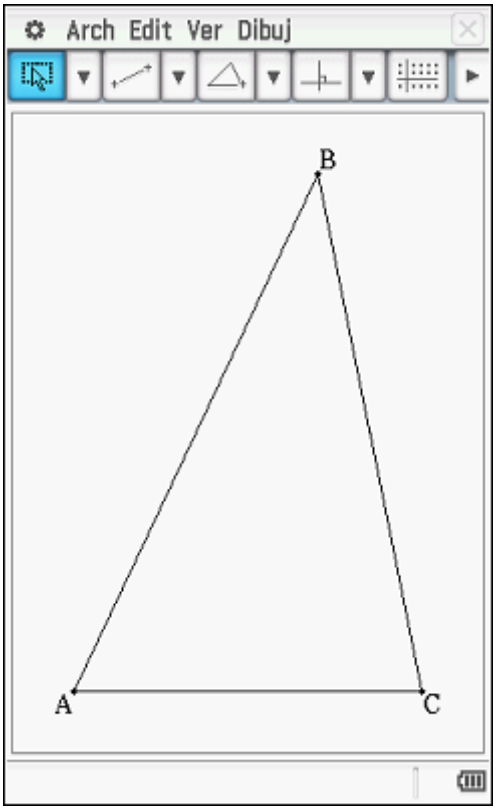




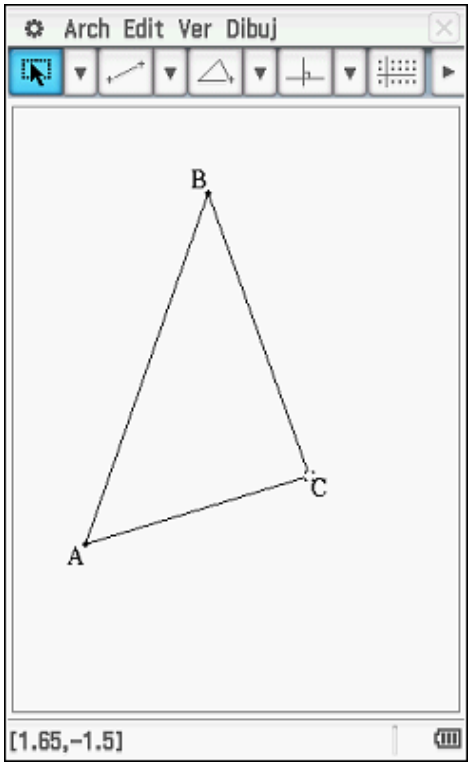
Estas opciones están disponibles en el menú desplegable que aparecerá al pulsar sobre  .



Por ejemplo, para dibujar un triángulo seleccionamos la herramienta **Triángulo**  haciendo clic en un punto de la pantalla. Aparecerá un triángulo que posteriormente podemos modificar arrastrando los vértices.

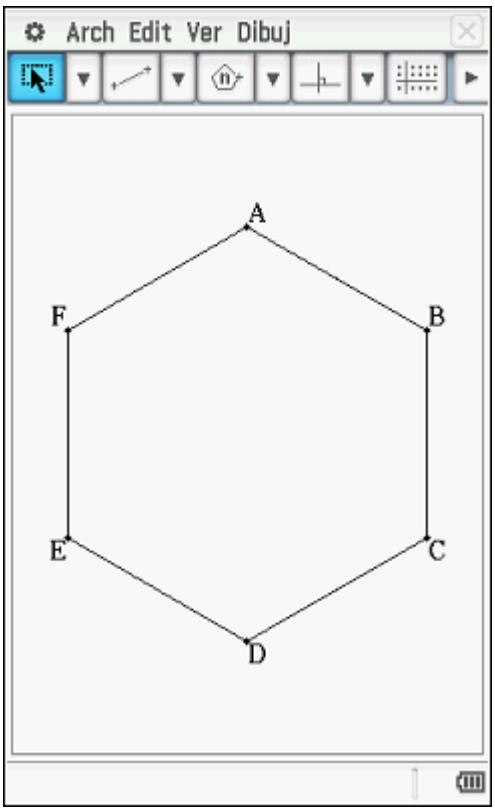


Desplazando cualquiera de los vértices o los lados cambiaremos el aspecto del triángulo.



De manera similar se dibujarán el resto de figuras contempladas en el menú **Polígono especial**: triángulo isósceles, triángulo equilátero, trapezoide, romboide,

paralelogramo, rectángulo, rombo, cuadrado o un polígono regular  para el que será necesario indicar el número de lados.

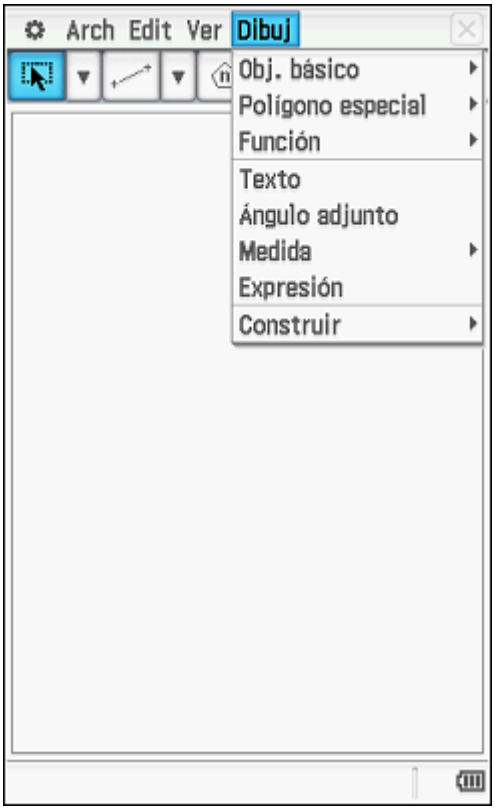


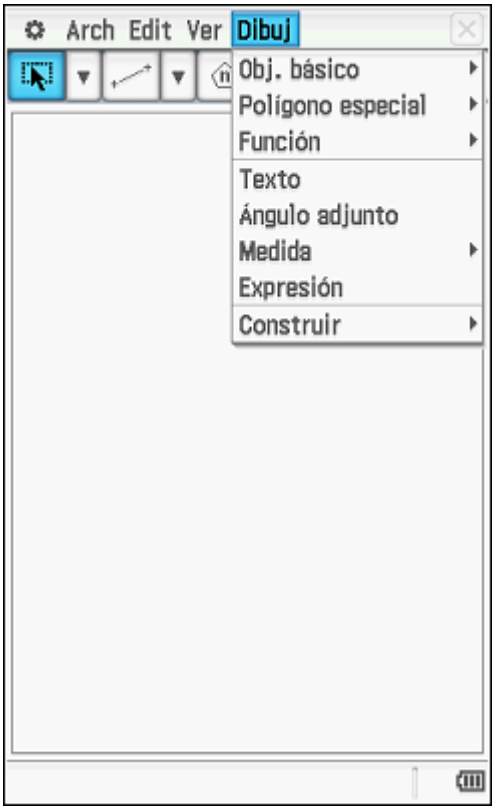
HERRAMIENTAS PARA CONSTRUIR

En el menú **Dibuj** encontramos la opción **Construir** que ofrece distintas herramientas para realizar diferentes construcciones a partir de los objetos previamente dibujados.

Para aplicar estas herramientas es preciso seleccionar previamente los objetos necesarios, por ejemplo para dibujar el punto medio de un segmento, es evidente que previamente es necesario seleccionar un segmento.

Las distintas herramientas de este menú aparecen en la imagen siguiente:

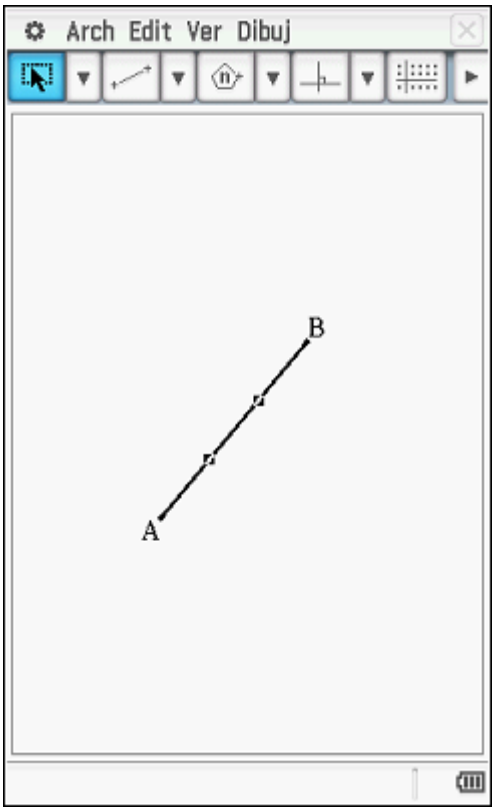


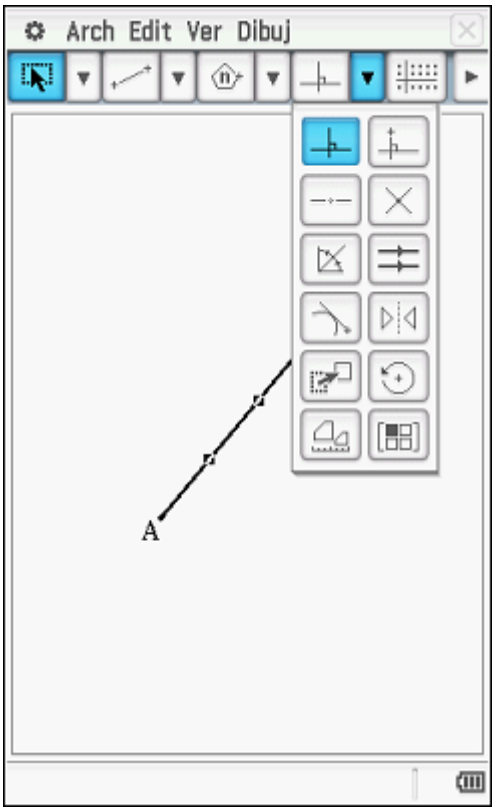


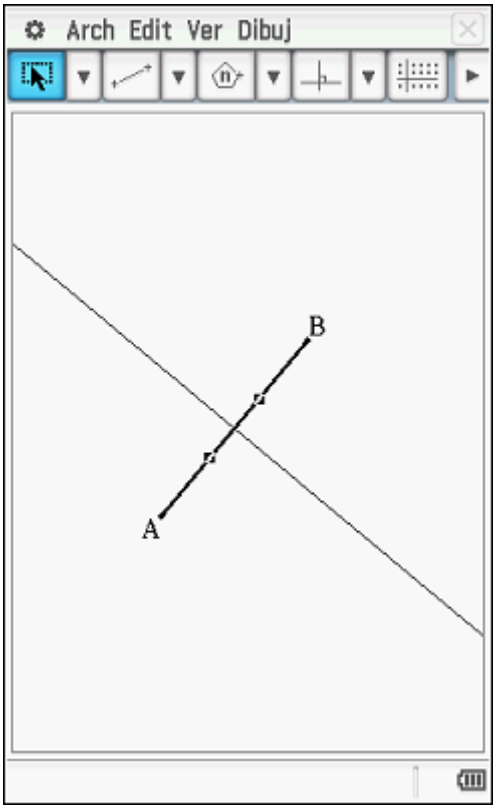
Estas herramientas también aparecerán al pulsar  sobre en la barra de herramientas.

Aunque su significado y acción son evidentes, las exponemos brevemente.

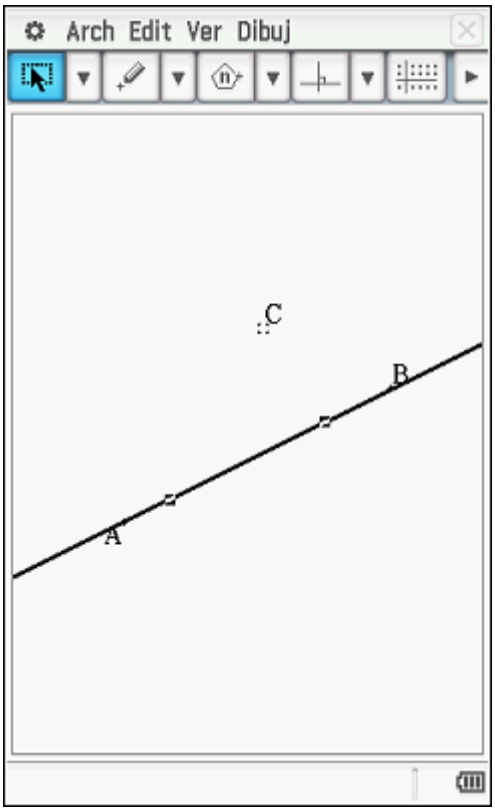
- **Mediatriz**:  dibuja la mediatriz de un segmento.

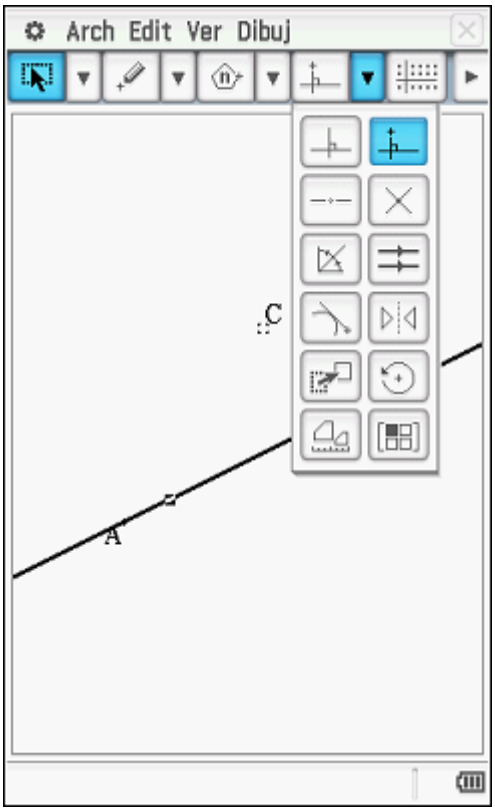


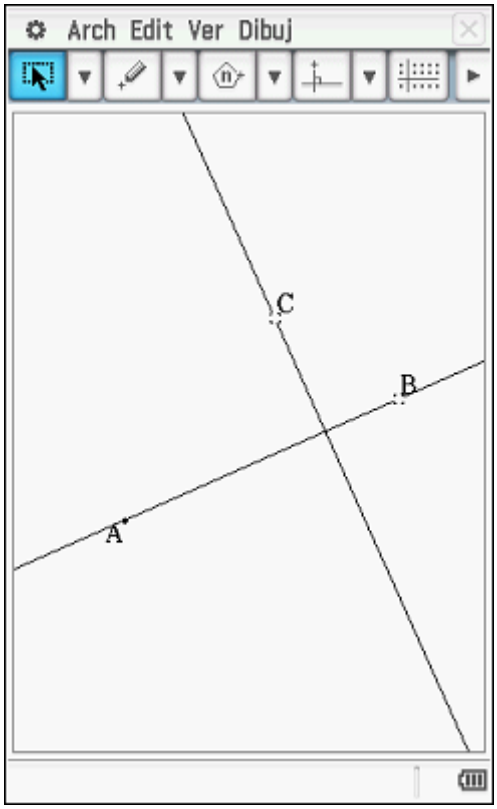




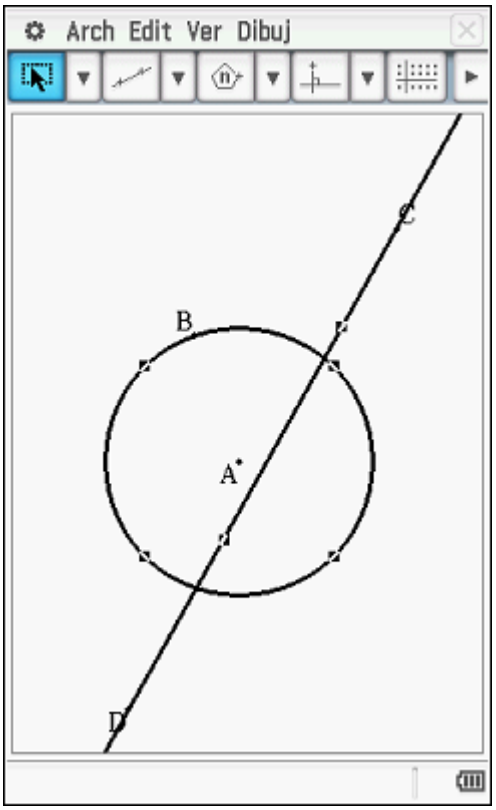
- **Perpendicular**:  dibuja la recta perpendicular a un segmento, una recta o un vector por un punto.

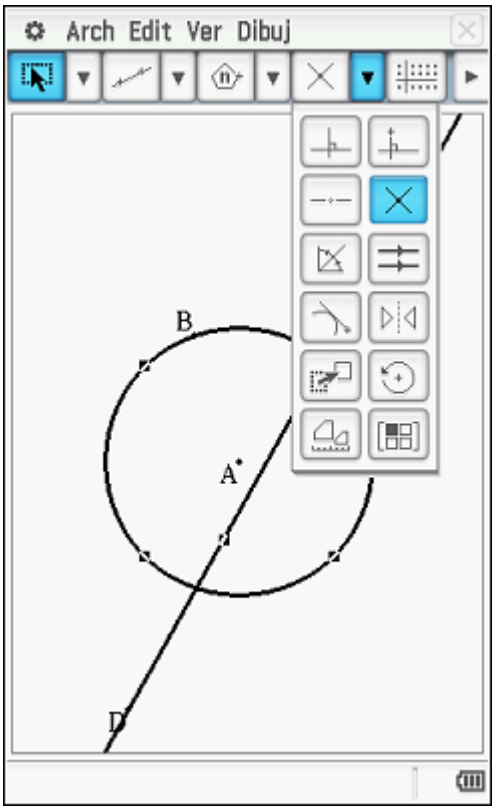


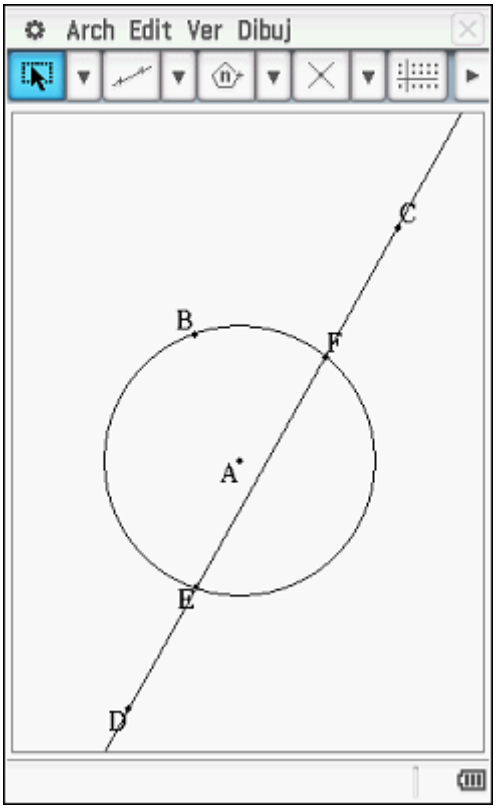




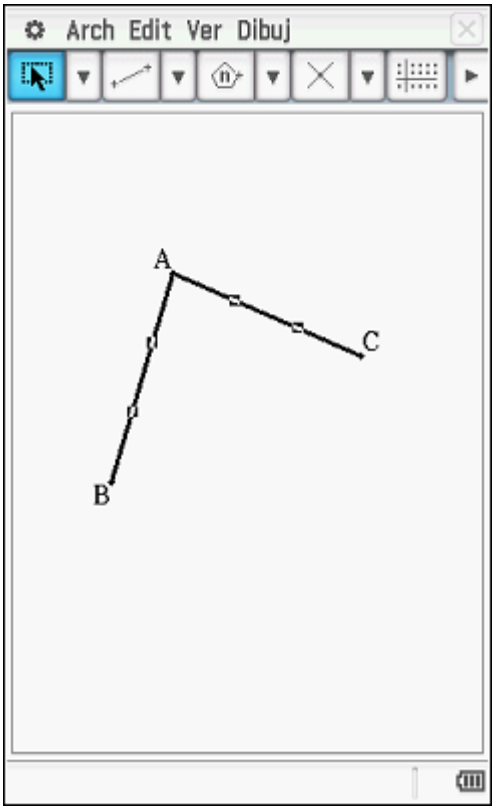
- **Punto medio**:  dibuja el punto medio de un segmento o de un vector.
- **Intersección**:  dibuja los puntos de intersección de dos objetos.

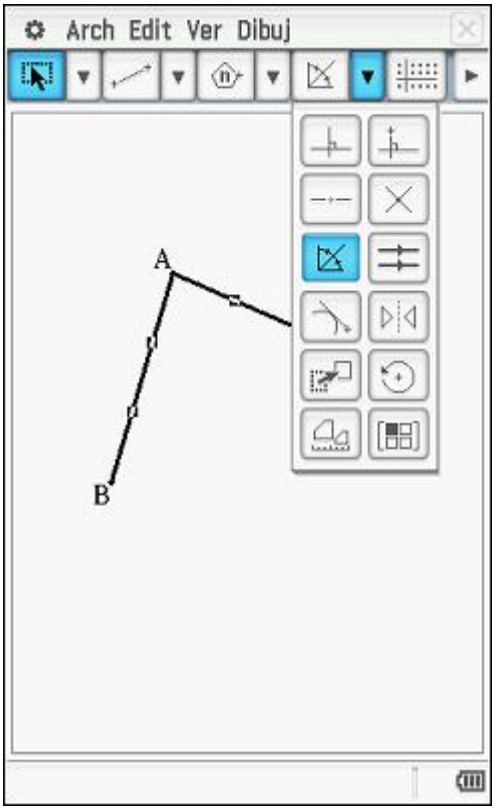


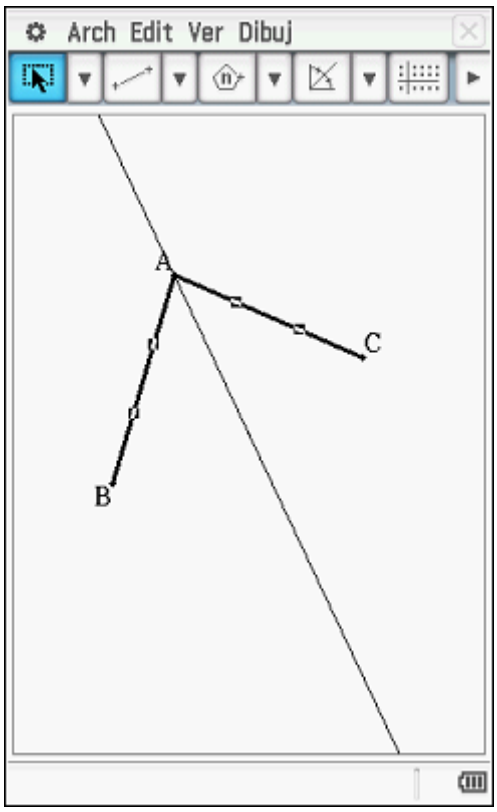




- **Bisectriz de un ángulo**:  dibuja la bisectriz de un ángulo determinado por dos segmentos con un vértice común.







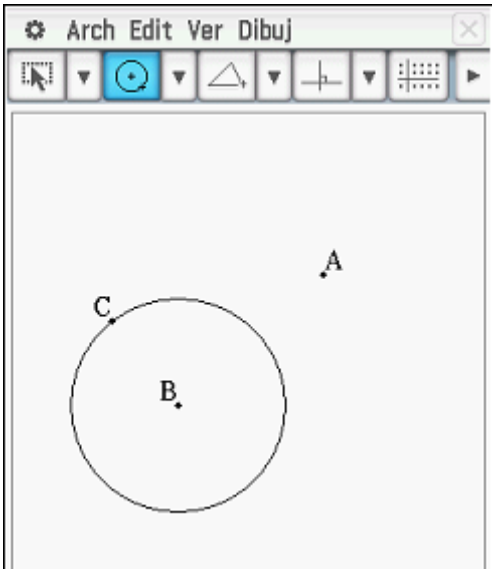
- **Paralelo**:  dibuja la recta paralela a un segmento, una recta o un vector por un punto.

El resto de opciones las expondremos más adelante, ahora vamos a realizar distintas construcciones geométricas utilizando las herramientas y opciones ya conocidas.

Ejemplo 1

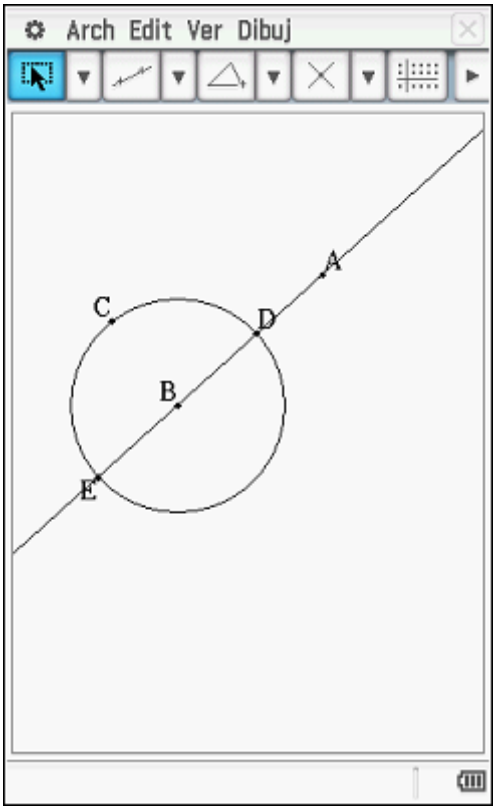
Sea A un punto exterior a una circunferencia. Dibuja la circunferencia con centro en P que sea tangente a la circunferencia inicial.

Comenzamos dibujando los elementos necesarios: un punto exterior y una circunferencia, de manera que el punto sea exterior.

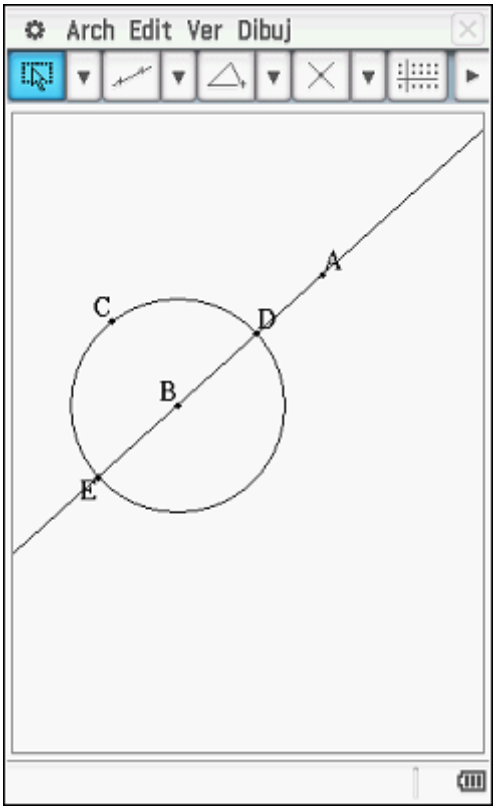


Para trazar la circunferencia tangente es necesario determinar el punto de tangencia que será el punto de intersección de la recta que une A y B con la circunferencia.

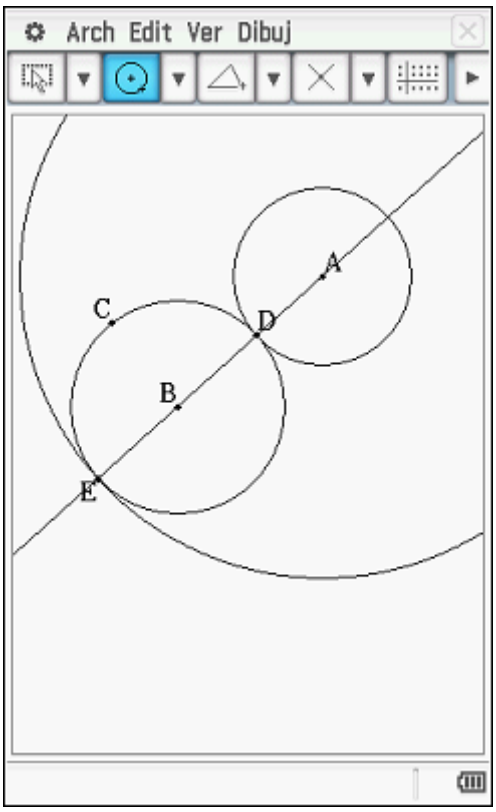
Dibujamos la recta y determinamos el punto de intersección utilizando las herrramientas  y  .



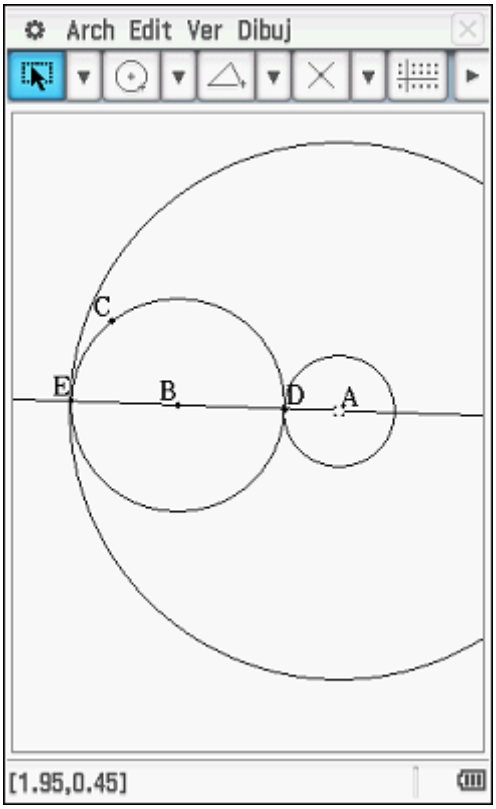
Destaquemos que en la herramienta **Recta**  , primero seleccionamos la herramienta y después pulsamos sobre los puntos A yC; mientras que en la segunda  , previamente hay que seleccionar la herramienta **Puntero**  , pulsando a continuación sobre la circunferencia y la recta, seleccionando por ultimo, la herramienta **Intersección** para obtener los puntos D y E.



Por último, seleccionamos la herramienta **Circunferencia** para dibujar las dos circunferencias tangenes. La primera con centro en A, que pasa por D y, la segunda, la que tiene centro en A y pasa por E.



Podemos comprobar que la construcción está bien realizada modificando las condiciones, es decir, variando la posición del punto A o cambiando la posición de la circunferencia.

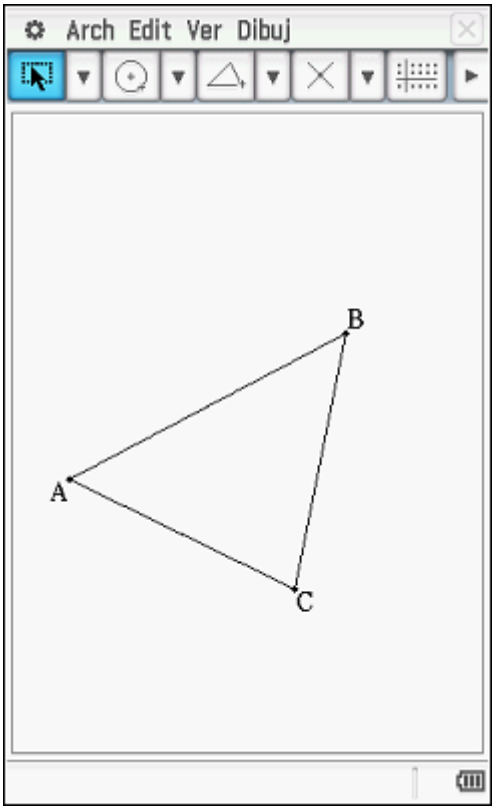


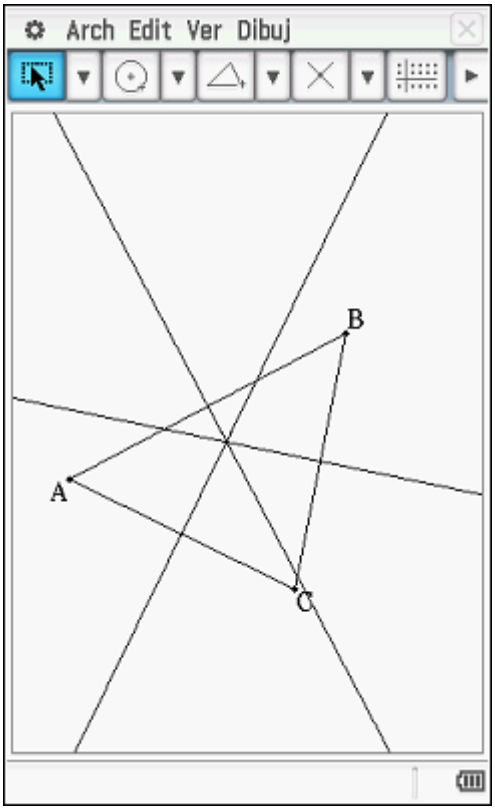
Esta es la principal característica de un programa de geometría dinámica en el que al cambiar las condiciones iniciales se mantienen las relaciones y propiedades entre los objetos.

Ejemplo 2

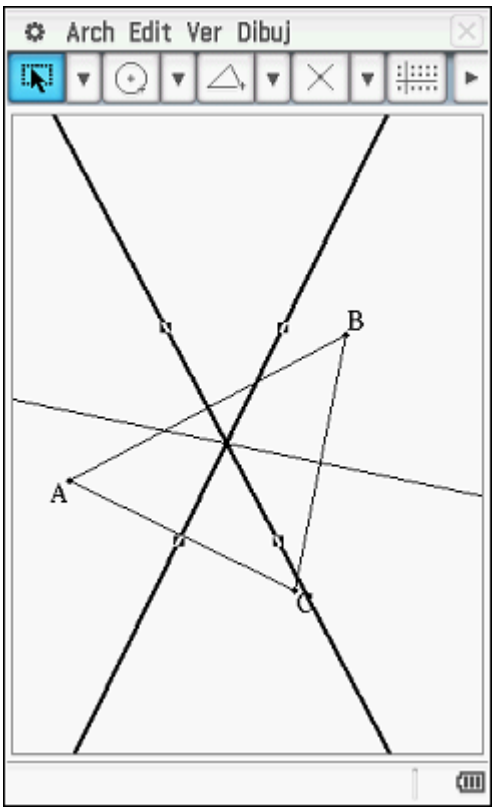
Construye la circunferencia circunscrita a un triángulo.

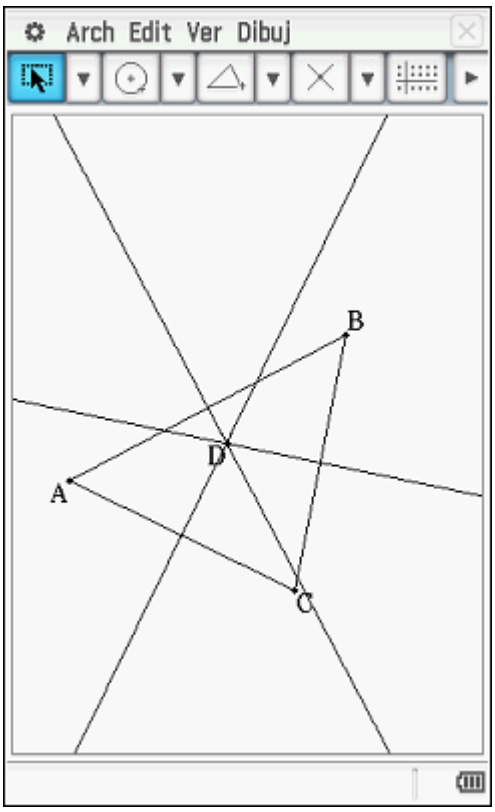
Dibujamos un triángulo cualquiera y trazamos las mediatrices a cada uno de los lados utilizando la herramienta  .



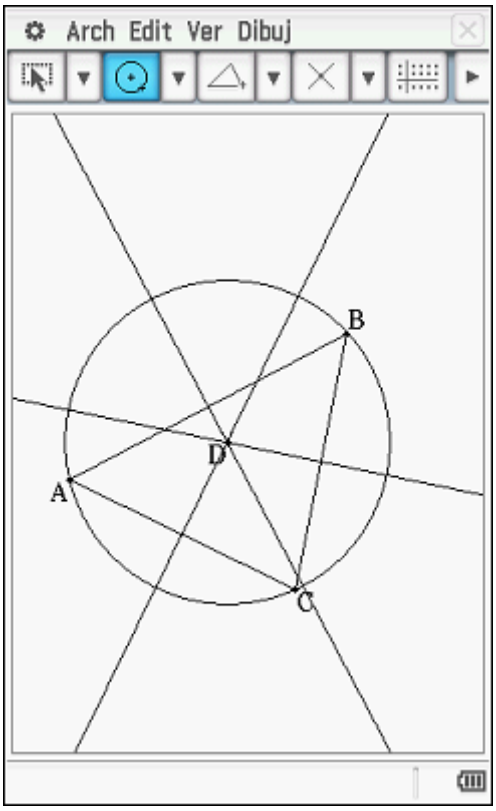


Obtenemos a continuación el circunscentro como punto de intersección de dos mediatrices que aparecerá marcado con la letra D.



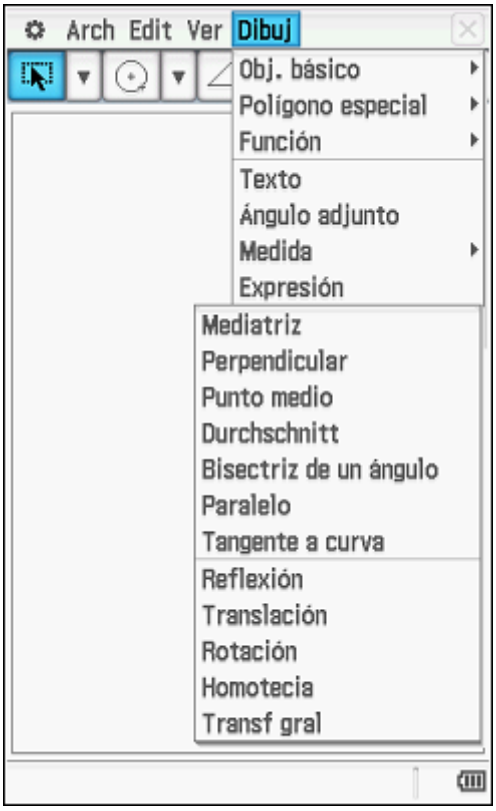


Por último, dibujamos la circunferencia circunscrita.



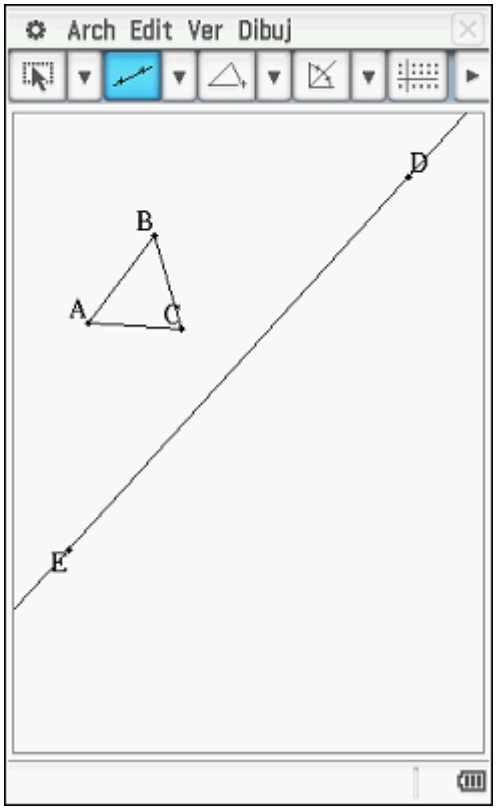
MOVIMIENTOS EN EL PLANO

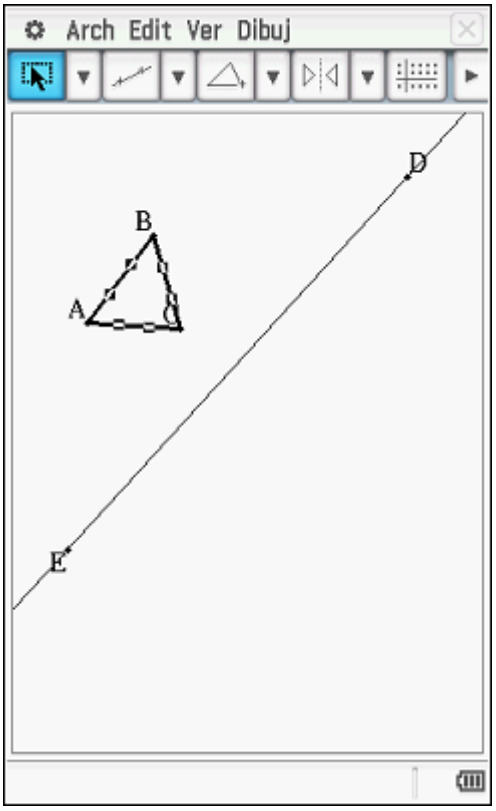
En el menú correspondiente a la opción **Construir** dentro de **Dibuj** encontramos distintas herramientas para realizar movimientos en el plano.

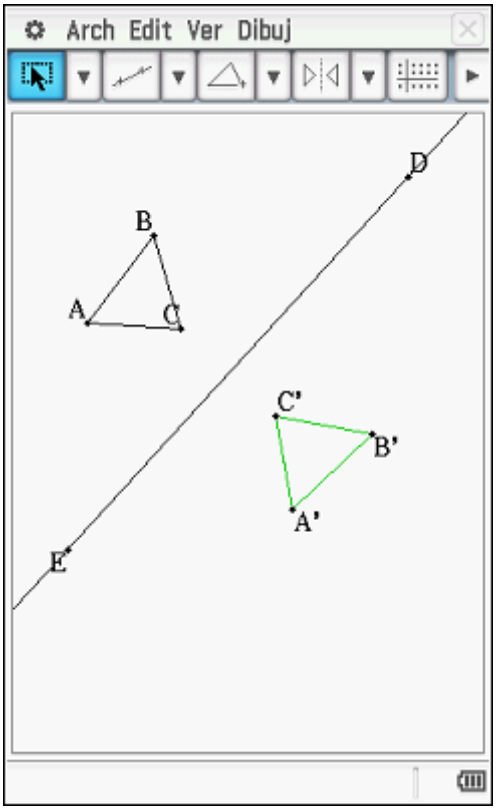


Estas opciones son:

- **Reflexión**:  realiza la simetría axial de un objeto.

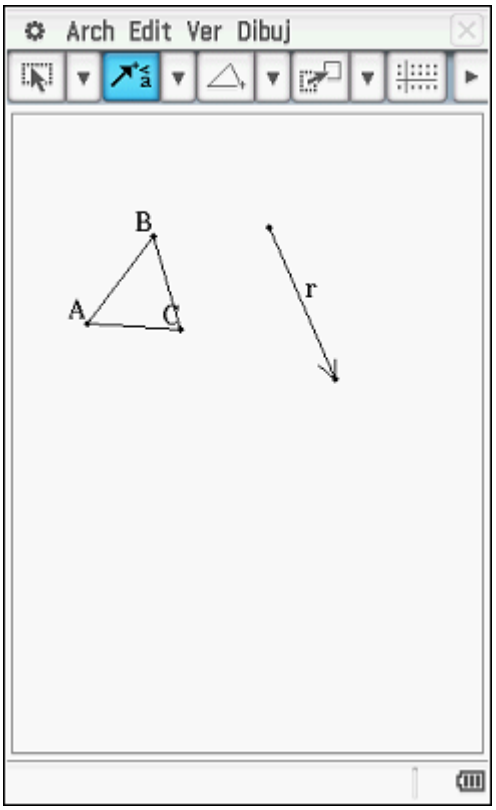


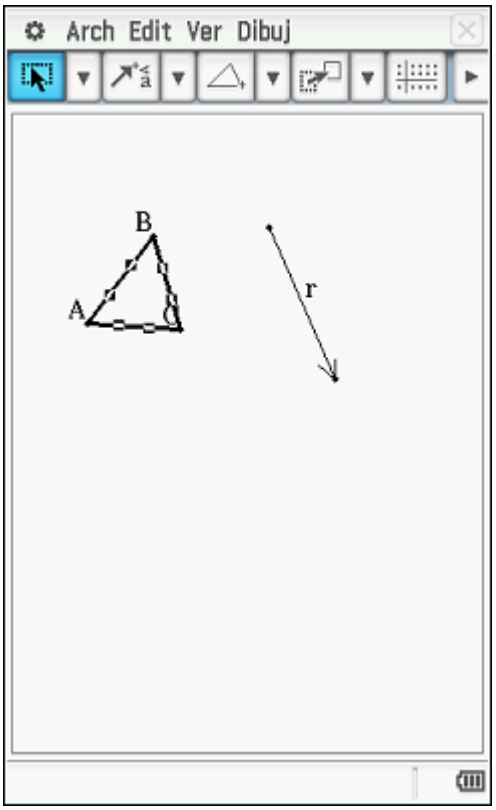


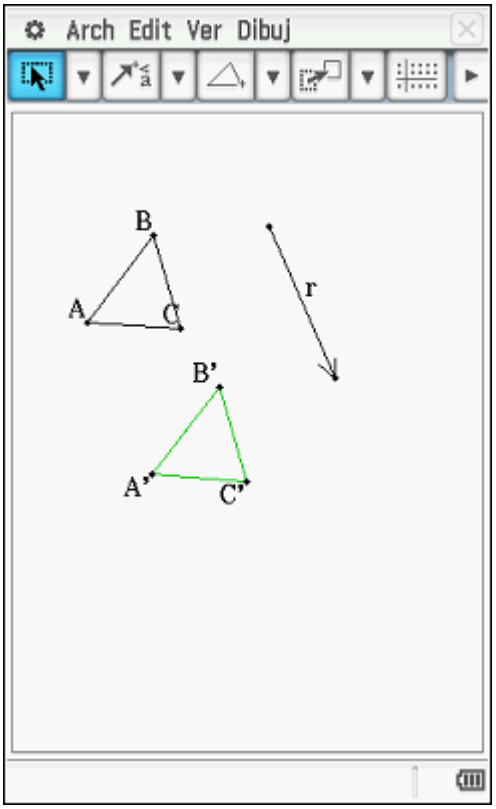


Es necesario seleccionar los tres lados para realizar la simetría del triángulo ya que al seleccionar uno sólo aplicará la simetría sobre dicho lado.

- **Translación**:  realiza la translación de un objeto con respecto a un vector.

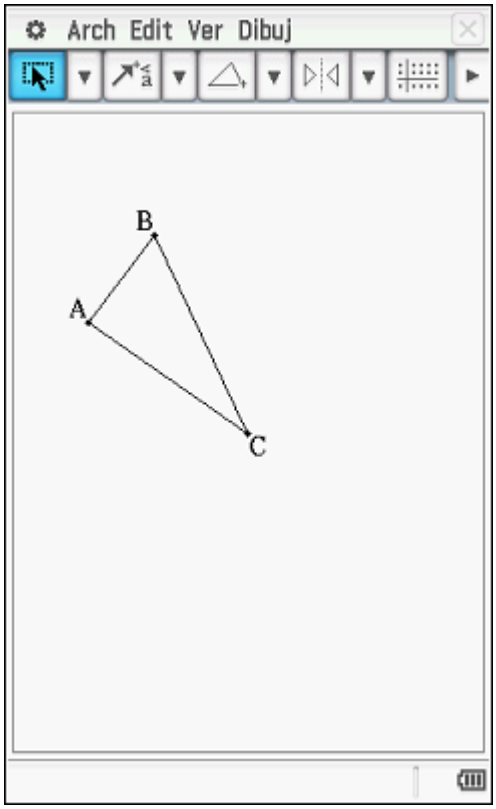


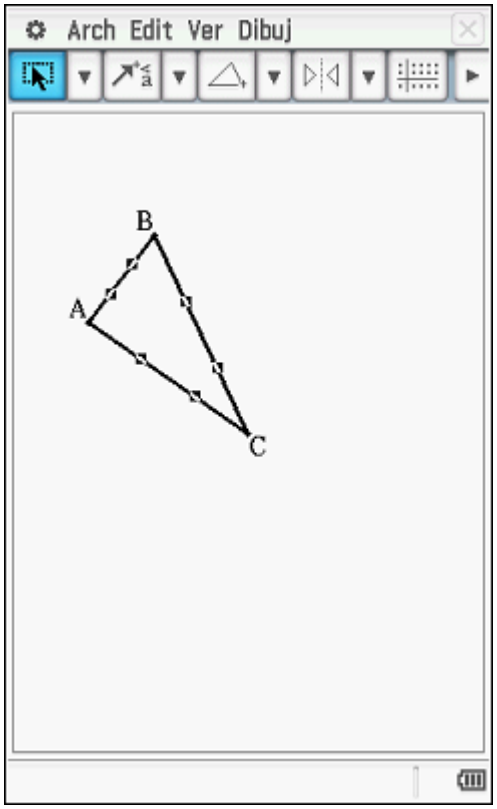


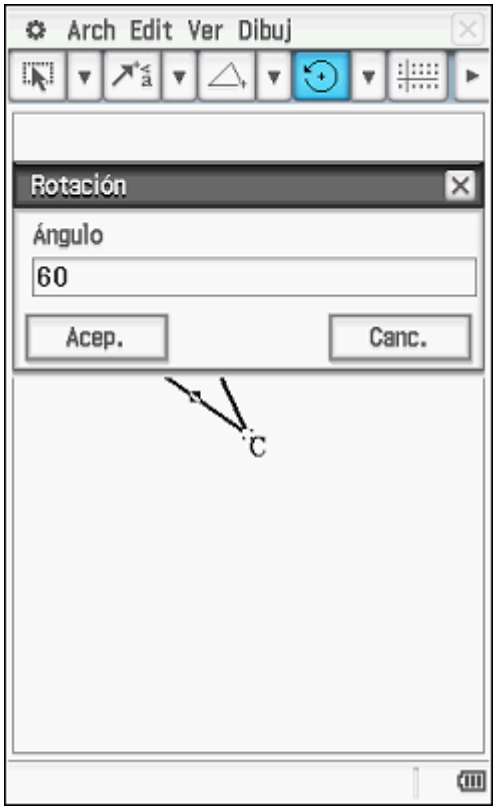


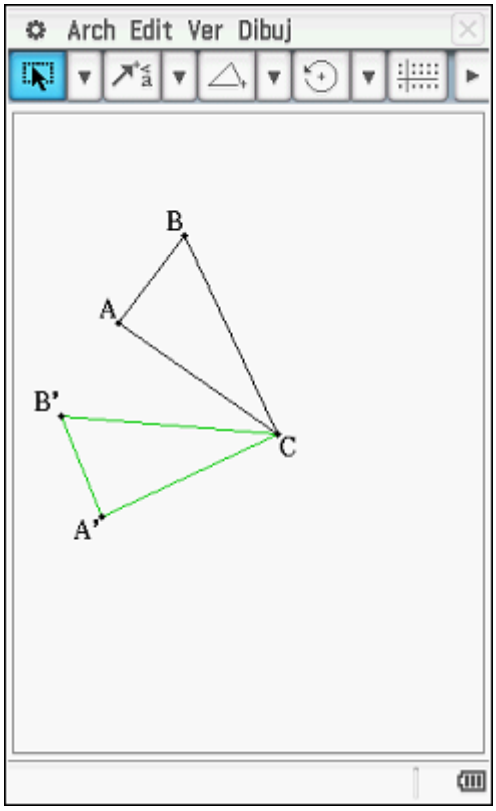
El vector utilizado para la rotación puede introducirse a través de sus coordenadas o elegir la opción **Seleccione vector** para señalar sobre un vector previamente dibujado, como ocurre en el ejemplo anterior.

- **Rotación**:  realiza una rotación sobre un objeto según el valor de un ángulo.

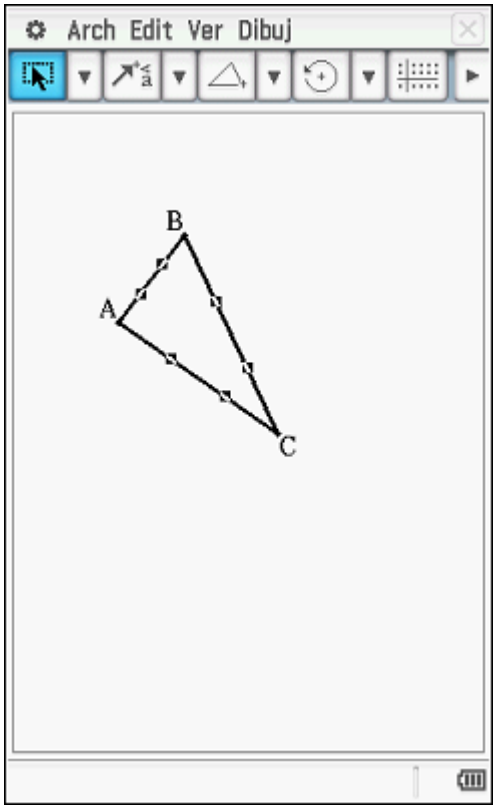


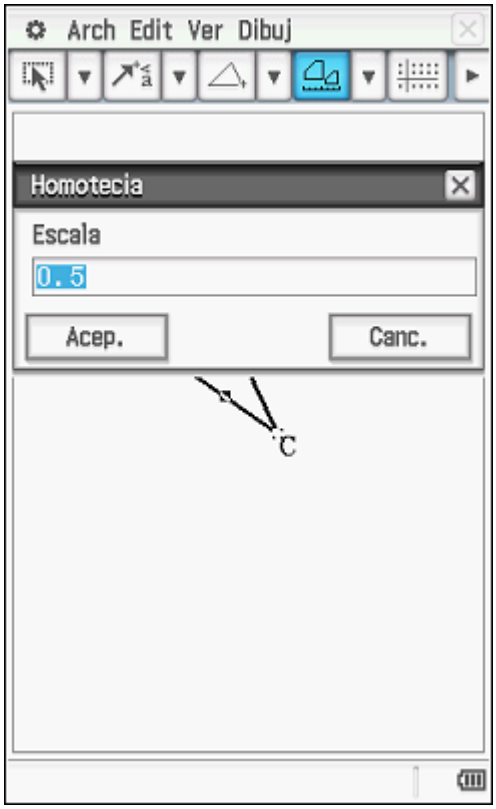


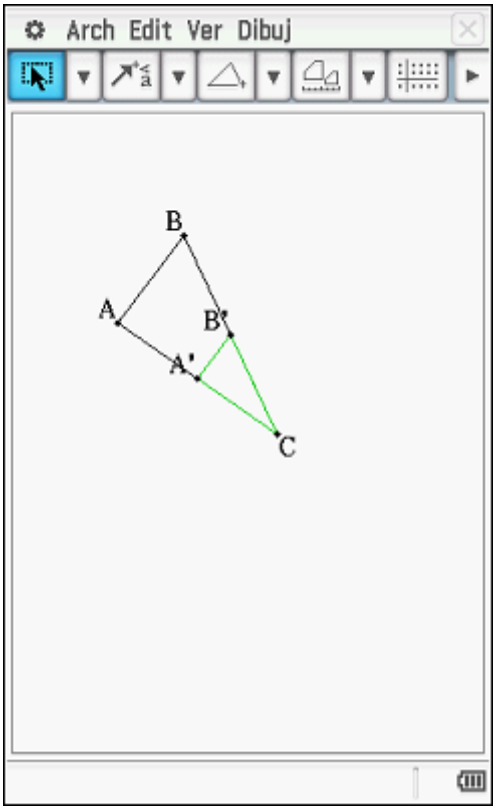




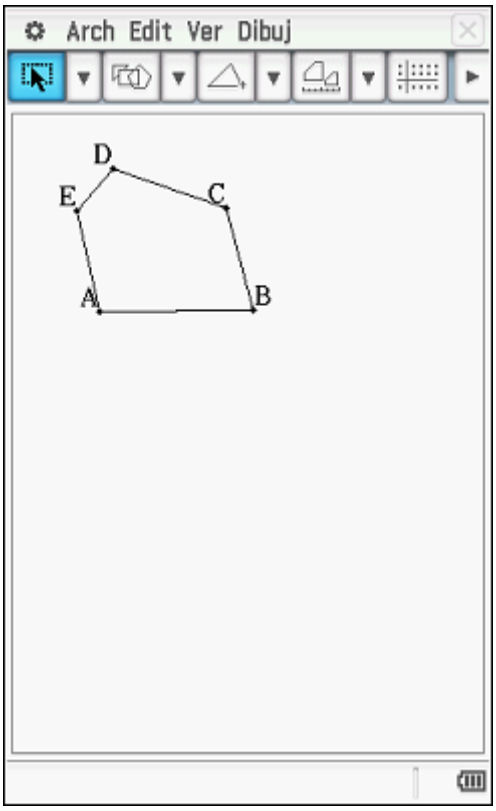
- **Homotecia**: aplica una homotecia sobre un objeto a partir del valor indicado como razón.

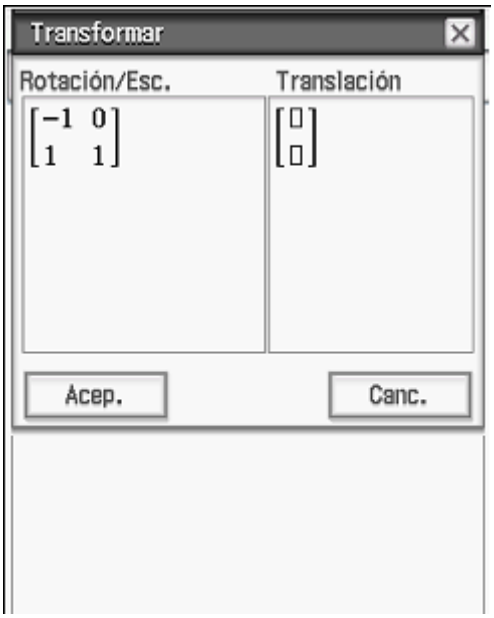


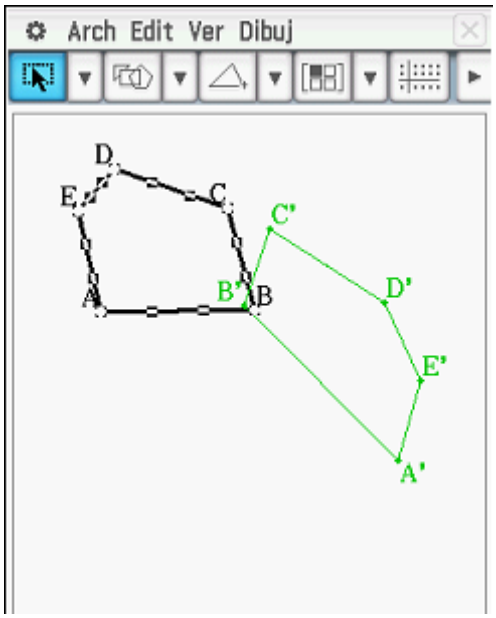




- **Transf gral**:  a partir de una matriz o un vector aplica una transformación sobre un objeto.

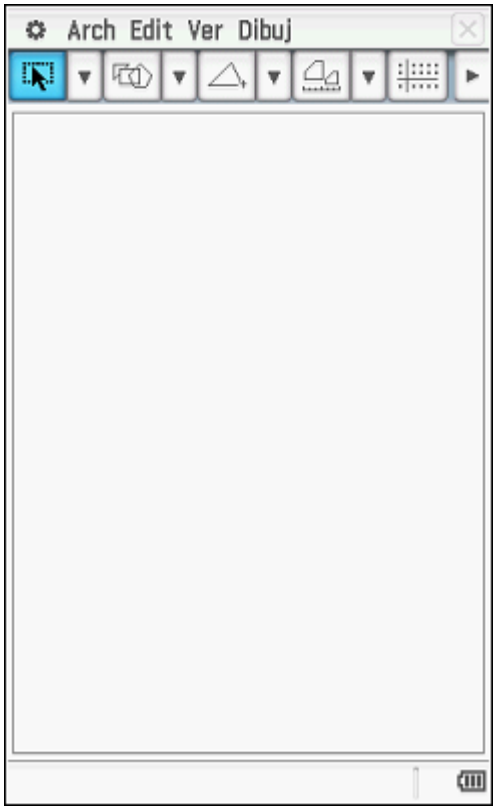


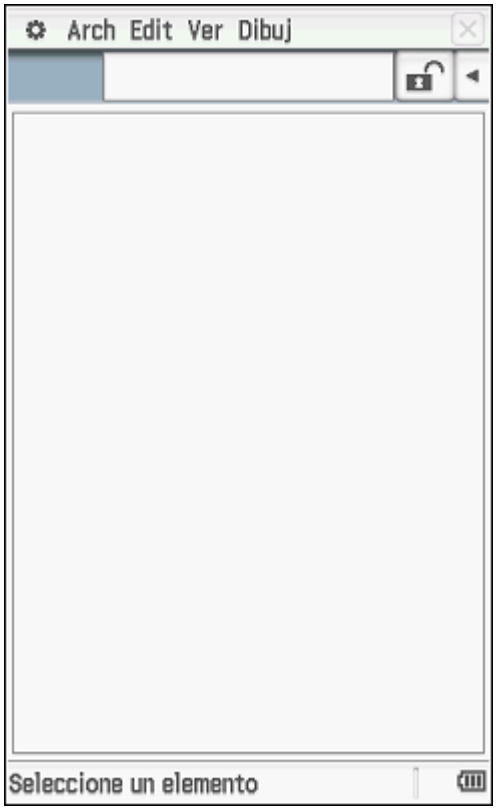




HERRAMIENTAS PARA MEDIR

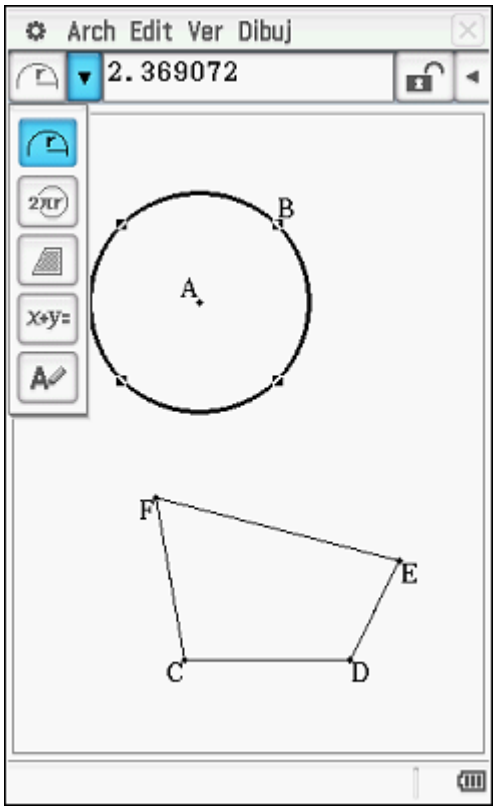
Para acceder a la barra de medidas será necesario pulsar sobre el botón  que aparece a la derecha de la barra de herramientas.

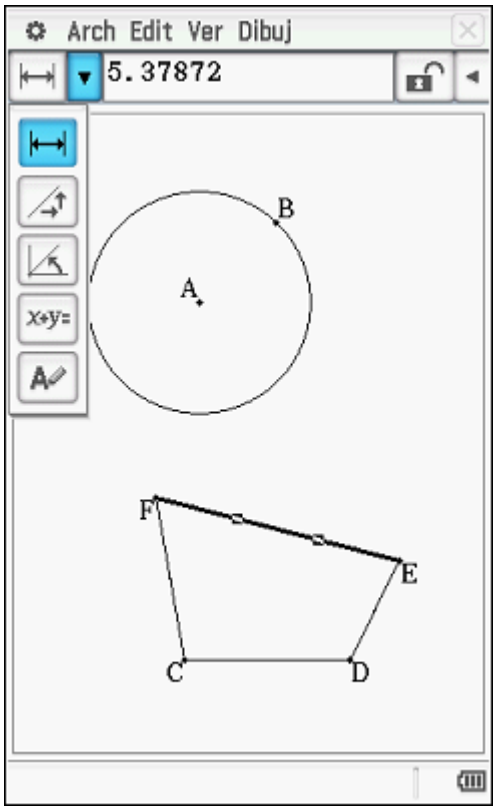


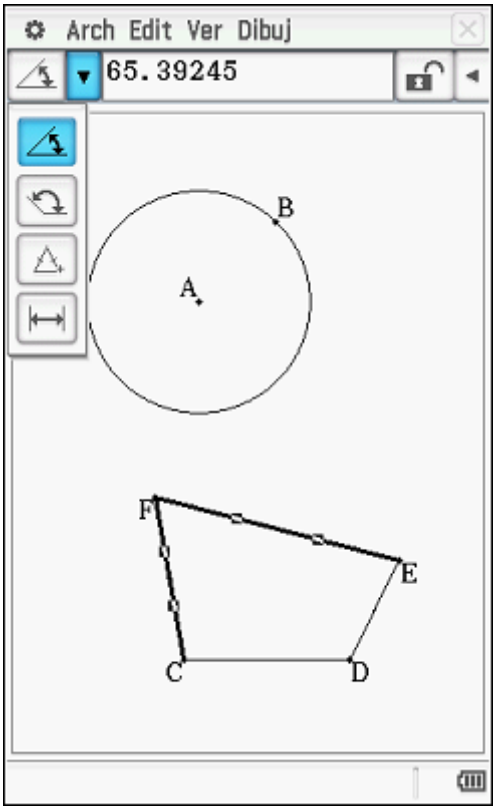


En la nueva barra de herramientas aparecerán las medidas de los objetos seleccionados.

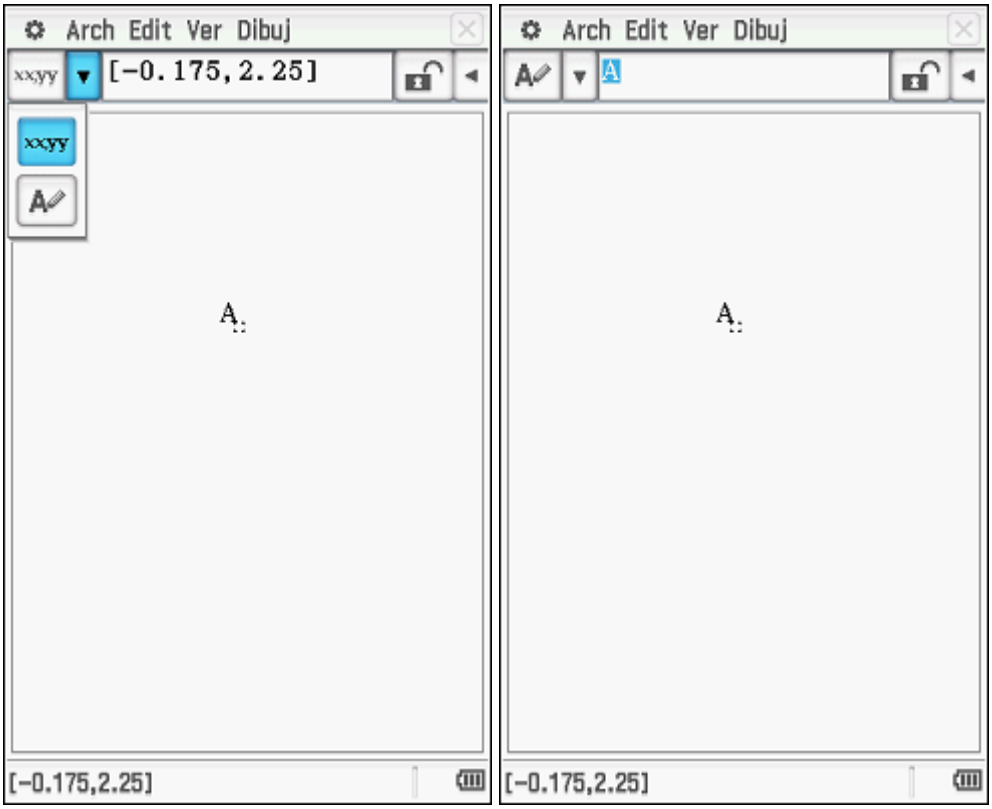
Dependiendo del objeto sobre el que se aplique, previa selección, aparecerán distintas opciones de medida como se podrá observar en las imágenes siguientes:



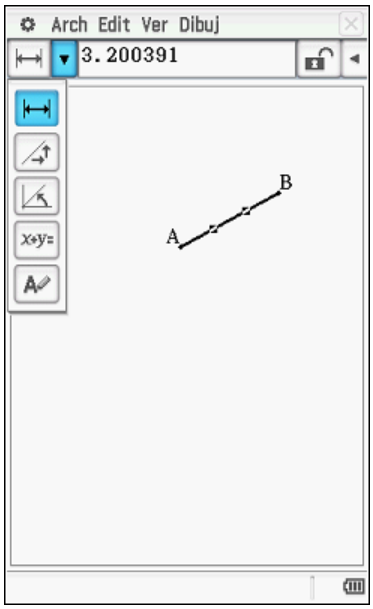
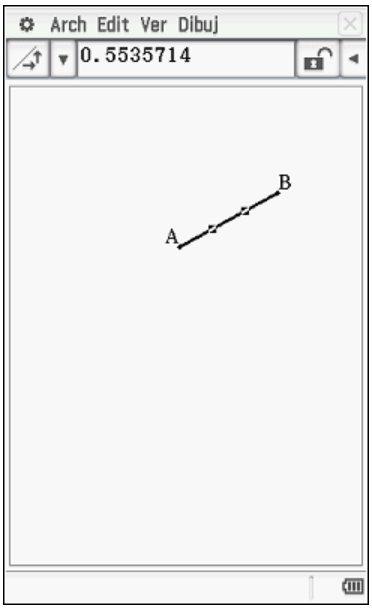
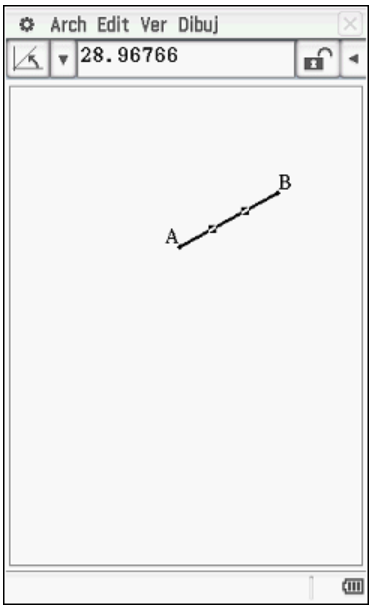


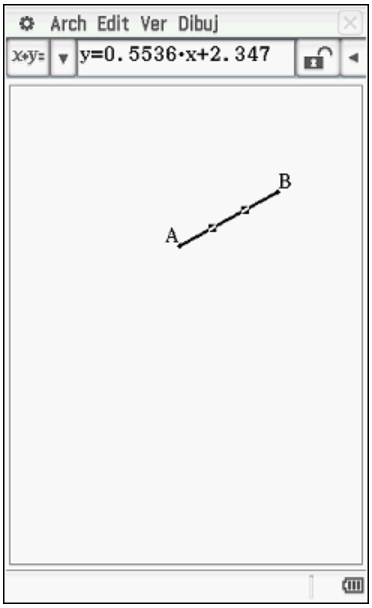
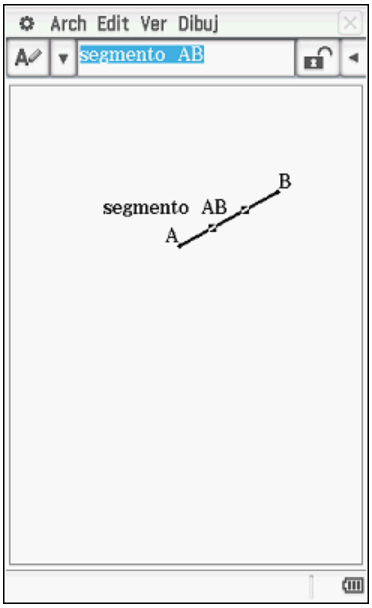


De un punto se podrán obtener sus coordenadas o cambiar su etiqueta:

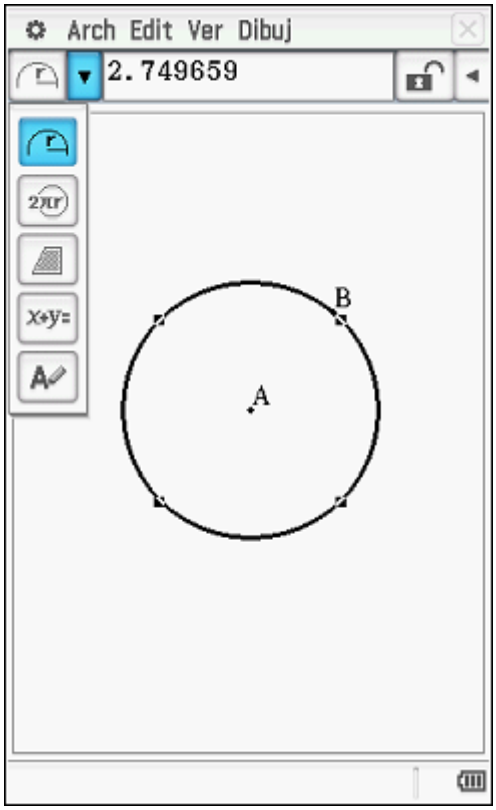
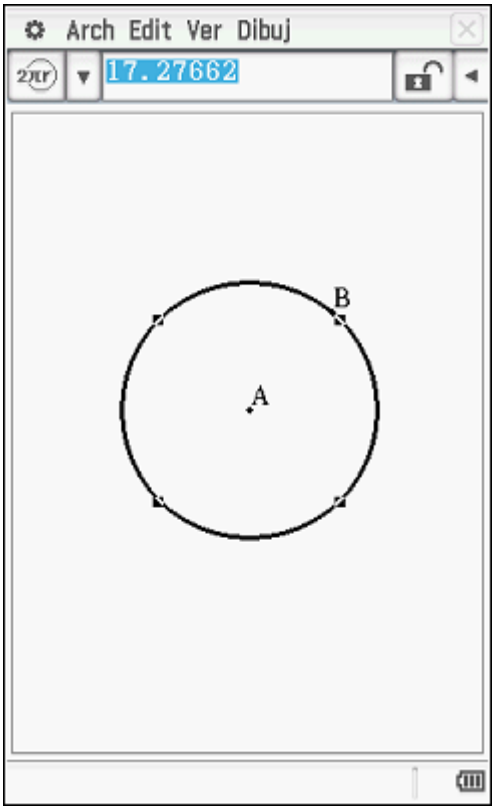
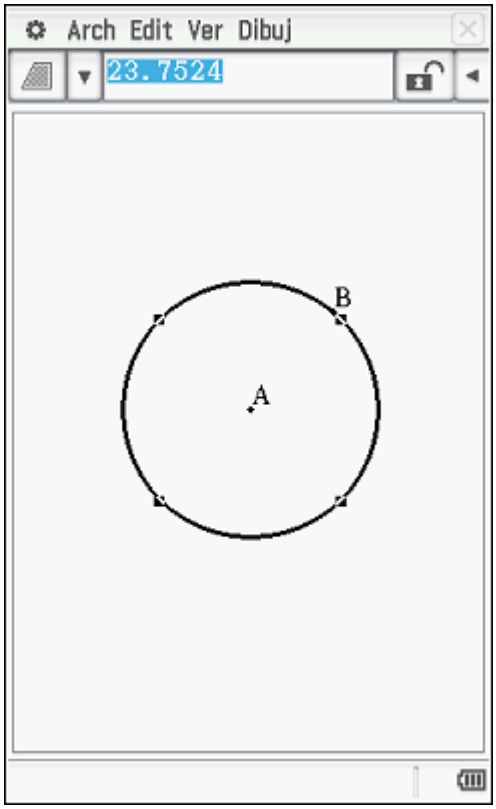
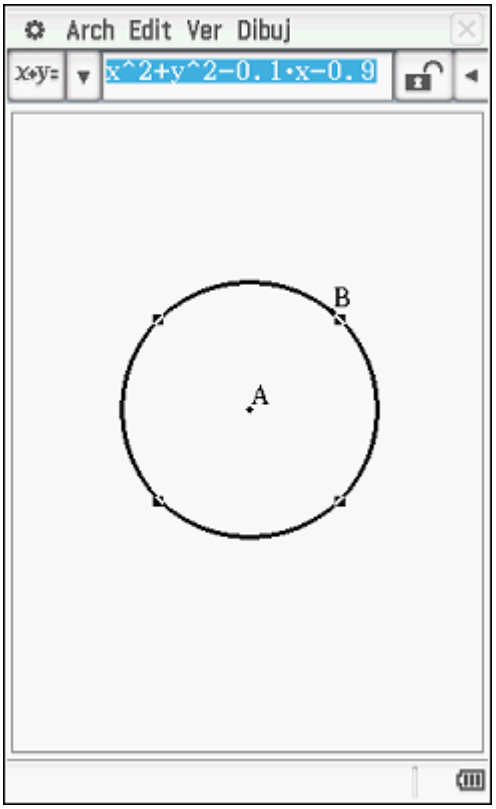


En un objeto rectilíneo se podrá medir:

La longitud	La pendiente	El ángulo con el eje X
		

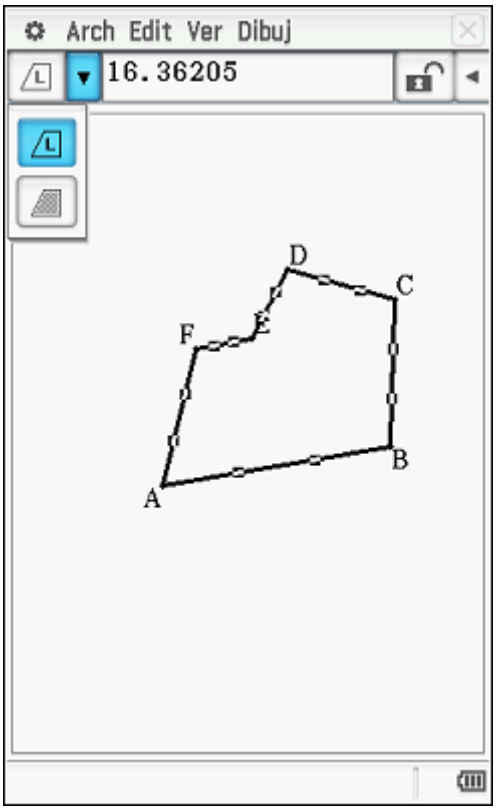
La ecuación de la recta	Poner una etiqueta
	

Para un objeto circular dispondremos de opciones para medir el radio y el área.

Longitud del radio	Longitud de la circunferencia
	
Área del círculo	**Ecuación**
	

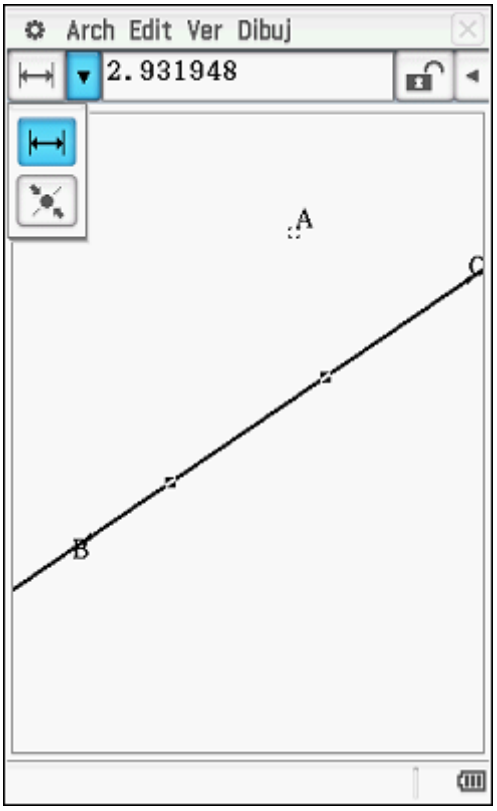
Además, podemos colocar una etiqueta como ya hemos expuesto para los objetos rectilíneos.

De manera análoga, en un polígono se podrá medir el perímetro y el área, además de las opciones expuestas anteriormente, para objetos rectilíneos. Para acceder a estas opciones basta con seleccionar tres vértices del polígono.



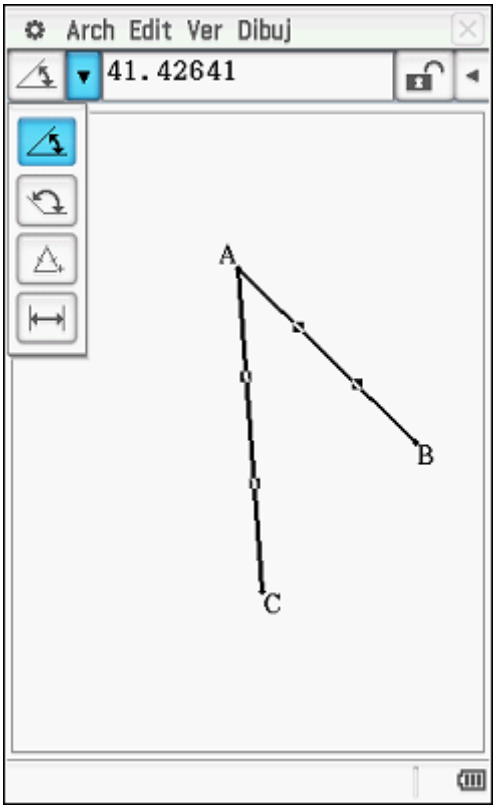
Existen otras opciones que aparecerán al seleccionar objetos de distintas características.

Por ejemplo al seleccionar un punto y un objeto rectilíneo las opciones del menú correspondiente a la medida son: distancia del punto a la recta y conocer si el punto es de la recta. Aunque esta opción no sería necesaria ya que la respuesta la da la primera opción que informa de la distancia.

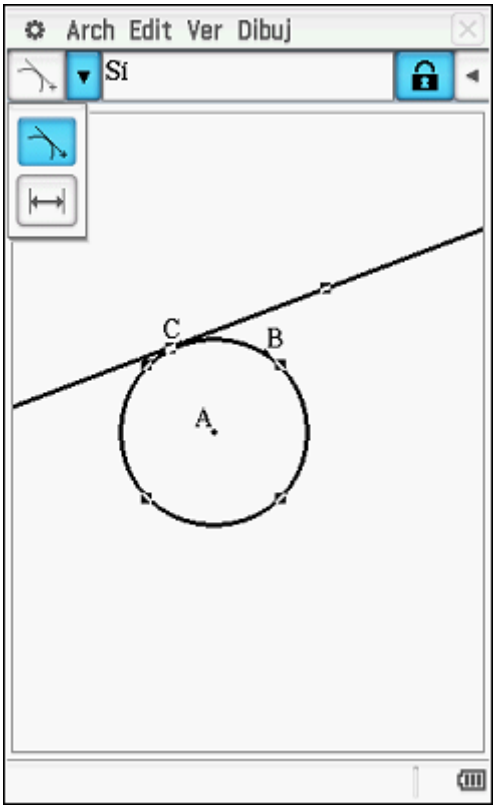


Además, podemos utilizar la opciones siguientes:

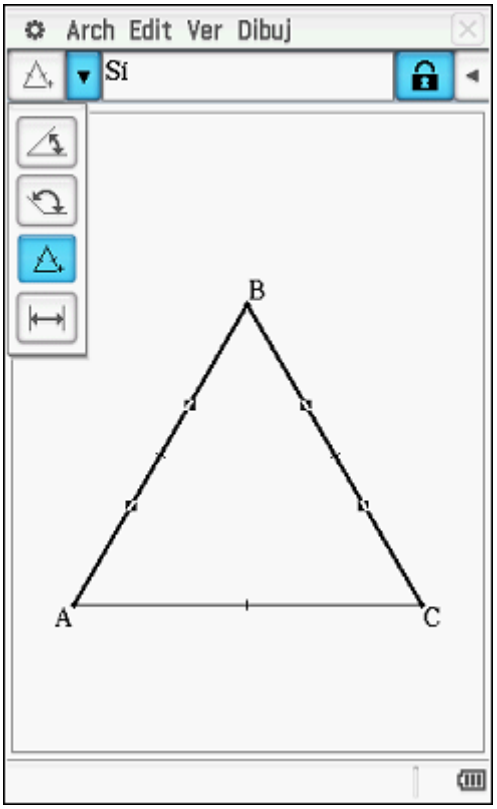
- **Ángulo**: medida del ángulo formado por dos objetos rectilíneos.



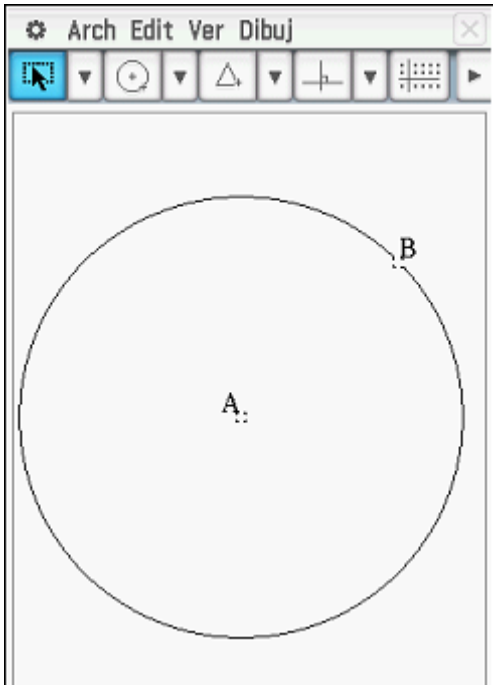
- **Tangencia**: informa si entre los objetos seleccionados existe relación de tangencia.



- **Congruencia**: indica si los dos objetos rectilíneos seleccionados tienen la misma longitud.

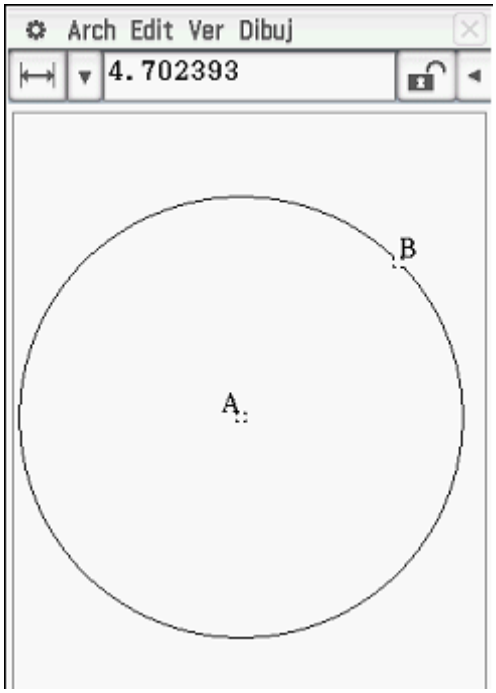


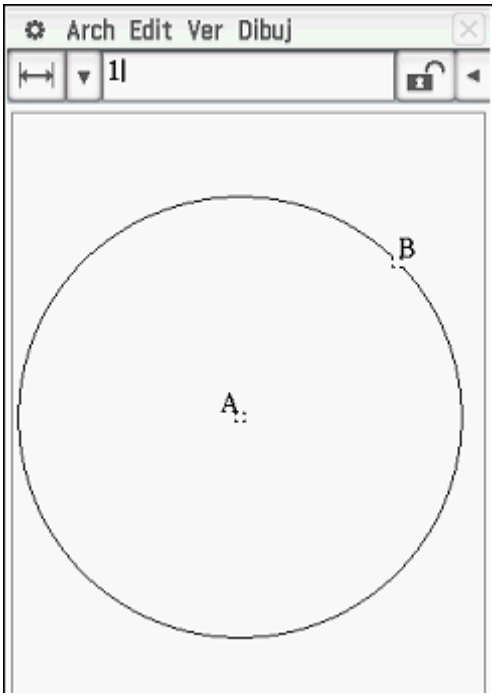
Las distintas opciones para la medida de objetos se podrán utilizar como recursos para introducir una medida por parte del usuario, por ejemplo si se quiere dibujar un círculo de radio igual a 2 cm dibujaremos una circunferencia cualquiera, seleccionando a continuación los puntos utilizados para su trazado.



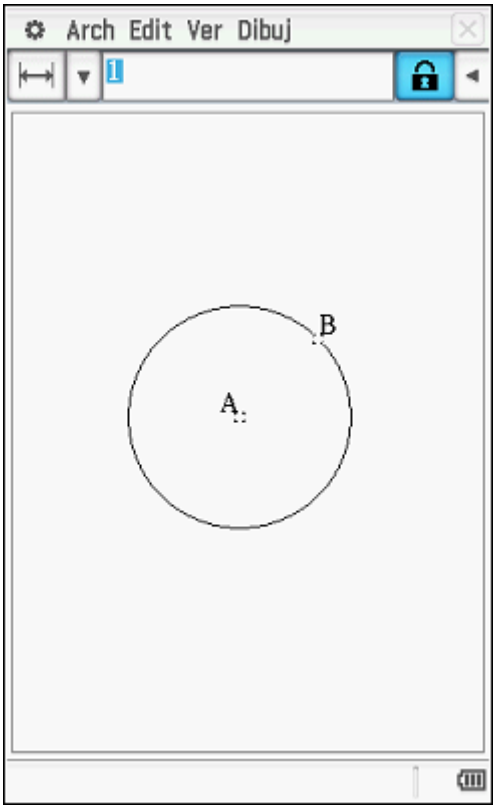
Accedemos a las opciones de medida. Aparecerá la medida del radio de la circunferencia.

En la barra de medidas escribimos el valor del radio que deseamos.

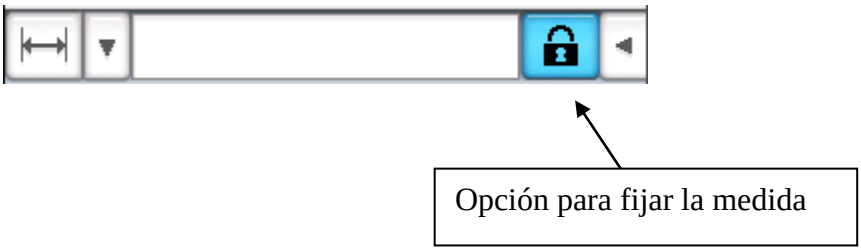




Al pulsar la tecla **Enter** o (**EXE**) el radio y por tanto, la circunferencia se ajusta al valor introducido.



El valor que se acaba de introducir como medida queda fijado y por tanto no se podrá modificar al mover los objetos de los que depende si está activada la opción para "**fijar medidas**".



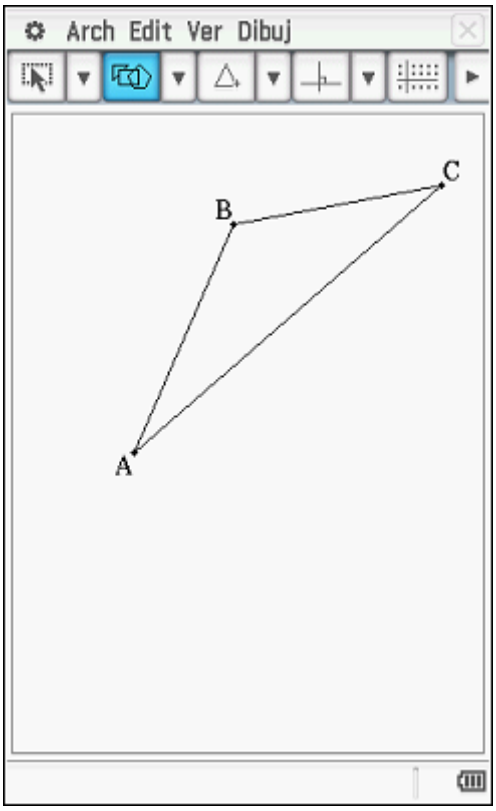
Dichas restricciones se podrán eliminar seleccionando la opción **Borrar restricciones** que se encuentra en el menú **Edit**.

Ejemplo 3

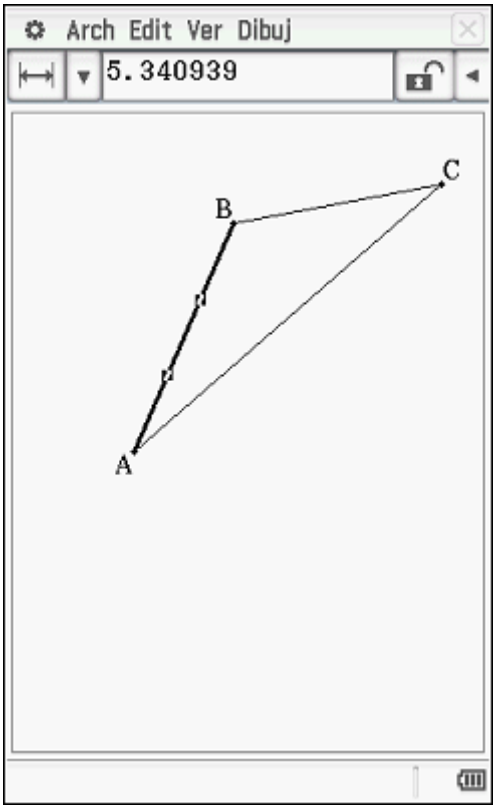
Dibuja un triángulo cuyos lados midan 3, 4 y 5 centímetros.

Comprueba que es un triángulo rectángulo.

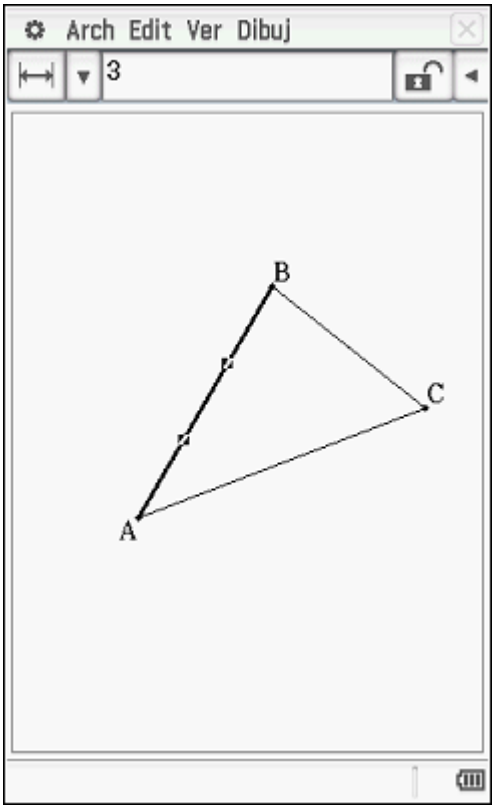
Dibujamos un triángulo cualquiera.

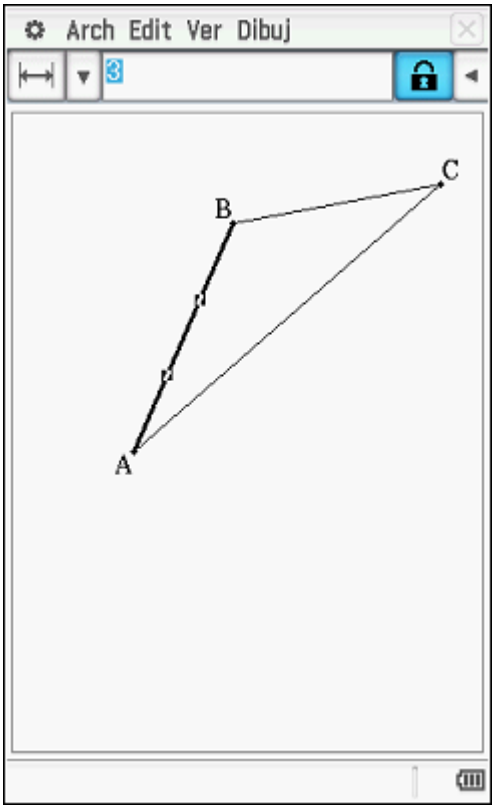


Medimos uno de los lados.

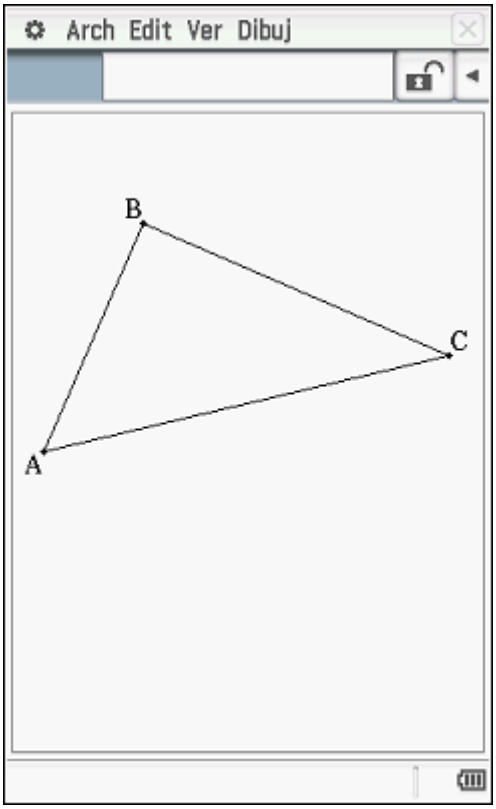


Aplicando las opciones para fijar la medida de ese lado introducimos como medida 3 cm.

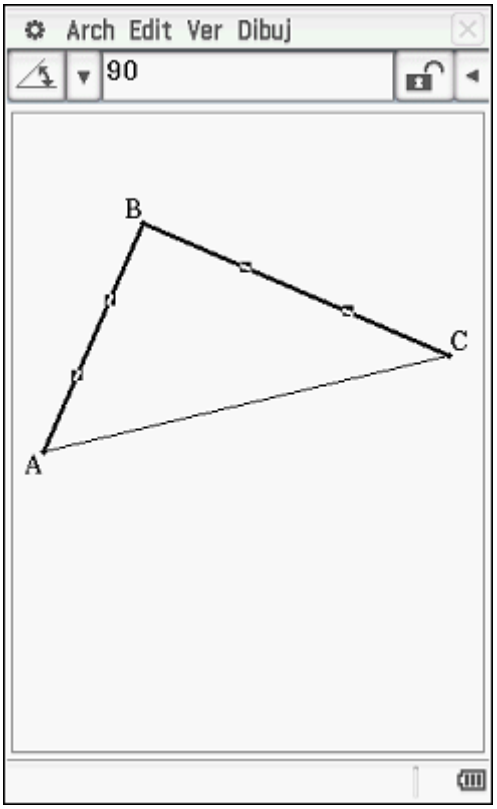




Repetimos este proceso para los otros dos lados.

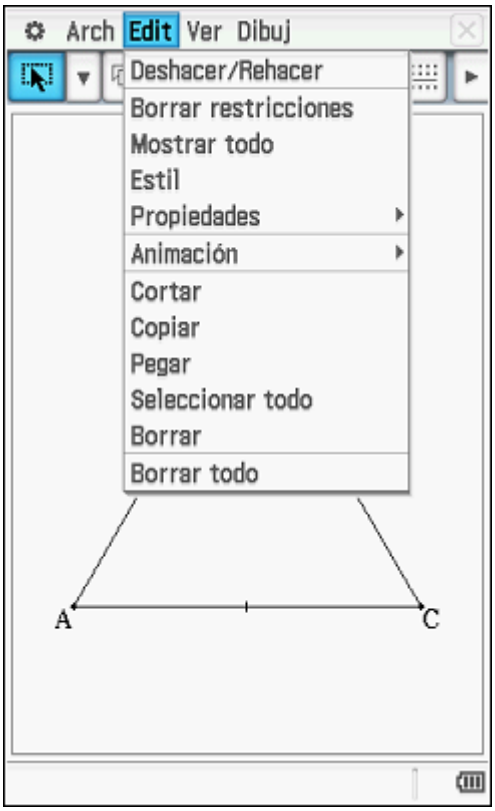


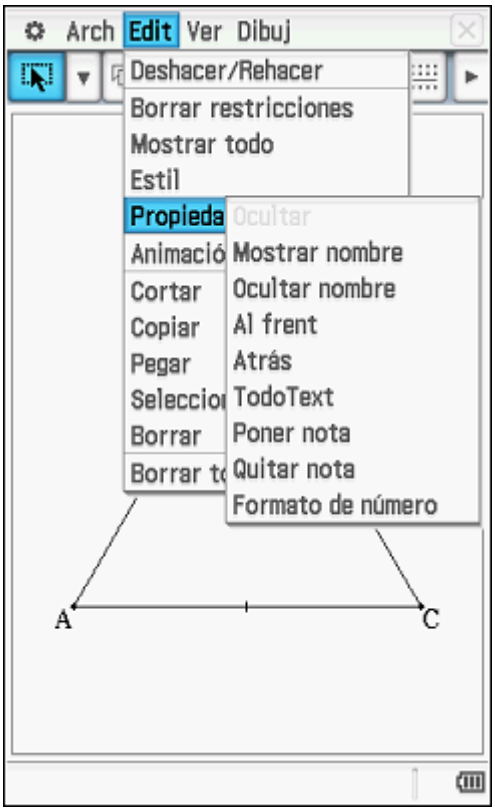
Para comprobar que es un triángulo rectángulo basta con medir el ángulo ABC.



MODIFICAR EL ASPECTO DE UNA CONSTRUCCIÓN

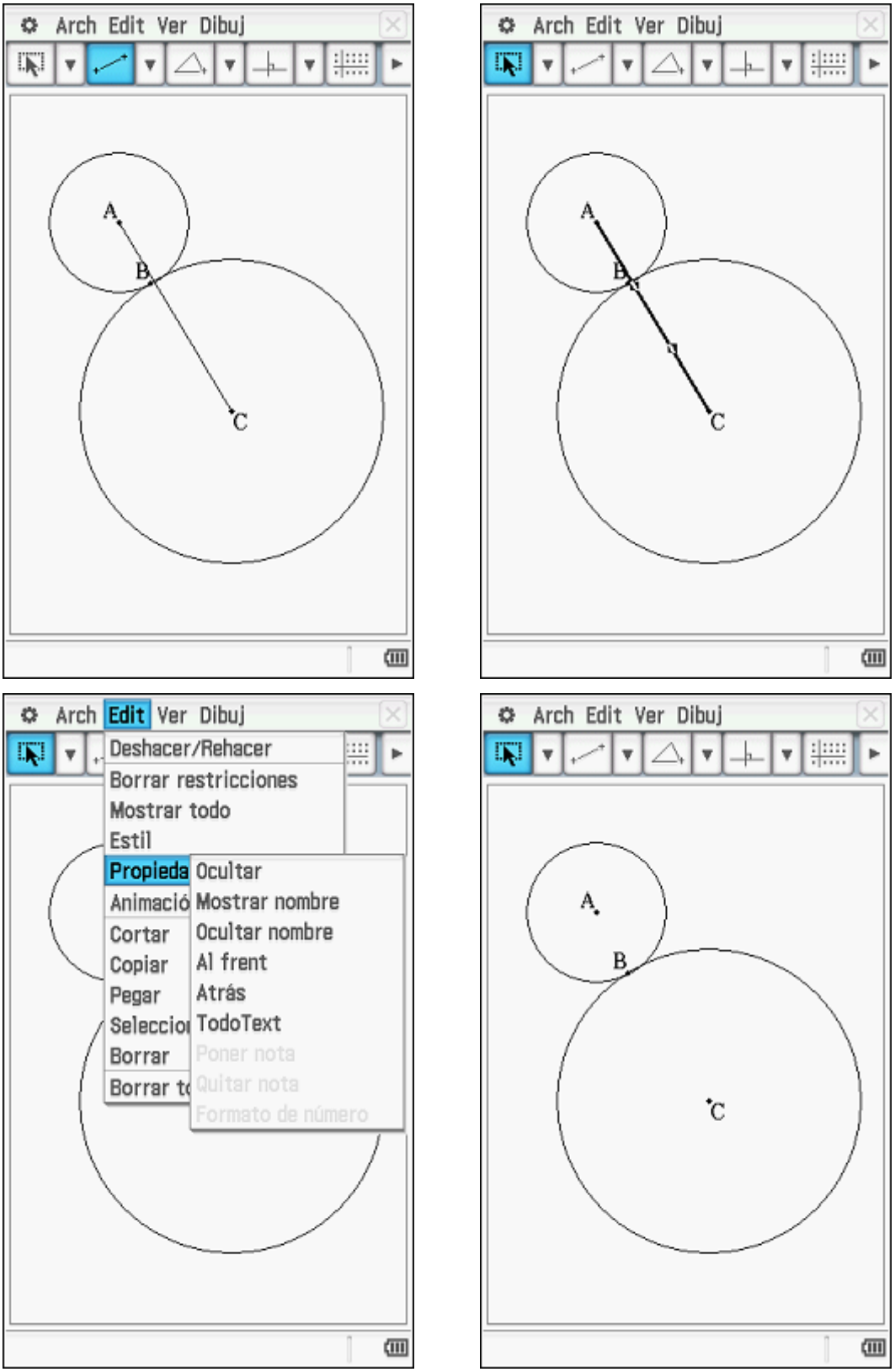
En el menú **Edit** encontramos distintas opciones para cambiar el aspecto de los distintos objetos de una construcción.





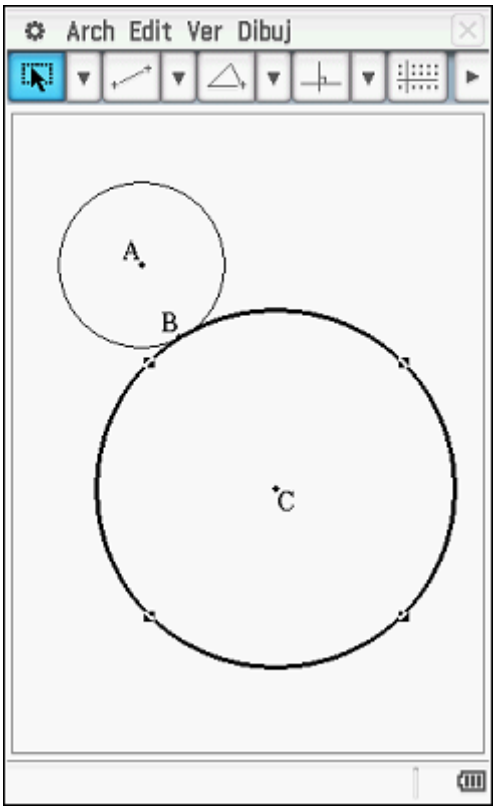
A través de la opción **Propiedades** accederemos a las opciones para ocultar objetos (**Ocultar**), ocultar el nombre de un objeto (**Ocultar nombre**) o para mostrar los nombres ocultos (**Mostrar nombre**).

Es evidente que las opciones que aparezcan tachadas no están disponibles, por ejemplo en la imagen anterior no está disponible **Ocultar** ya que previamente no hemos seleccionado ningún objeto.



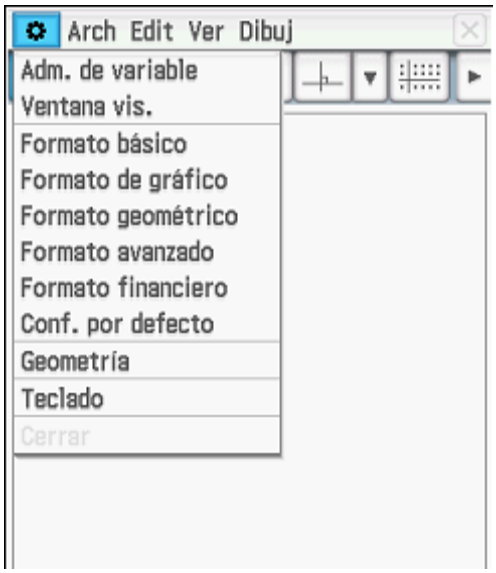
Es evidente que para ocultar un nombre o un objeto es necesario seleccionarlo previamente.

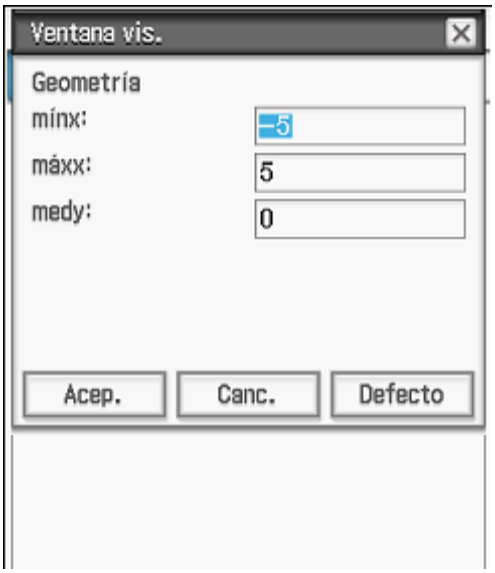
Además, las opciones **Más grueso** y **Más fino** permitirán dibujar las líneas seleccionadas con trazos más gruesos o más finos, respectivamente.



Otras opciones que facilitan el cambio de aspecto de cualquier construcción son las siguientes:

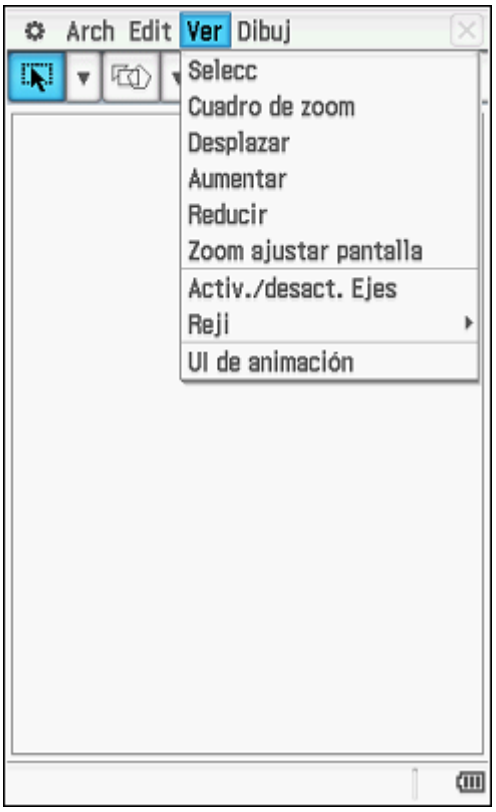
- Modificar los parámetros de la ventana de visualización: seleccionando la opción **Preferencias** en el menú , se accede a **Ventana vis.** para que aparezca el cuadro de diálogo en el que es posible cambiar los valores para la representación de la ventana de visualización en la aplicación geometría.

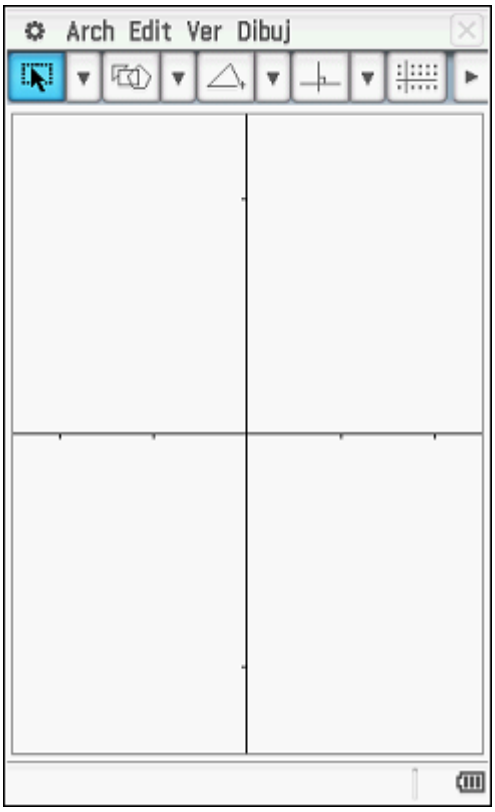




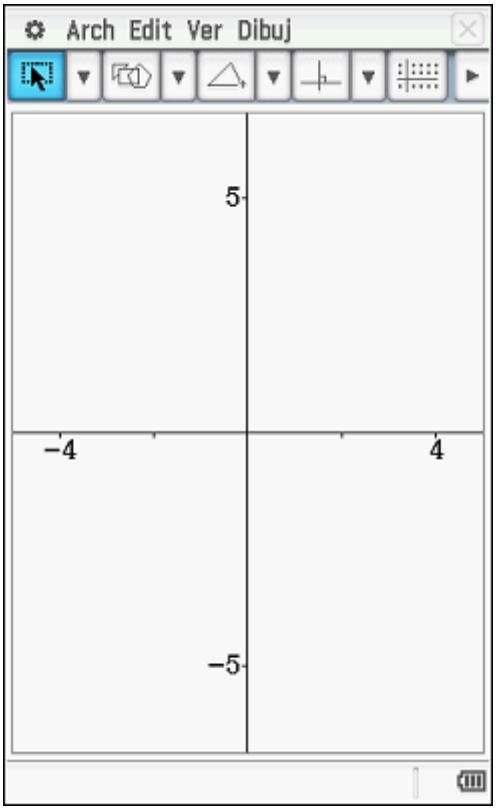
El valor **medy** se utilizará para centrar la ventana verticalmente.

- Mostrar los ejes de coordenadas: aparecerán al seleccionar la opción **Activ./desact. Ejes** en el menú **Ver** o al pulsar sobre el icono .

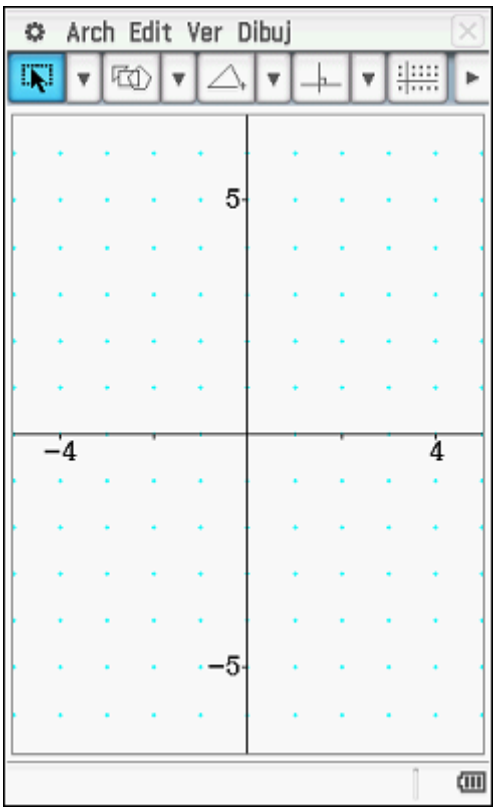




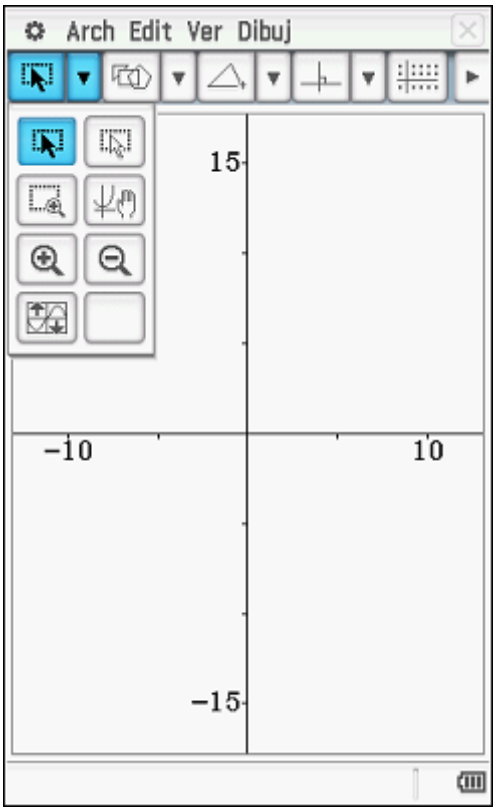
Para activar los valores numéricos en los ejes es necesario seleccionar de nuevo la opción anterior, una vez mostrados los ejes.



- Mostrar la rejilla: se activa o desactiva a través de la opción **Rejilla entera** en el menú **Ver**.



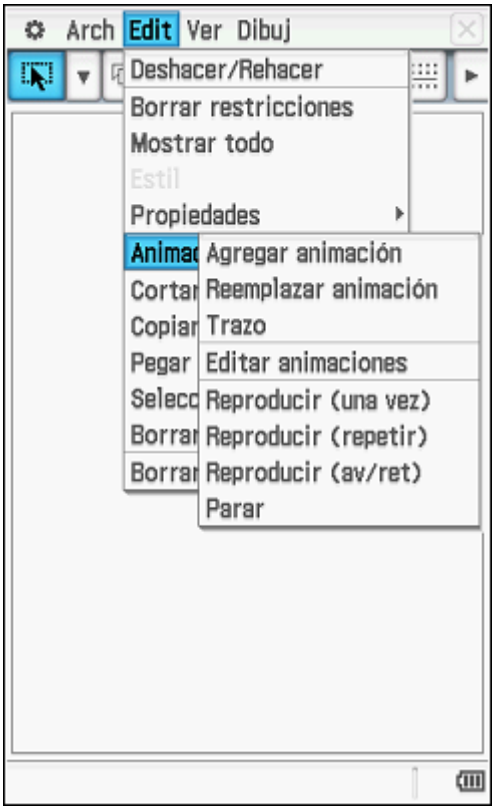
- Realizar zoom: las distintas opciones para ampliar o reducir una construcción se encuentran en el menú **Ver**. Estas mismas opciones aparecen al seleccionar el menú desplegable que aparece al pulsar sobre la opción **Puntero**.



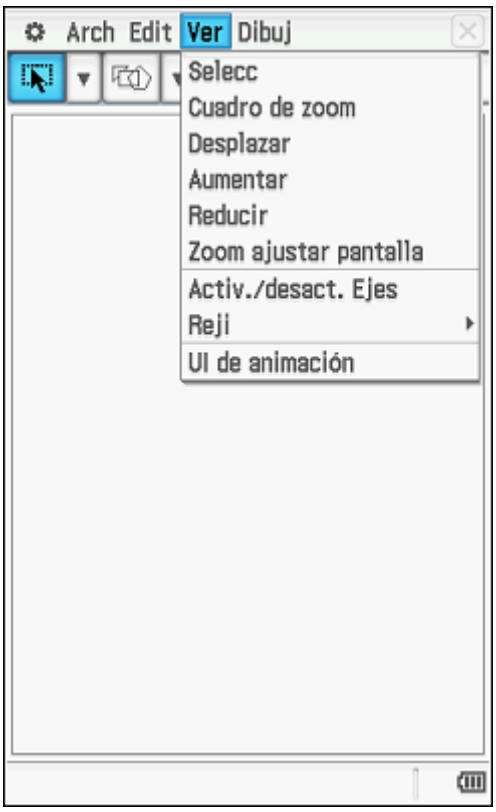
Estas opciones corresponden a un zoom de caja (**Cuadro de zoom**), desplazamiento panorámico de la pantalla (**Desplazar**), ampliar (**Aumentar**), o reducir (**Reducir**) o para ajustar una construcción a la ventana de visualización (**Zoom ajustar pantalla**).

ANIMACIONES

Las distintas opciones que ofrece el menú **Animación** permiten la realización de construcciones con movimiento en los objetos para cambiar las condiciones y relaciones existentes entre los elementos que intervienen en ella.



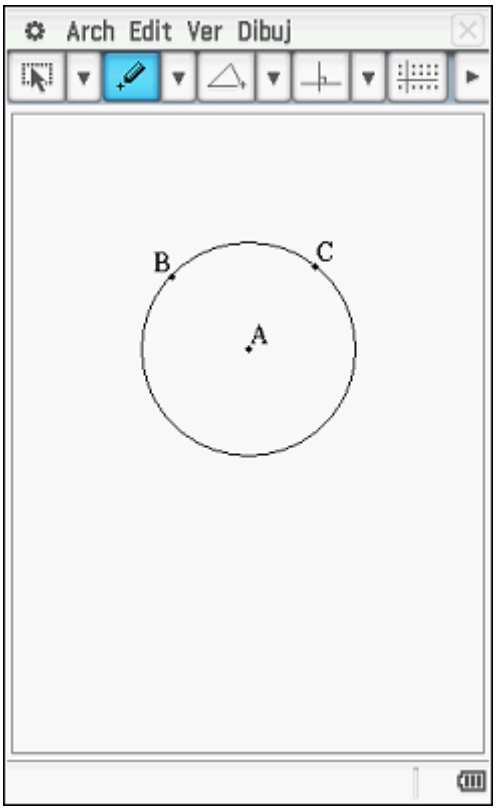
Estas opciones aparecen como iconos en el menú principal al seleccionar **UI de animación** en **Ver**.



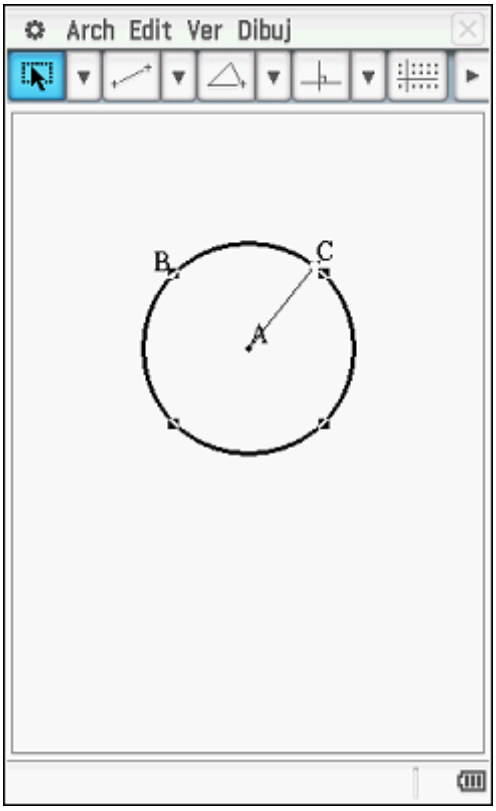
Aparecerá el siguiente menú con los distintos iconos.

Proponemos la realización de un sencillo ejemplo para mostrar el funcionamiento de estas opciones.

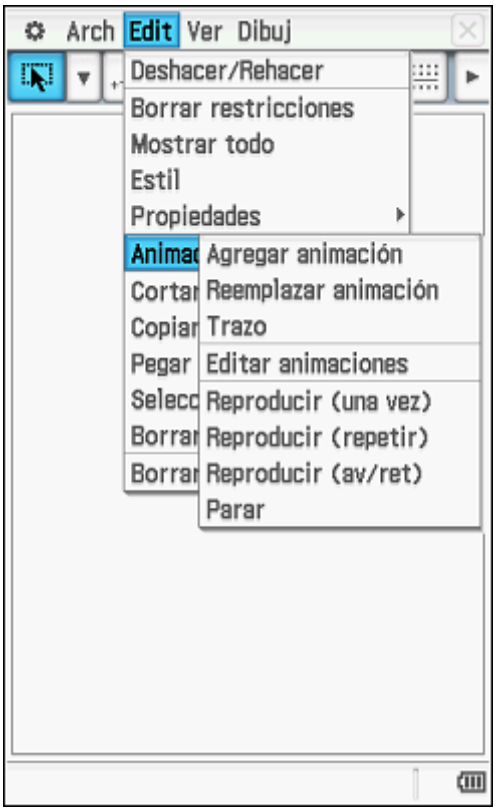
Dibujaremos una circunferencia y un punto C sobre ella, trazamos el segmento correspondiente al radio e intentamos que se éste se desplace al mover el punto sobre la circunferencia.



Una vez dibujado el segmento AC seleccionamos el punto C y la circunferencia.

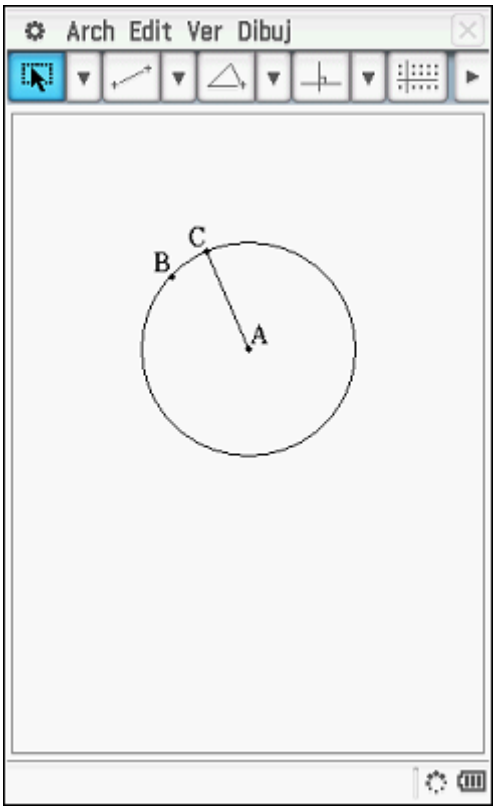


Abrimos el menú **Animación** y seleccionamos la opción **Agregar animación**.



Aunque no observamos cambio alguno, acabamos de establecer que el punto C y todos los objetos que dependan de él se moverán sobre la circunferencia en la que se ha trazado.

El movimiento comenzará al seleccionar **Reproducir (una vez)** en el menú **Animate**.



La animación se detiene al completar el recorrido o al pulsar la opción **Parar**.

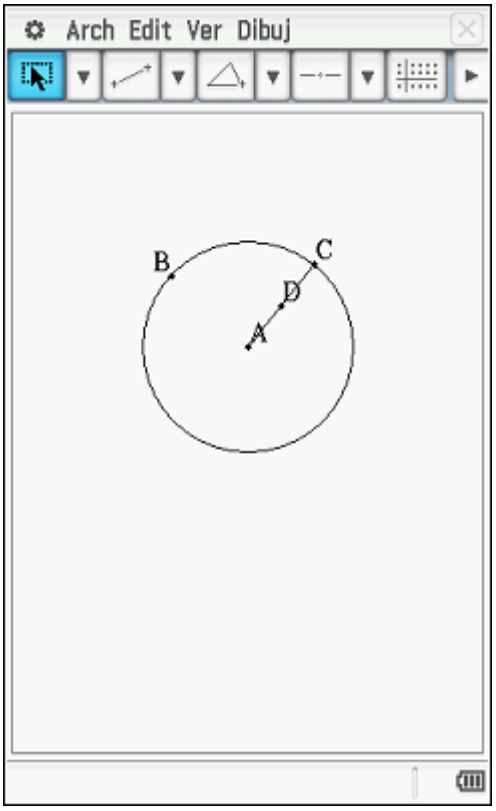
Si en lugar de la opción **Reproducir (una vez)** seleccionamos **Reproducir (repetir)** la animación no se detendrá hasta tanto se pulse **Parar** y sí la opción seleccionada es **Reproducir (av/ret)** se reproducirá en las dos direcciones.

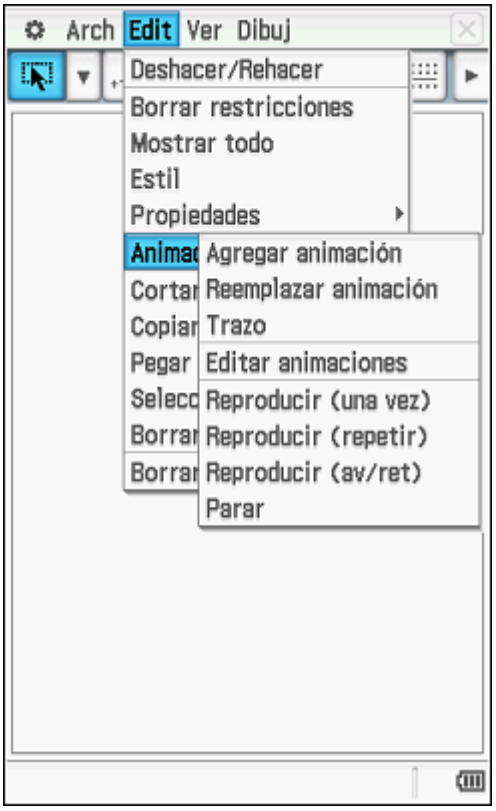
Recomendamos probar en la construcción anterior para observar la diferencia entre las opciones anteriores.

Estas opciones serán de gran ayuda para el trazado de lugares geométricos.

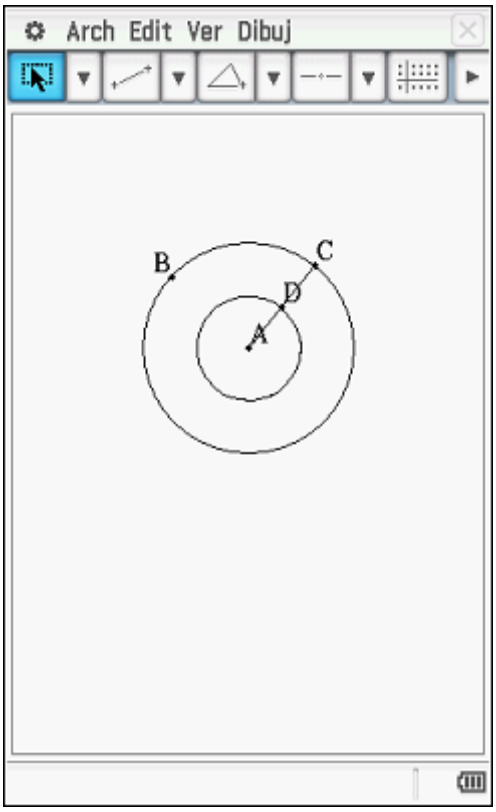
Por ejemplo, si en la construcción anterior dibujamos el punto medio del radio AC que aparecerá con la etiqueta D y preguntamos por el lugar geométrico descrito por el punto D cuando C recorre la circunferencia. Es evidente que el lugar solicitado es una circunferencia concéntrica con la inicial y con radio la mitad.

Para obtener su trazado a partir de las opciones de animación es necesario activar la traza del punto D. Para ello, seleccionamos el punto D, abrimos el menú **Edit** para pulsar sobre la opción **Trazo**.





Al activar de nuevo la animación aparecerá el lugar geométrico buscado.



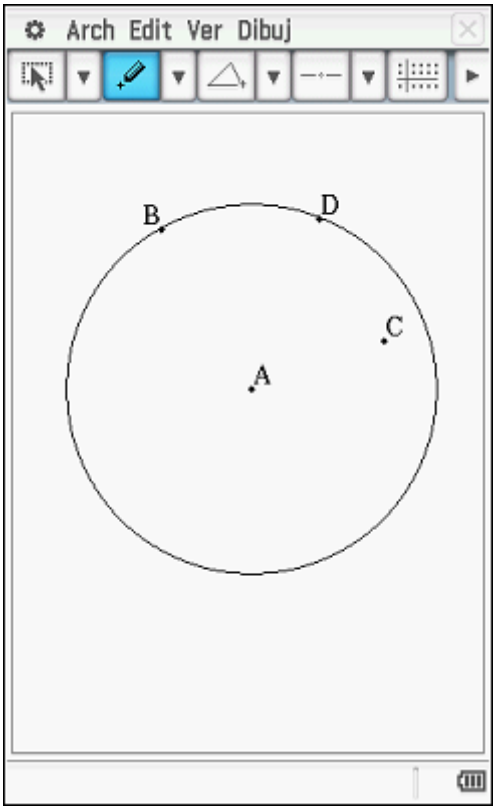
Los parámetros utilizados en una animación se pueden modificar a través de la opción **Editar animación**.

Las animaciones se realizarán sobre un punto que se moverá sobre un objeto rectilíneo, un objeto curvilíneo o sobre una función.

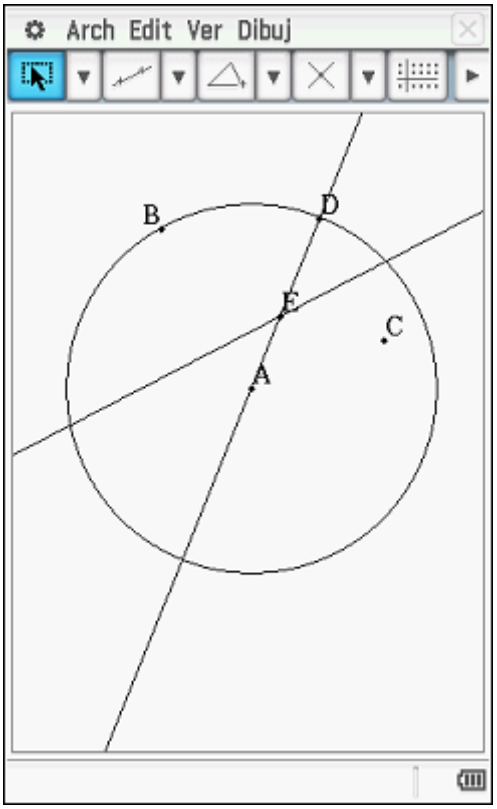
Ejemplo 4

Sea C un punto interior de una circunferencia. Dibuja el lugar geométrico descrito por los centros de las circunferencias que pasan por C y son tangentes a la circunferencia inicial.

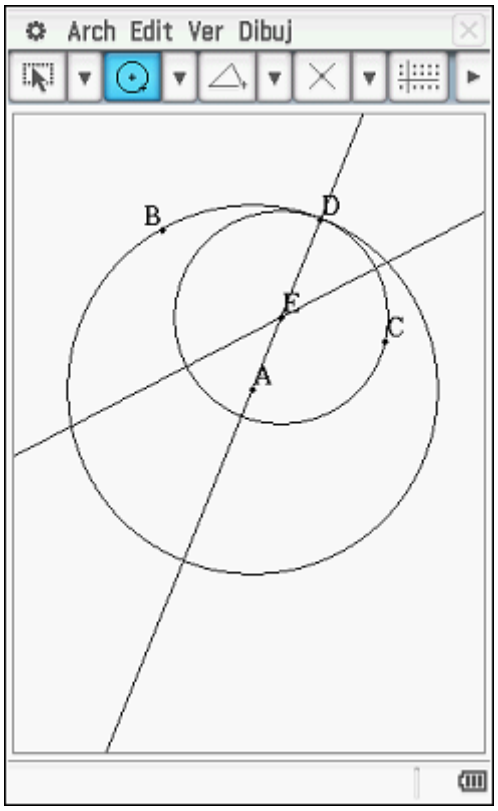
Dibujamos la circunferencia con centro A y radio AB, un punto C interior y un punto D en la circunferencia sobre el que trazar la circunferencia tangente en D que pase por el punto C.

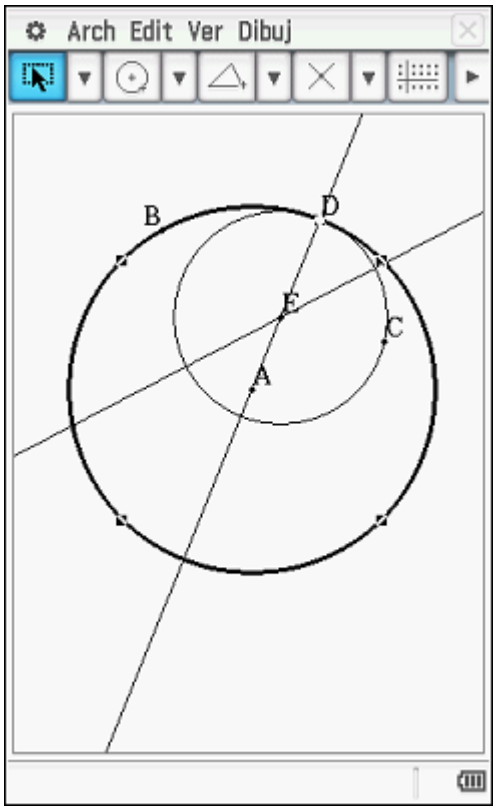


Trazamos la mediatriz del segmento DC y la recta que une el centro A con el punto D. El punto E intersección de la dos rectas anteriores es el centro de la circunferencia tangente en D que pasa por C.



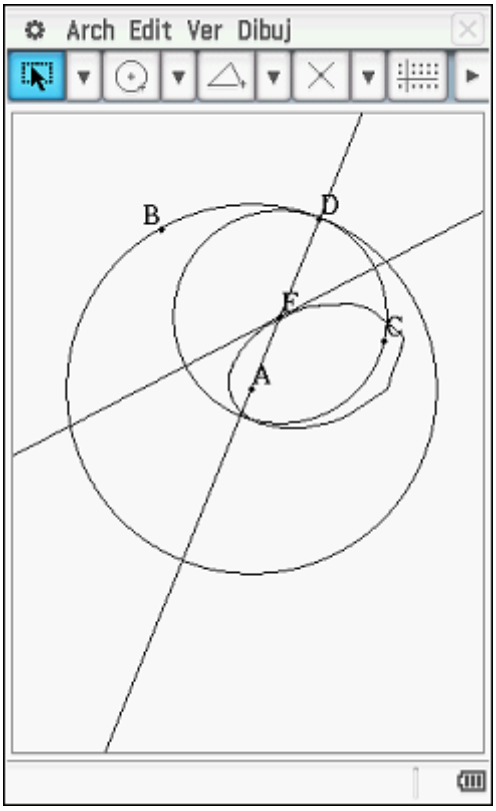
Al variar el punto D sobre la circunferencia aparecerán todas las circunferencias tangentes.





Seleccionamos el punto D y la circunferencia para crear la animación, activando a continuación la traza del punto E.

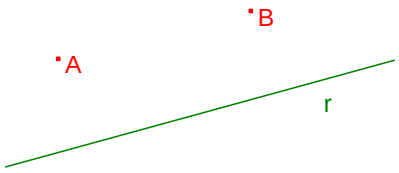
Para obtener el lugar geométrico basta con seleccionar **Reproducir (una vez)** en el menú **Animación**.



El lugar geométrico es una elipse cuyos focos son los puntos A (centro de la circunferencia) y C.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Determina en la recta r un punto C tal que el triángulo ABC sea isósceles en C. Encuentra otro punto D tal que el triángulo ABD sea isósceles en A. ¿Son únicos estos puntos?



2. Dados dos puntos A y B, sea r una recta que no es perpendicular a la recta AB. Dibuja la circunferencia que pasa por los puntos A y B y cuyo centro se encuentre en la recta r.

3. Construye el ortocentro y el baricentro de un triángulo.

4. Sobre dos semirrectas con el mismo origen A construye una circunferencia tangente a ellas.

5. Dados tres segmentos a, b y c; construye el triángulo cuyos lados son los tres segmentos dados.

6. Dibuja la circunferencia circunscrita a un triángulo.

7. Comprueba que la composición de dos simetrías axiales de ejes paralelos coincide con una traslación. Determina el vector de la traslación.

8. Traza las rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior.

9. Sea A un punto de una circunferencia c y P un punto interior. Traza la circunferencia que pasa por el punto P y es tangente a c en el punto A.

10. Sean A y B dos puntos situados en el mismo lado con respecto a una recta r. Determina el camino más corto para ir desde A a B, pasando por la recta r.

11. A partir de un segmento AB, construye un cuadrado cuyo lado sea dicho segmento. Utiliza distintos métodos para construir el cuadrado.

12. Dibuja el lugar geométrico descrito por el punto medio de una cuerda de una circunferencia, cuando uno de los extremos recorre la circunferencia.

13. Sea B un punto de una circunferencia y A un punto exterior. Si P es el punto de intersección de la recta tangente a la circunferencia por el punto B y de la recta perpendicular a la tangente anterior trazada por el punto A. Halla el lugar geométrico del punto P cuando B recorre la circunferencia.

14. Sea A un punto exterior a una circunferencia c. Dibuja el lugar geométrico descrito por los centros de las circunferencias que pasan por A y son tangentes a la circunferencia c.

15. Dada una circunferencia y un triángulo ABC, siendo A y B puntos de la circunferencia y C el centro. Halla el lugar geométrico del ortocentro cuando el punto A recorre la circunferencia.

16. Sea A un punto interior a una circunferencia c y B un punto de c. Sea P un punto de la prolongación de AB con la condición AB=BP. Determina el lugar geométrico del punto P al variar el punto B.

.

Tema 10.
ESTADÍSTICA UNIDIMENSIONAL

- Introducción
- Arrancar la aplicación Estadística
- El editor de listas
- Cálculos estadísticos.
- Representación gráfica de datos estadísticos de una variable.
- Actividades propuestas

INTRODUCCIÓN

Este tema explica como usar la aplicación Estadística. La aplicación Estadística permite realizar diversos cálculos estadísticos y representar gráficamente datos estadísticos de variables unidimensionales.

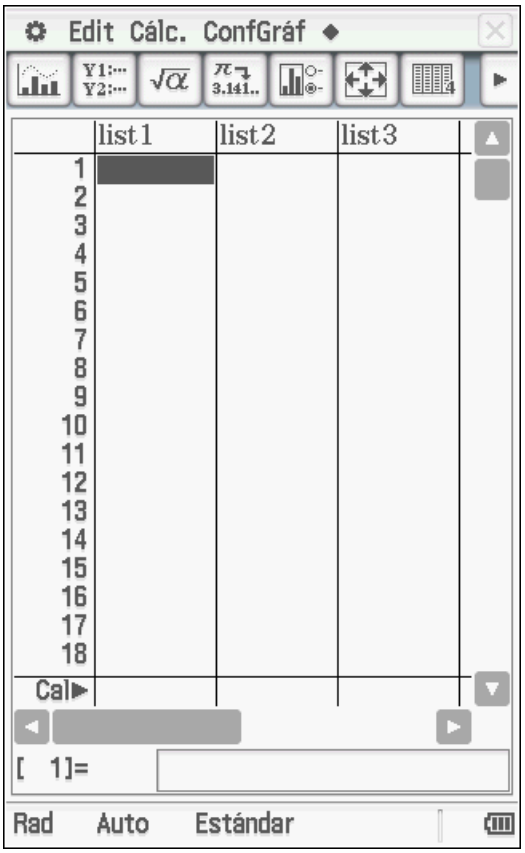
Además, la calculadora lleva incorporadas funciones de manipulación de listas que permiten generar fácilmente todas las tablas de frecuencias de una distribución estadística unidimensional.

Con la aplicación Estadística podemos realizar las siguientes operaciones estadísticas:

- Introducir y ordenar datos de tipo lista.
- Dibujar gráficos estadísticos de una variable, entre otros:
    - De probabilidad normal.
    - Histograma.
    - Diagrama de cajas Med.
    - Diagrama de cajas modificado.
    - Curva de distribución normal.
    - Polígono de frecuencias (o gráfico de línea a trazos).
- Cálculos estadísticos

ARRANCAR LA APLICACIÓN ESTADÍSTICA

Para arrancar la aplicación Estadística hay que pulsar **Estadística** en el menú de aplicaciones; con esto se muestra la ventana del editor de listas:



A continuación explicamos las operaciones que se pueden realizar usando los menús y los botones de la ventana anterior.

Abrir una lista existente	**Edit – Abrir Lista**	
Cerrar la lista seleccionada actualmente	**Edit – Cerrar Lista**	
Saltar a la línea 1 de la lista actual	**Edit – Saltar - Arriba**	
Saltar a la línea siguiente de la última línea de la lista actual	**Edit – Saltar - Abajo**	
Ordenar los datos de una lista en orden ascendente	**Edit – Ordenar - Ascendente**	
Ordenar los datos de una lista en orden descendente	**Edit – Ordenar - Descendente**	
Borrar una celda	**Edit – Borrar - Celda**	
Borrar todos los datos de una lista	**Edit – Borrar - Columna**	

Borrar una lista de la memoria	**Edit - Borrar – Variable lista**	
Insertar una celda en una lista	**Edit – Insertar celda**	
Convertir una expresión matemática a un valor		
Dibujar un gráfico estadístico		
Ver la ventana del editor de gráficos		
Aplicación Principal		
Ver el cuadro de diálogo de la ventana de visualización	⚙ **- Ventana vis.**	
Ver el administrador de variables	⚙ **- Adm. De variable**	
Cuadro de diálogo de configuración de gráficos estadísticos	**ConfGráf – Opciones**…	
Ver dos columnas en la ventana del editor de listas		
Ver tres columnas en la ventana del editor de listas		
Ver cuatro columnas en la ventana del editor de listas		

EL EDITOR DE LISTAS

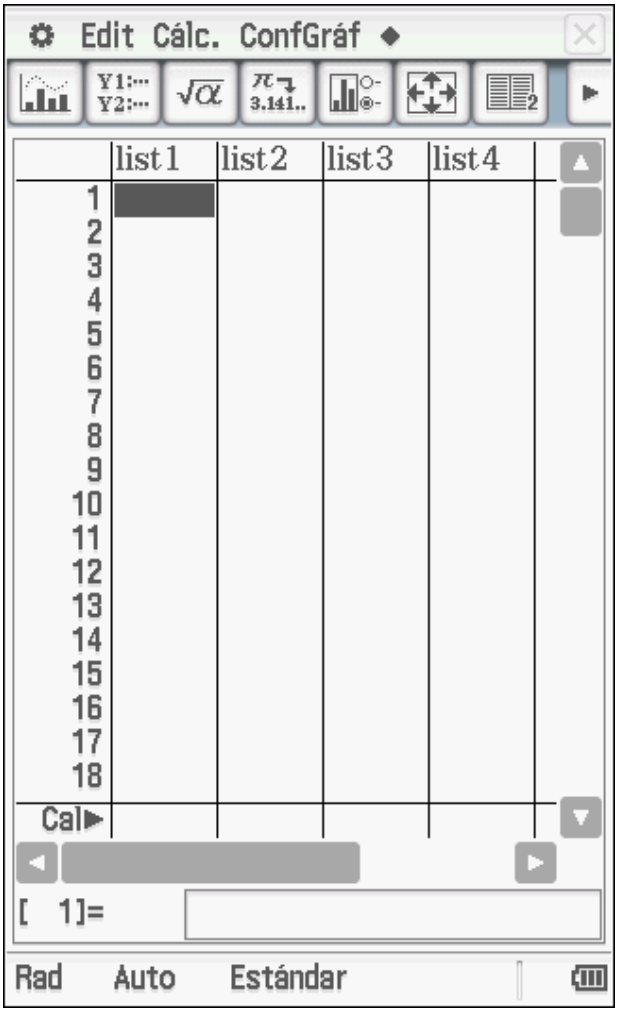
El editor de listas es una herramienta para la creación y el mantenimiento de listas.

Una lista es un tipo de matriz que permite manipular múltiples datos como un grupo. Una lista tiene una columna y puede contener hasta 9999 filas. En la ventana del editor de listas pueden verse hasta 99 listas.

Las operaciones con listas se realizan usando la ventana del editor de listas, que aparece siempre que se arranca la aplicación Estadística.

Las listas son tratadas como variables y, al igual que las variables, son almacenadas en una carpeta en la memoria y pueden manipularse usando el administrador de variables. Si se borra una lista de la pantalla, dicha lista todavía existe en la memoria como una variable y puede ser recuperada cuando sea necesario.

El nombre de lista aparece en la parte superior de cada lista. Los nombres de las variables de tipo lista pueden usarse dentro de las fórmulas de cálculo, como cualquier otro nombre de variable. La ventana del editor de listas inicial por defecto muestra seis listas (columnas) llamadas list1 a list6.



Se puede cambiar el nombre por defecto por el nombre que se desee. Para ello:

(1) En la ventana del editor de listas, toque la celda de nombre de lista en la parte superior de la lista a la que desea cambiar el nombre. Esto selecciona la celda de nombre de lista.

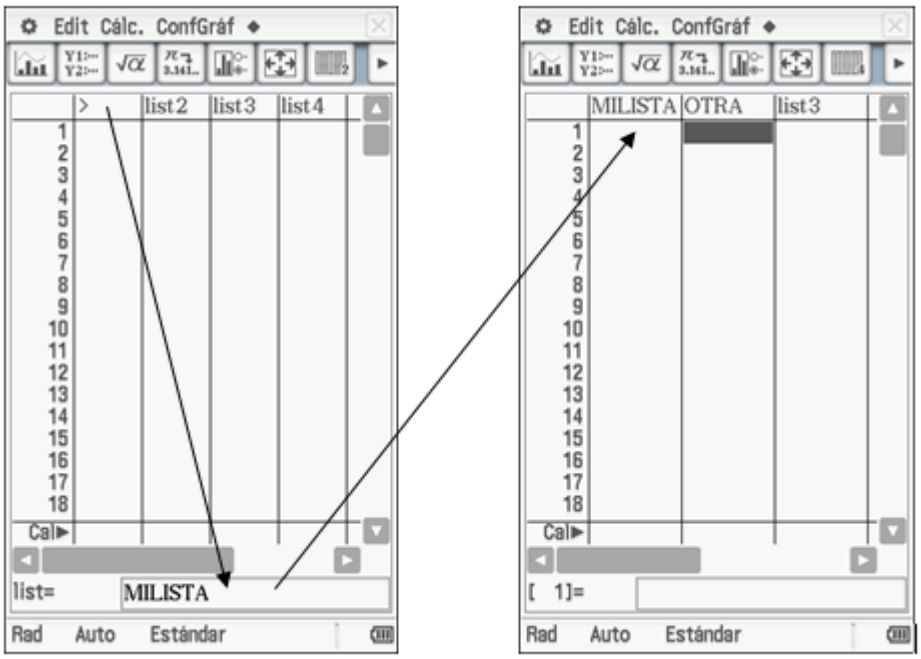
(2) Introduzca hasta ocho bytes para el nombre de lista deseado, y luego presione **EXE**

•No puede utilizar ninguna palabra reservada de la ClassPad como nombre de variable de tipo lista. Tampoco puede especificar un nombre de lista que ya esté siendo utilizado por otra lista.

Consejos:

• Si introduce un nombre de lista ya utilizado por otra lista, al tocar **EXE** se muestra el contenido de esa lista. Los datos de la lista existente reemplazan a los datos que ha introducido en la ventana del editor de listas.

• Si introduce un nombre de lista sin especificar una carpeta, el nombre de variable se almacena en la carpeta actual. Para almacenar el nombre de variable en otra carpeta, especifique el nombre de carpeta junto con el nombre de lista. Para almacenar el nombre de variable de una lista llamada “a” en una carpeta llamada “abc”, por ejemplo, introduzca lo siguiente para el nombre de lista: abc\a.



Para abrir una lista existente, la manera más fácil es introducir el nombre de la lista en la celda de nombre de lista de una columna.

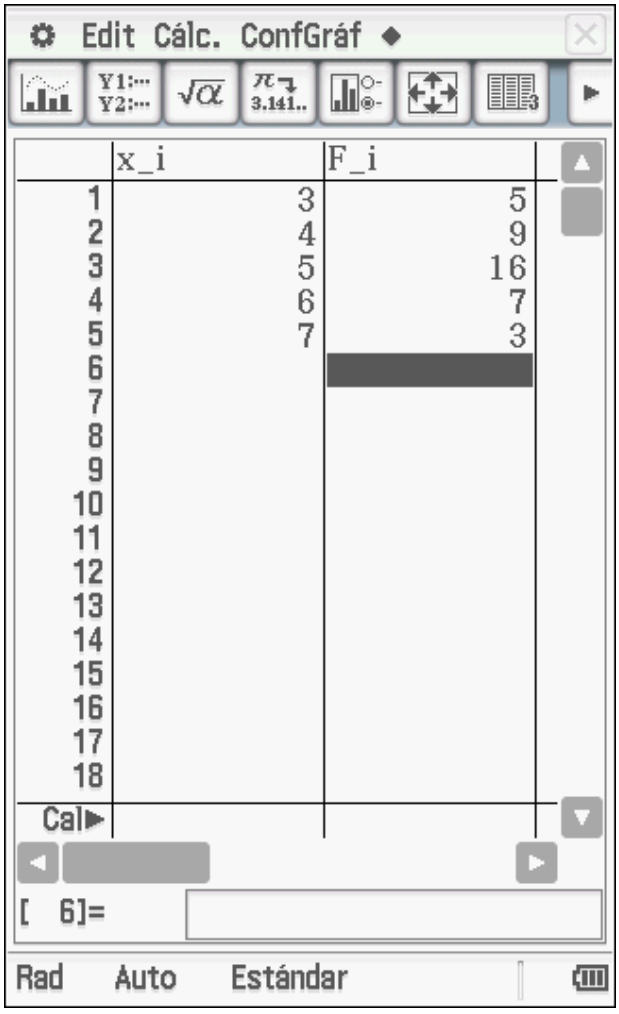
Consideremos el siguiente problema:

A la pregunta: ¿Cuántas personas forman tu hogar familiar?, 40 personas respondieron esto:

5,5,4,7,4,3,5,5,3,4,6,4,6,5,6,4,6,5,5,5,5,4,5,7,6,5,5,4,3,5,3,5,6,7,4,5,4,3,5,6

Vamos a crear una tabla de datos y frecuencias.

En list1 vamos a colocar los valores de la variable, con lo cual vamos a renombrar por x_i; en list2 vamos a colocar la frecuencia absoluta de cada valor de la variable y la llamamos F_i .

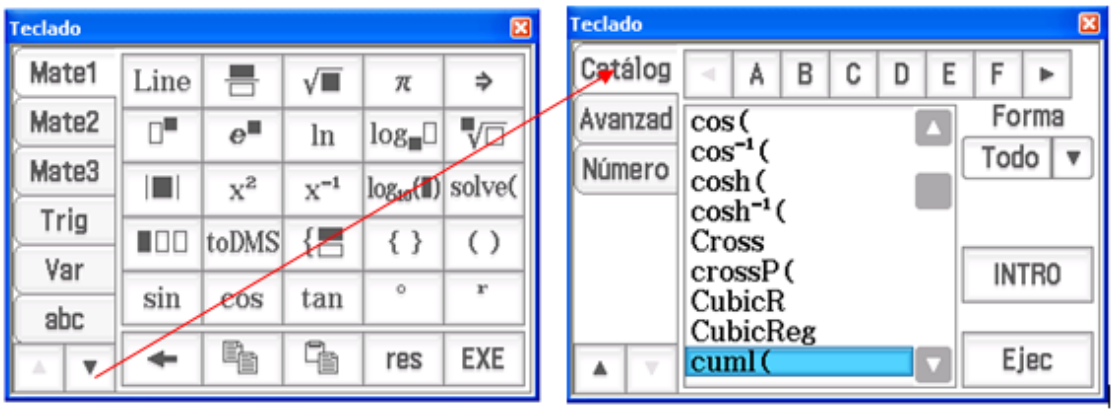


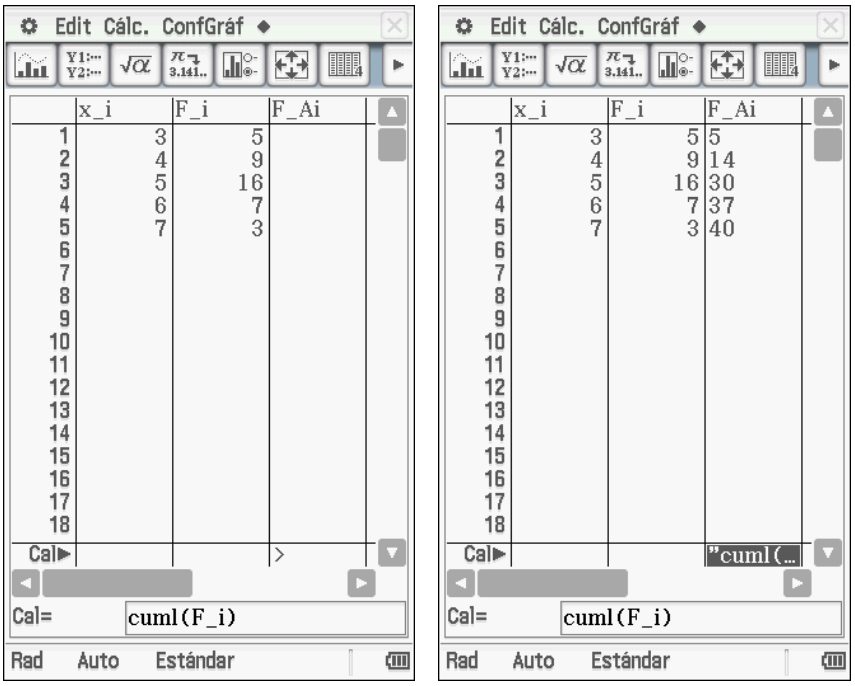
Una vez concluida la introducción de datos, va a ser la máquina la que realice el trabajo; nosotros nos limitaremos a reflexionar sobre lo que hay que hacer, lo que significa cada cosa y a dar órdenes para la obtención de las demás columnas. Ahora bastará con situarse encima de la leyenda "list3" y pensar en lo que vamos a hacer. En

este caso vamos a generar la columna de las frecuencias absolutas acumuladas de cada valor de la variable, que es el número total de individuos para los que la variable toma valores menores o iguales que ese valor. A esa lista la llamamos F_{Ai}. Para ello, procedemos así:

En la ventana del editor de listas, seleccionamos la celda "Cal" de la lista donde queremos introducir los resultados de cálculo; en nuestro caso es la lista que hemos llamado F_{Ai}.

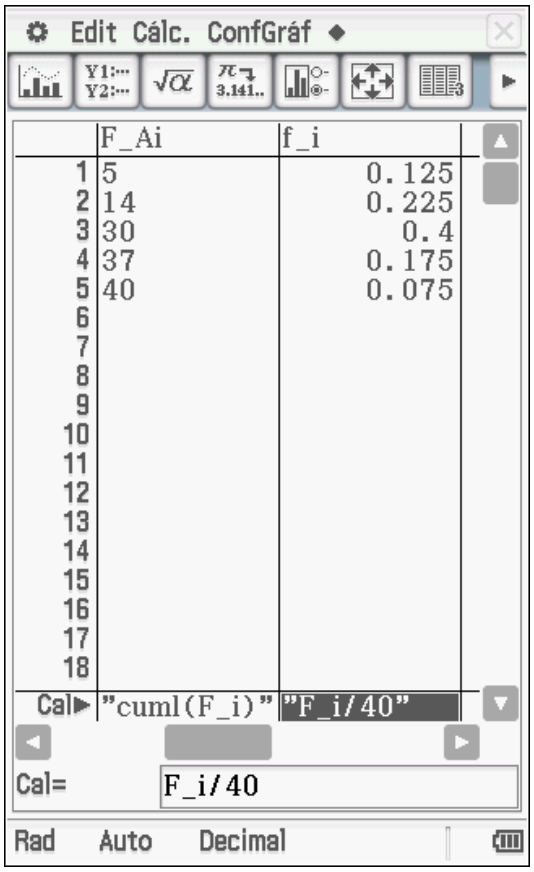
En el cuadro "Cal=", introducimos la fórmula (utilizando el teclado virtual **Catálog**, o directamente) **cuml(F_i)**; presionando **EXE** los valores aparecerán en la nueva lista.



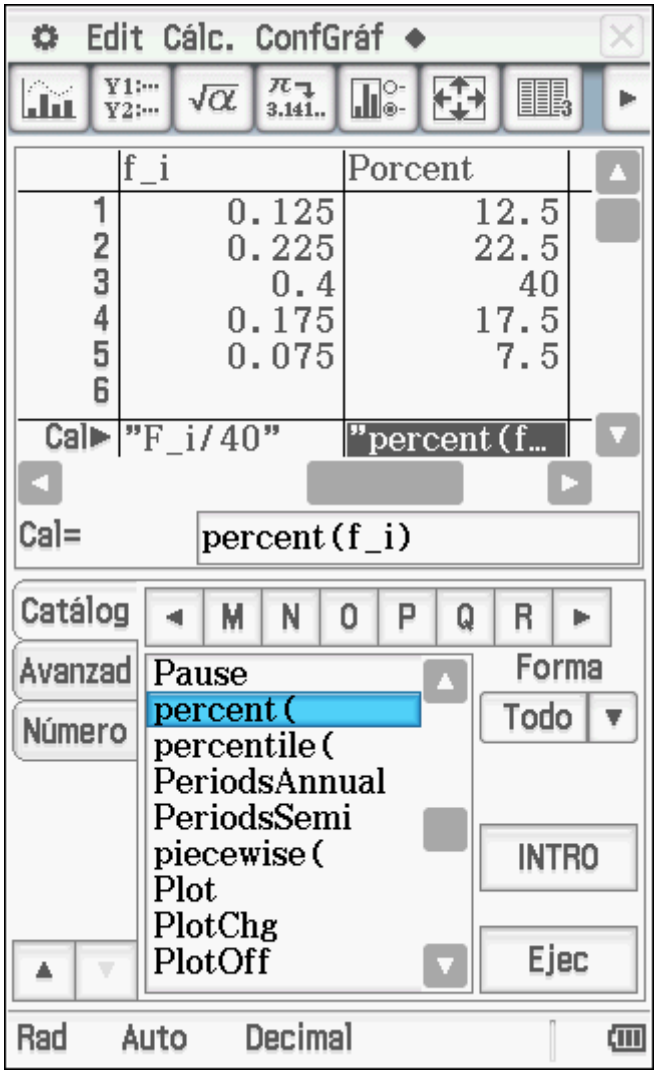


Por ejemplo, la tercera fila indica que el dato 5 aparece con una frecuencia acumulada de 30, es decir, hay 30 personas que tienen 5 o menos miembros en su familia.

En la cuarta lista vamos a crear la columna de frecuencias relativas de cada valor de la variable, que es el cociente de dividir su frecuencia absoluta por el número total de individuos, o sea $F_i/40$. A esa columna le llamamos f_i

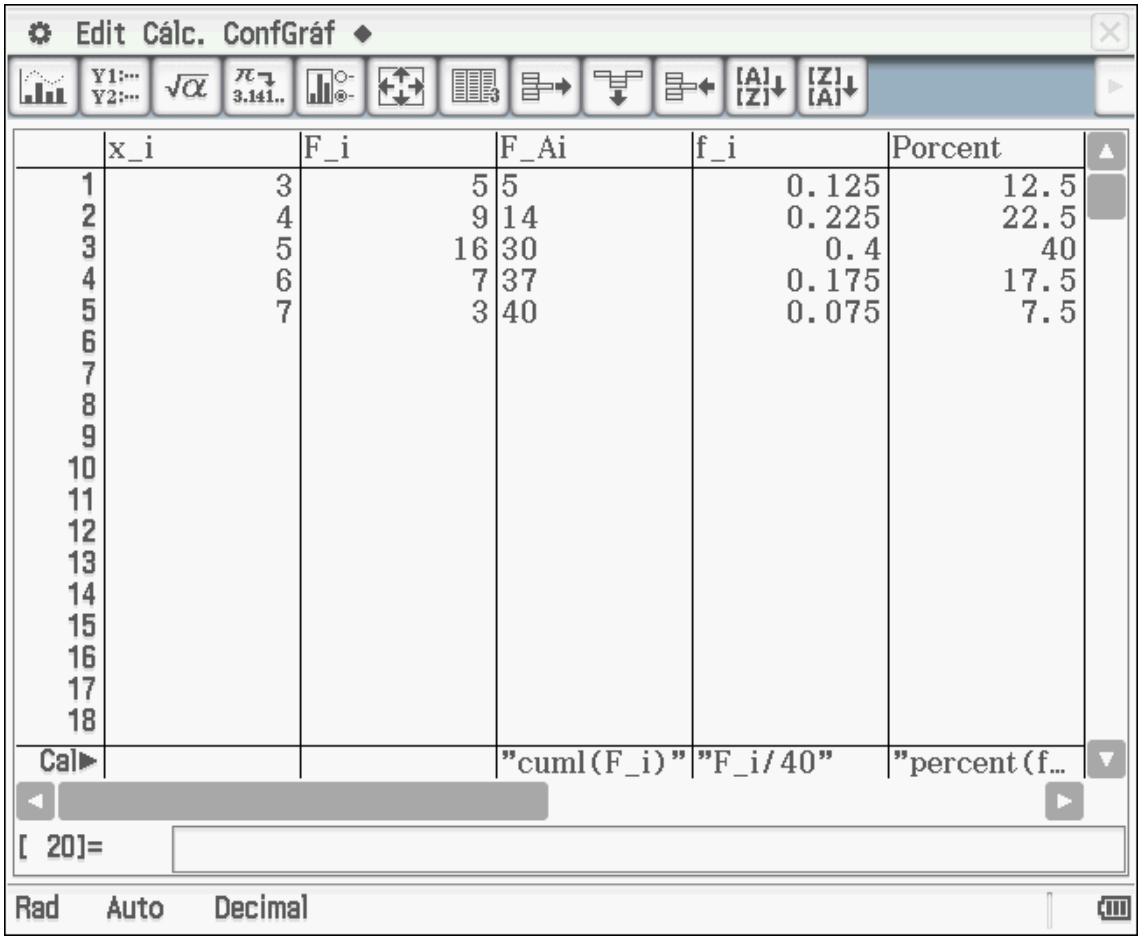


La primera fila, por ejemplo, indica que el dato 3 aparece con una frecuencia relativa de 0.125, es decir, 0.125 individuos de dada 1 tiene 3 miembros en su familia. Pero puede resultar más real expresar lo anterior en porcentajes, así que en lista 5 vamos a generar la columna de las frecuencias relativas pero expresadas en porcentajes; con el tecleado virtual, o directamente, escribimos en la celda de Cal **percent(f_i)**



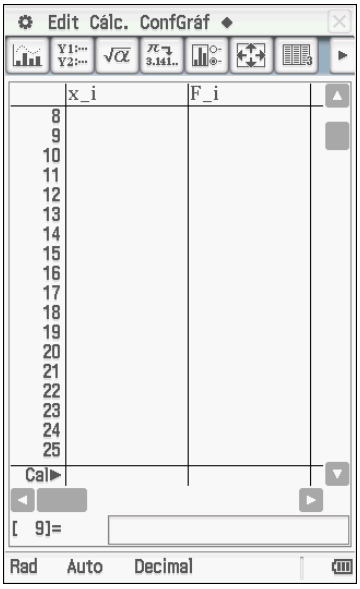
Por ejemplo, en la fila 1 el dato 3 aparece con una frecuencia relativa del 12.5%

Así, hemos construido la tabla de frecuencias:



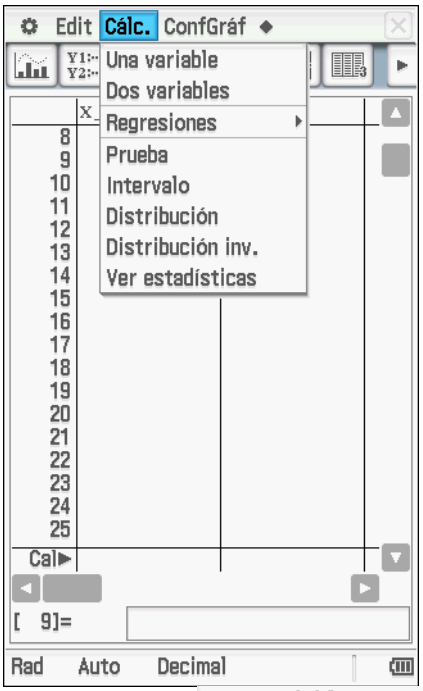
CÁLCULOS ESTADÍSTICOS

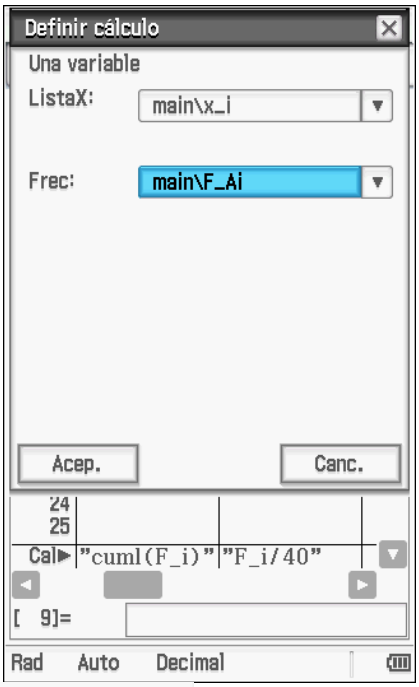
Vamos a obtener los valores de las diferentes medidas de centralización y de dispersión. Observemos que realmente solo nos interesan las dos primeras listas, o sea, los valores de la variable y los de su frecuencia absoluta

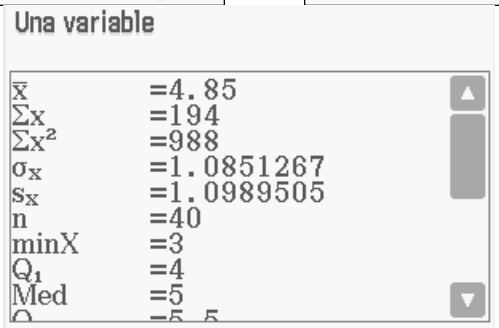


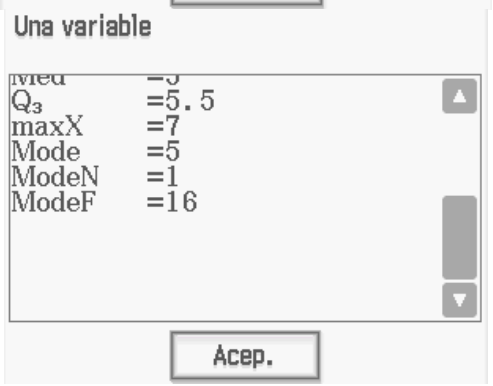
Para ver los resultados procedemos así:

- En la barra de menús, tocamos [**Cálc**] y luego [**Una variable**].
- En el cuadro de diálogo que aparece especificamos el nombre [Lista1], que en nuestro caso es main/x_i y seleccionamos la opción [Frec] asignando main/F_i. (La palabra main aparece para indicarnos que la variable está guardada en la carpeta principal).
- Pulsamos **Acep.**









Aparece el cuadro de diálogo de cálculos estadísticos con los resultados que vamos a comentar a continuación.

- La media $\bar{x}$ de los miembros de la familia es de 4.85 miembros.
- $\sum x$. Si sumamos todos los miembros de las familias nos daría 194
- $\sum x^2$. La suma de los cuadrados de los miembros de la familia es 988.
- $x\sigma_n$. La desviación típica del número de miembros de la familia tomados como población es 1.08512672.
- $x\sigma_{n-1}$ La desviación típica del número de miembros de la familia tomados como muestra es 1.09895054.
- n. El número de familias es de 40.
- MinX. El menor número de miembros en una familia es 3.
- Q_1. Primer cuartil. Las familias de 4 miembros tiene el 25% de la distribución con un número de miembros menor o igual que ellas.
- Med. Mediana. Una familia de 5 miembros deja a cada lado el mismo número de datos.
- Q_3. Tercer cuartil. Las familias de 5.5 miembros tiene el 75% de la distribución con un número de miembros menor o igual que ellas.
- maxX. El mayor número de miembros de una familia es 7.
- Mode. Moda. El número de miembros más frecuentes en una familia es 5.
- ModeN. Número de elementos iguales a la moda de los datos, que en nuestro caso es 1.
- ModeF. Frecuencia de la moda de los datos, o sea, 5 tiene una frecuencia absoluta de 16.

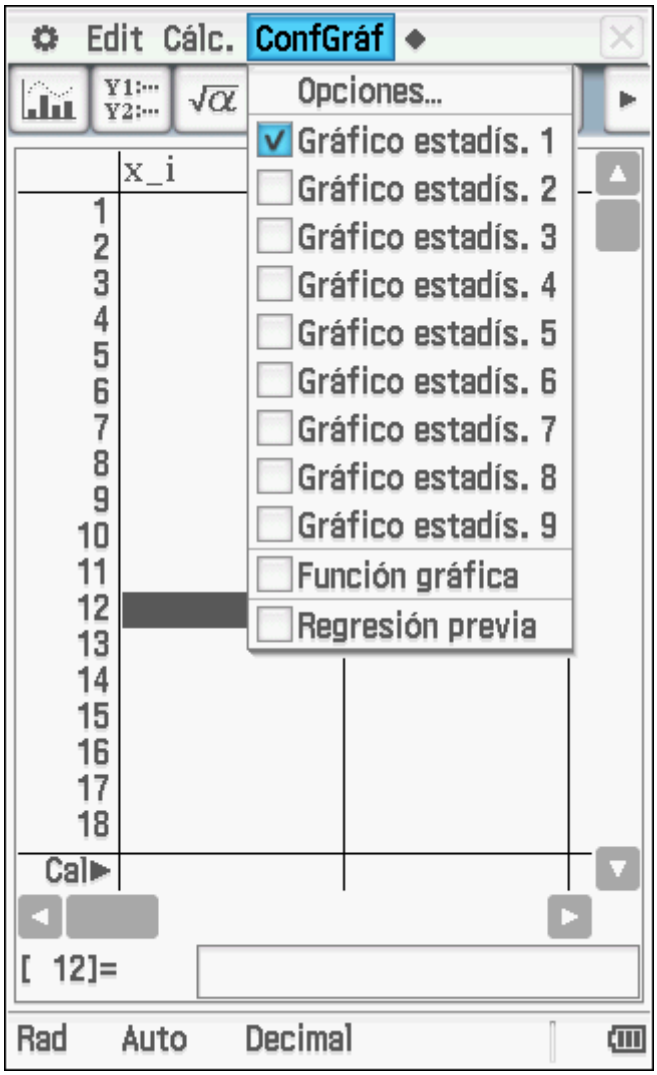
REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE DATOS ESTADÍSTICOS DE UNA VARIABLE.

Antes de dibujar un gráfico estadístico, primero es necesario configurar su "configuración de gráfico estadístico" usando el menú [**ConfGráf**].

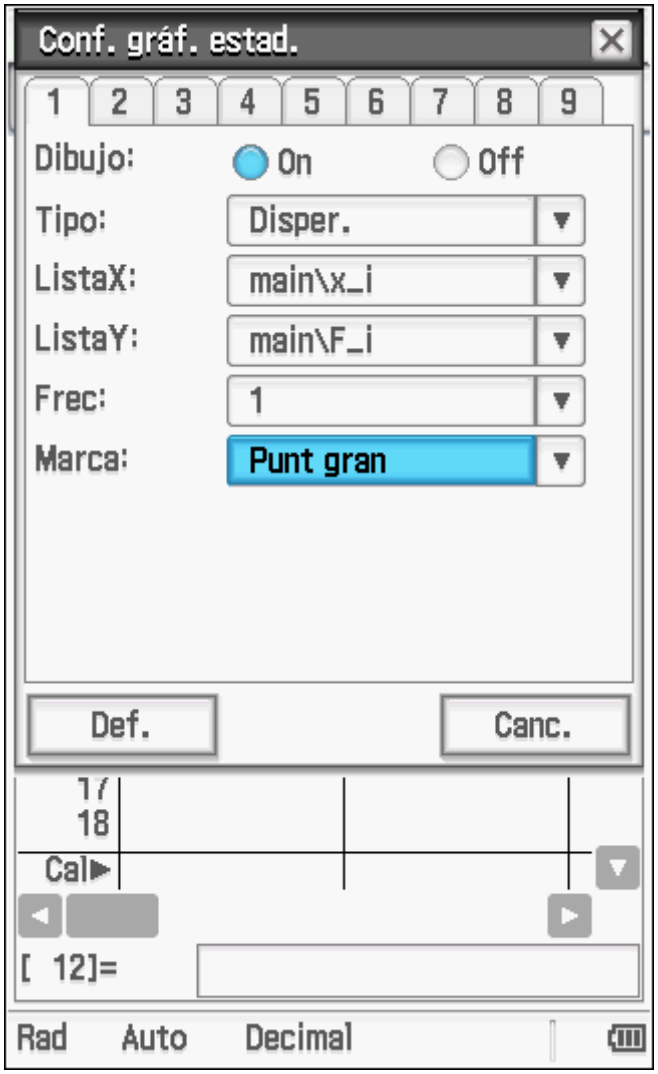
La configuración de gráficos estadísticos permite configurar los parámetros para controlar el tipo de gráfico, las listas que contienen los datos de un gráfico, el tipo de marcadores que se usarán y otras opciones. Se pueden almacenar hasta nueve

configuraciones de gráfico estadístico en la memoria, llamadas Gráfico Estadís. 1, Gráfico Estadís. 2, y así sucesivamente, para ser recuperadas posteriormente

Al pulsar [ConfGráf.] en la barra de menús de la ventana del editor de listas, aparece un menú como el que sigue

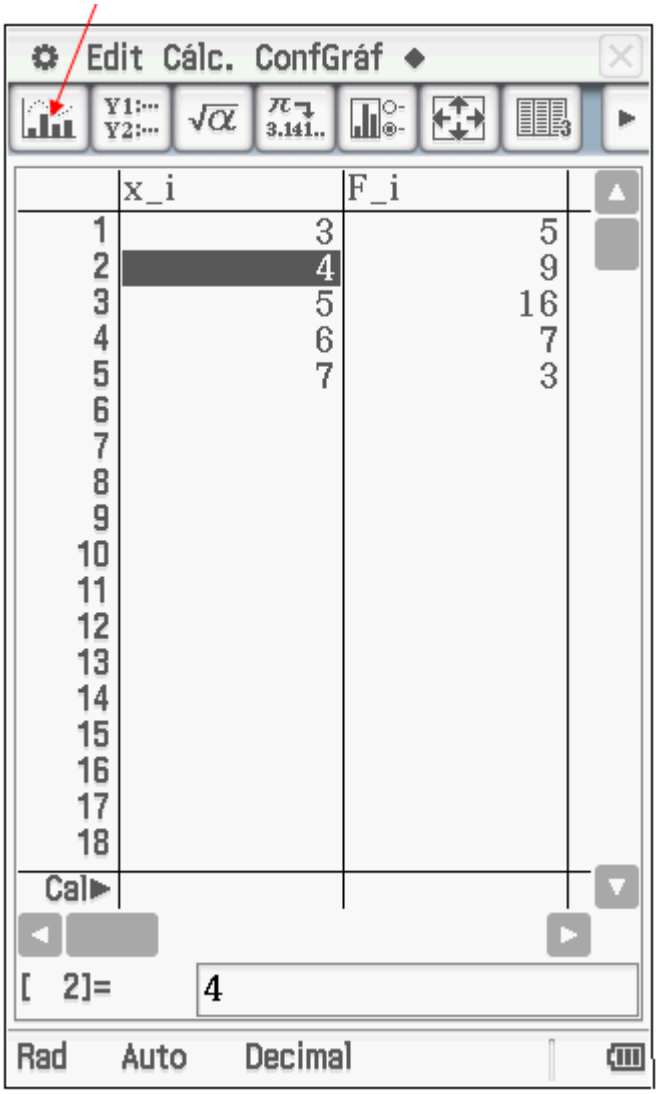


Si ahora pulsamos [Opciones…] aparecerá el cuadro de diálogo de configuración de los gráficos estadísticos.

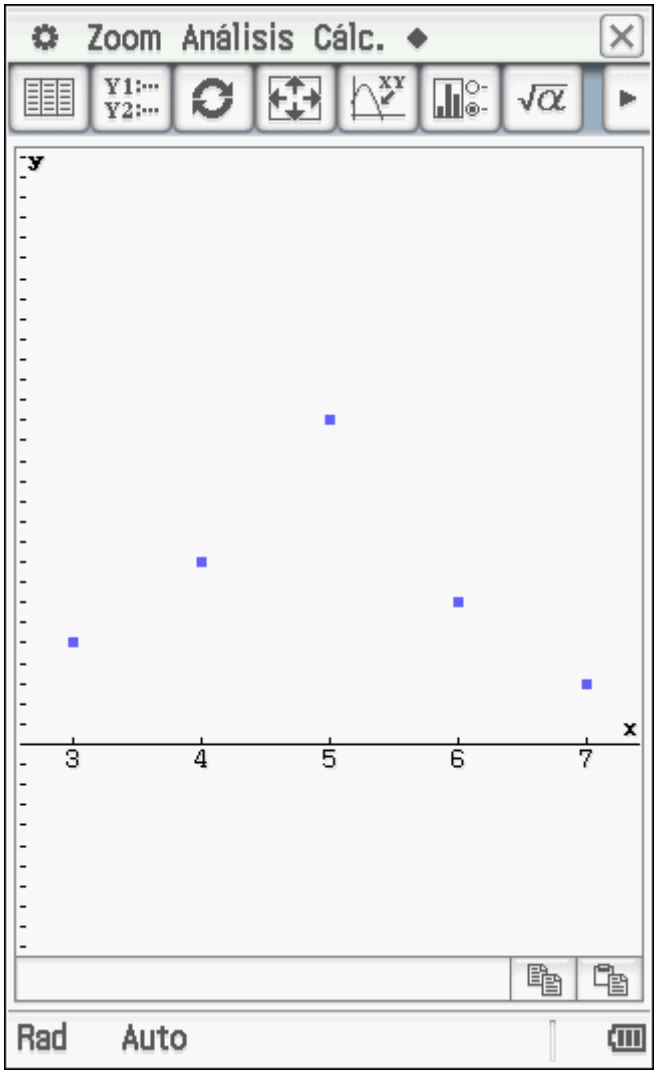


Hay una lengüeta para cada configuración de gráfico estadístico, llamada Gráfico Estadís.1 a Gráfico Estadíst.9. Tocando los botones de selección se puede ver la configuración de gráfico estadístico que se quiere cambiar, y pulsando [**Def**.] se aplican las opciones elegidas. Así, en la pantalla anterior tenemos un gráfico de **Nube de Puntos (Disper.)** que queremos se dibuje (Dibujo: On); le hemos indicado que los datos de la variable están en x_i y sus frecuencias en F_i, y con una marca (Marca) de punto grande (Punto gran).

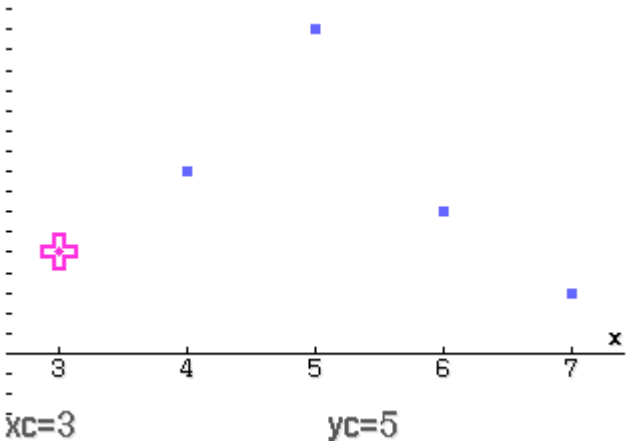
Ahora pulsamos aquí



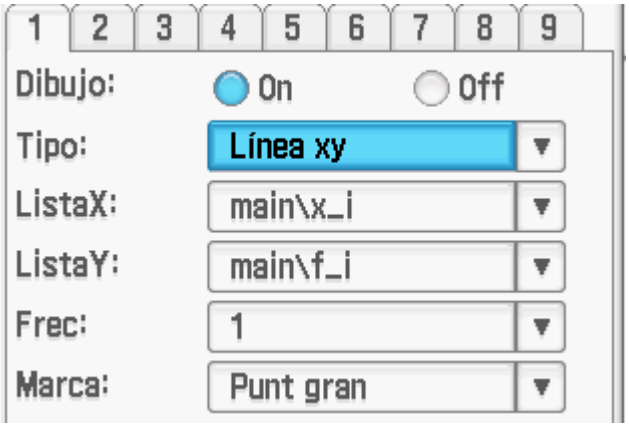
y nos aparecerá el gráfico.

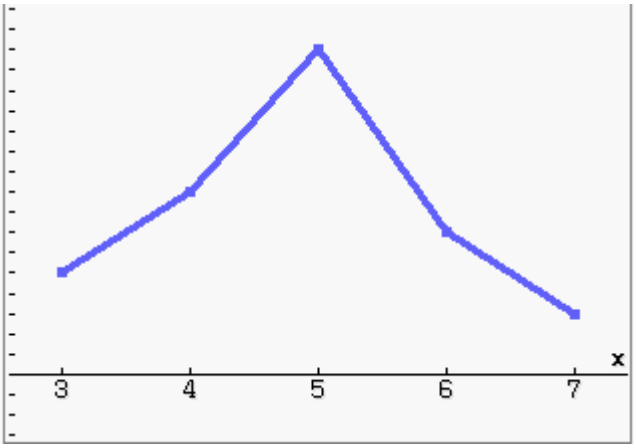


Pulsando en el icono  aparece marcado el punto y sus valores (mover con las flechas para los siguientes).

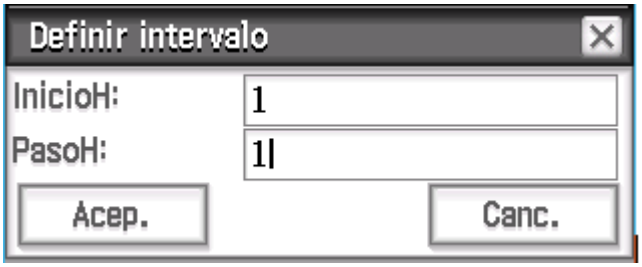


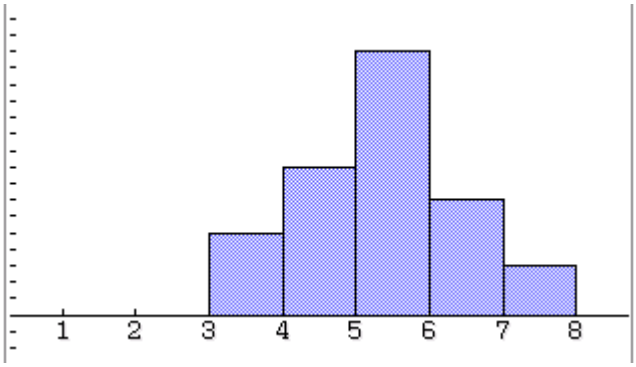
Ahora vamos a dibujar el **polígono de frecuencias absolutas (Línea xy)**



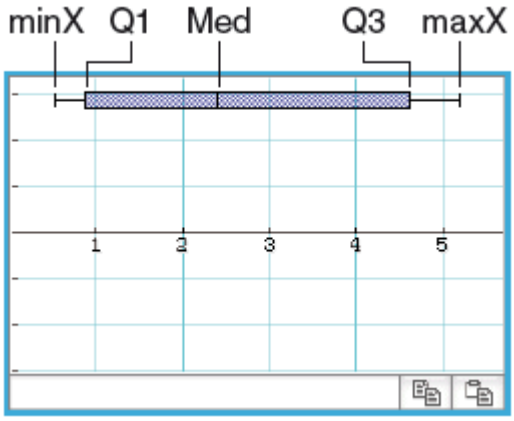


Para dibujar el **diagrama de barras (Histogr.)**

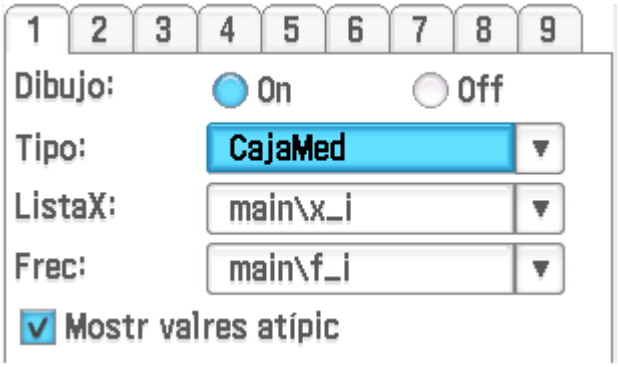


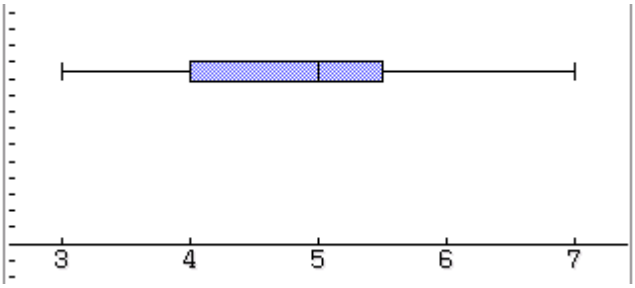


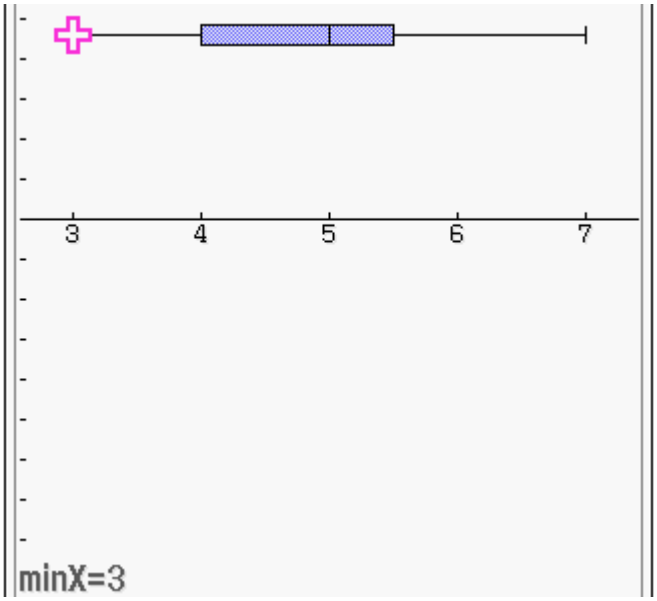
Los **diagramas de cajas Med(MedBox)**, o **diagramas de la media en recuadro** o, a veces más conocidos, **diagramas de cajas y bigotes**, son representaciones gráficas de una distribución estadística unidimensional que reflejan directamente 5 parámetros, e indirectamente el rango. También dan una idea de la simetría, el sesgo y la dispersión de los datos de la distribución permitiendo contrastar conjuntos de datos diferentes de una misma variable.

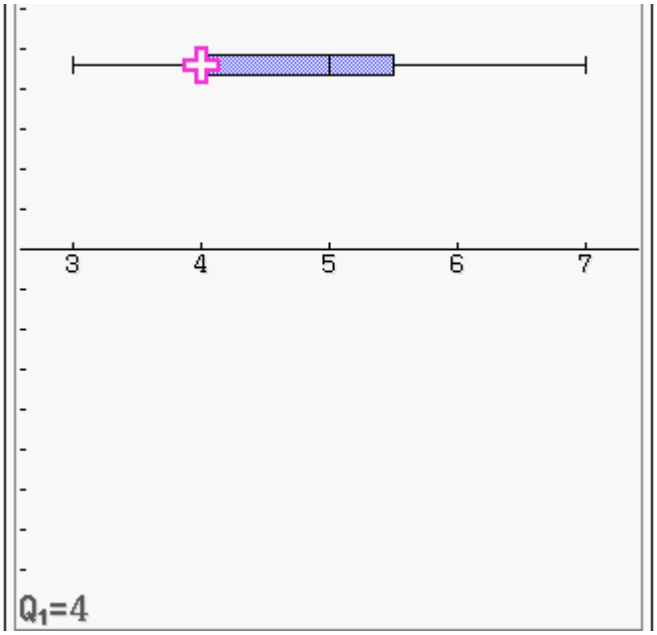


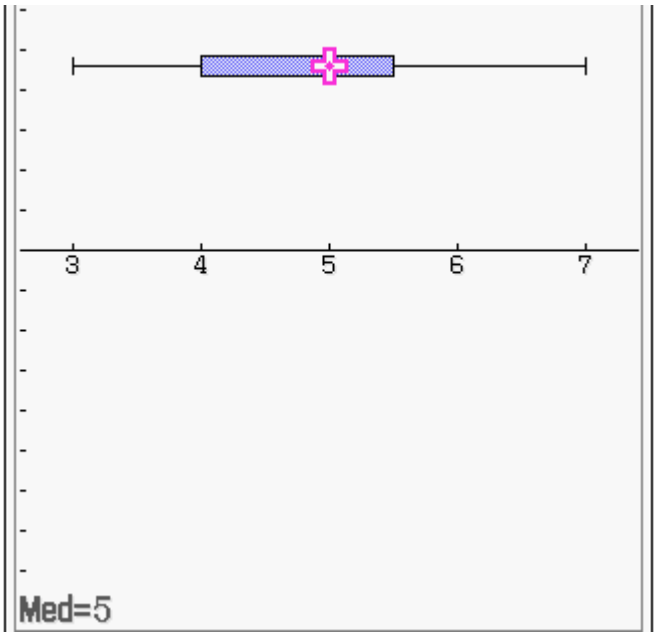
En nuestro caso

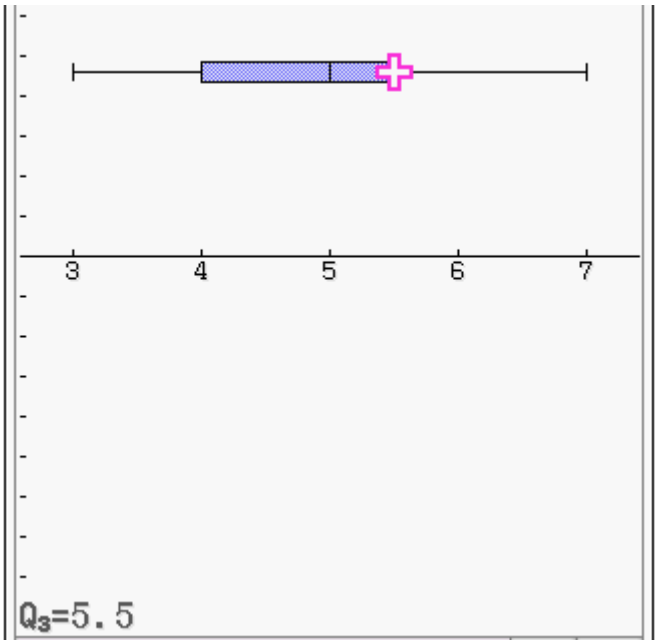


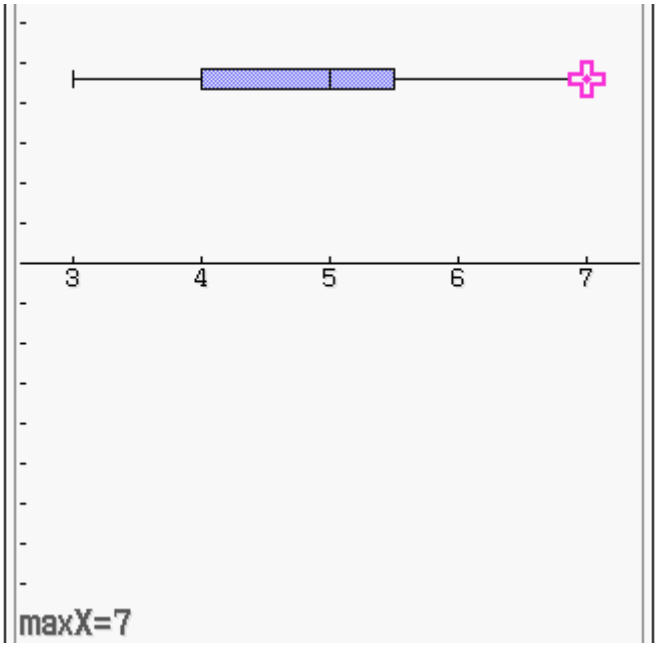

3
4
5
6
7


3
4
5
6
7
minX=3


3
4
5
6
7
Q1=4


3
4
5
6
7
Med=5


3
4
5
6
7
Q3=5.5



ACTIVIDADES

1. A unas oposiciones de auxiliar administrativo se han presentado un total de 1000 aspirantes. Éstos han realizado un primer ejercicio que se ha calificado en una escala entera de 0 a 100 puntos. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Intervalo	x	f
[40,45)	42.5	1
[45,50)	47.5	2
[50,55)	52.5	10
[55,60)	57.5	46
[60,65)	62.5	120
[65,70)	67.5	202
[70,75)	72.5	242
[75,80)	77.5	205
[80,85)	82.5	113
[85,90)	87.5	45
[90,95)	92.5	12
[95,100)	97.5	2

Construir la tabla de frecuencias tal como se ha hecho a lo largo del tema y calcular los valores de las medidas de centralización y de dispersión.

Ensayar todos los gráficos de una distribución unidimensional con estos datos

2. Una zapatería ha vendido en un día 25 pares de zapatos de caballero de las siguientes tallas:

40	41	40	42	40
41	43	43	45	44
45	42	40	41	45
45	44	40	44	41
42	43	43	46	41

Construya una tabla de frecuencias y halle la media aritmética, la moda, la mediana, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

Represente los datos en un diagrama adecuado.

3. El coeficiente de variación de una distribución, *CV*, es el cociente entre la desviación típica y la media aritmética:

La siguiente tabla muestra las calificaciones obtenidas por Paco y Eva en diez controles de matemáticas:

Notas de Paco	4	5	5	4	6	7	8	9	3	9
Notas de Eva	6	6	5	6	7	7	6	5	7	5

a) Halle sus medias y desviaciones típicas. ¿Quién es más regular?

b) Construya los polígonos de frecuencias de ambas distribuciones. ¿Cuál de ellas se ajusta a la de una distribución normal?

4. Las puntuaciones obtenidas por 30 alumnos de 4° de ESO en una prueba de inteligencia han sido

100	102	98	95	92	105	121	110	84	87
94	99	98	112	123	145	116	93	89	85
86	97	114	127	103	104	135	128	109	110

Agrupe los datos en intervalos de clase y construya su tabla de frecuencias absolutas, relativas y porcentuales.

Realice algunos gráficos adecuados.

5. De la distribución de una variable sabemos que el recorrido es 60, y la distribución está dividida en seis intervalos de amplitud constante. Las frecuencias de cada intervalo son, por orden, 7, 11, 15, 10, 5, 2. La media aritmética es 35'2. Una vez hallada la distribución (su tabla de frecuencias), represéntela gráficamente, y hallar los parámetros de centralización y dispersión.

Tema 11.
ESTADÍSTICA BIDIMENSIONAL

- Introducción
- Cálculos estadísticos.
- Representación gráfica de datos estadísticos de dos variables.
- Actividades propuestas

INTRODUCCIÓN

La aplicación Estadística permite realizar diversos cálculos estadísticos y representar gráficamente datos estadísticos de variables bidimensionales.

Además, la calculadora lleva incorporadas funciones de manipulación de listas que permiten generar fácilmente todas las tablas de frecuencias de una distribución estadística bidimensional, así como estudiar la correlación entre variables. También es posible ver los distintos modelos de regresión para ajustar los tipos de correlación.

Con la aplicación Estadística podemos realizar las siguientes operaciones:

- Introducir y ordenar datos de tipo lista.
- Dibujar gráficos estadísticos de dos variables:
    - De dispersión (Disper.)
    - De línea xy (Línea xy)
    - De regresión lineal (RegrLin)
    - Med- Med (MedMed)
    - Regresión cuadrática (RegrCuadr)
    - Regresión cúbica (RegrCúbic)
    - Regresión de orden cuatro (RegrCuart)
    - Regresión logarítmica (RegrLog)
    - Regresión exponencial (RegrExp)
    - Regresión exponencial (RExp. ab)
    - Regresión sinusoidal (RegrSin)
    - Regresión logística (RegrLogis)
    - Regresión potencial (RegrPot)
- Cálculos estadísticos

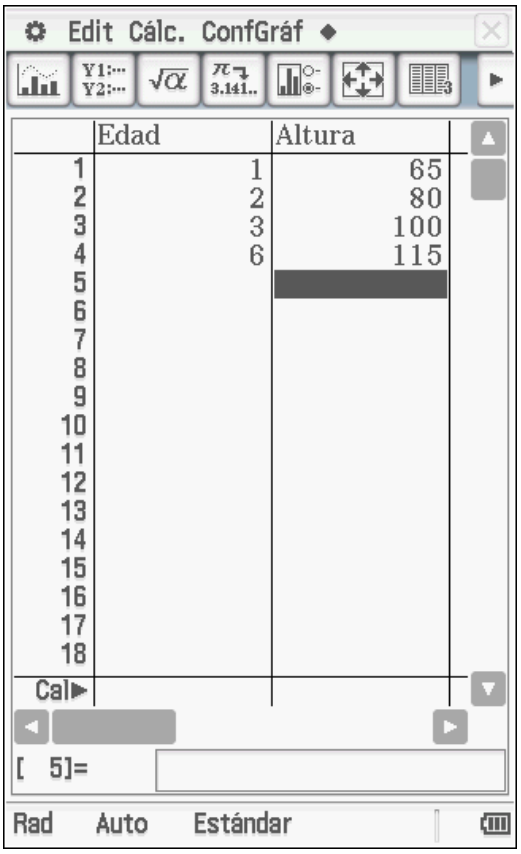
CÁLCULOS ESTADÍSTICOS

Recordemos que para arrancar la aplicación Estadística hay que pulsar **Estadística** en el menú de aplicaciones; con esto se muestra la ventana del editor de listas.

Como ejercicio o ejemplo consideremos la distribución que mide la altura en centímetros de diferentes niños

Años	1	2	3	6
Altura	65	80	100	115

Vamos a crear una tabla de datos (mostramos las pantallas que se obtienen, ya que el proceso es el descrito en el tema de Estadística unidimensional)



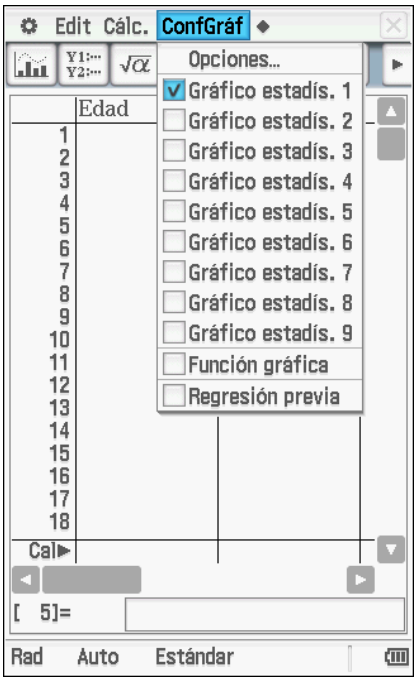
Recordemos que al estudiar distribuciones bidimensionales el objetivo perseguido es determinar si existe relación estadística entre las dos variables consideradas; es decir, ver si los cambios en una de las variables influyen en los cambios de la otra. Cuando sucede ésto, diremos que ambas variables están correlacionadas o que hay correlación entre ellas.

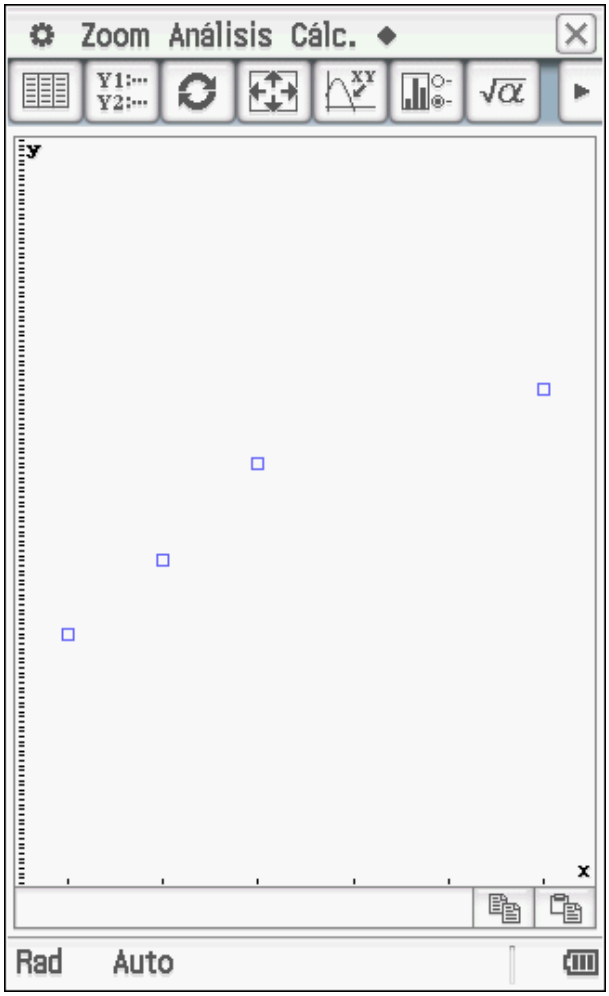
Si las variables crecen conjuntamente, la correlación es directa. Si, por el contrario, al aumentar una de ellas disminuye la otra, la correlación será inversa. La

correlación puede calificarse como fuerte cuando el grado de dependencia es alto; y como débil en caso contrario.

El primer paso para determinar el sentido y el grado de la correlación entre dos variables consiste en representar gráficamente, en el plano cartesiano, los pares de valores. Estos gráficos, que reciben el nombre de diagramas de dispersión, permiten visualizar la posición de los datos en el plano. La forma de la nube de puntos asociada a cada diagrama permite establecer conjeturas sobre la correlación existente entre las variables estudiadas.

Para dibujar nuestra nube de puntos:





La forma de una nube de puntos sugiere qué tipo de correlación se da.

- Una nube estrecha y decreciente indica correlación lineal inversa y fuerte.
- Si la nube no adopta una forma definida no hay correlación o es muy débil.
- Una nube ancha y con tendencia a crecer sugiere una correlación lineal directa y débil.
- Si una nube presenta una forma clara pero no rectilínea, la correlación no es lineal, quizá sea exponencial o parabólica.

En general, dependiendo de la forma de la nube de puntos, puede asegurarse:

- Una nube de puntos alargada indica correlación lineal: los puntos se dsitribuyen en torno a una línea recta. La estrechez de la nube expresa que la correlación es fuerte.
- Si la recta que se ajusta a la nube tiene pendiente positiva, la correlación será directa: al crecer la variable X lo hace también la variable Y.
- Una recta con pendiente negativa indica que la correlación es inversa, al crecer X disminuye Y.

En nuestro ejemplo, la nube es alargada lo que indica que hay correlación lineal, en principio; además es directa y parece que fiuerte.

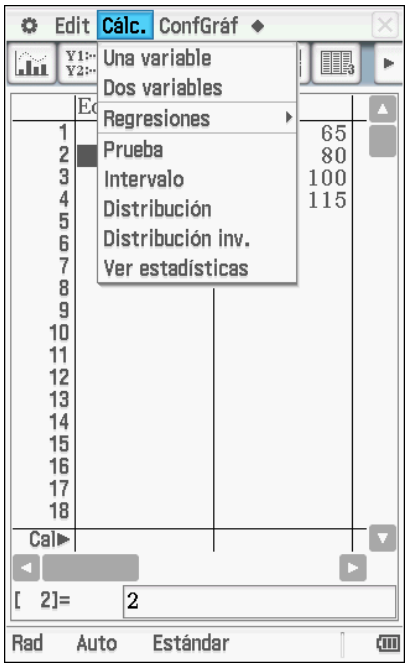
Por otra parte, los datos marginales (datos correspondientes a cada una de las variables) permiten el cálculo de los parámetros marginales de cada una de las variables.

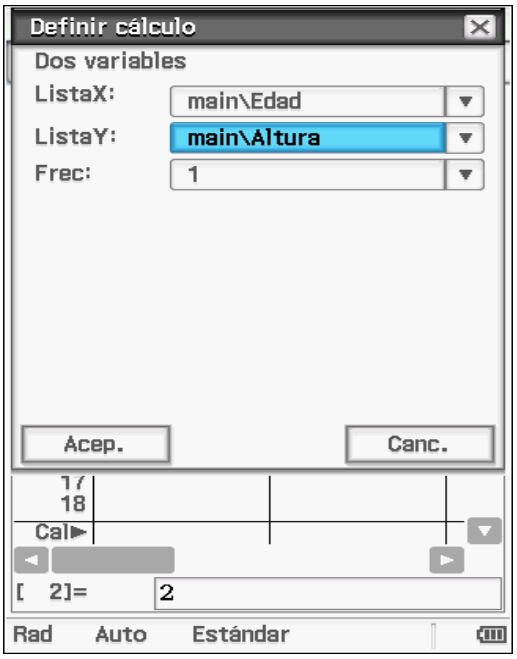
Para ver los resultados de cálculo de dos variables:

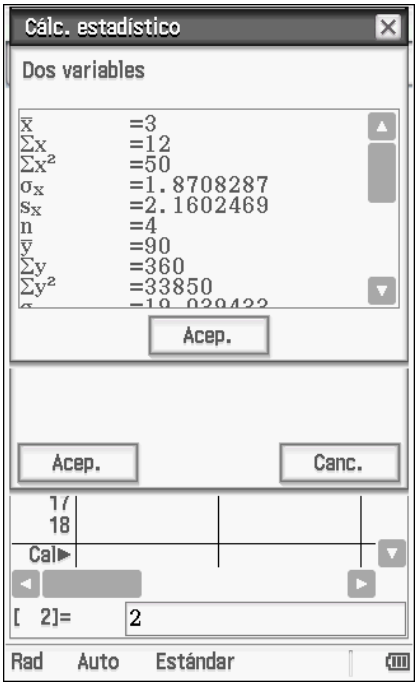
(1) En la barra de menús, toque **[Cálc]** y luego **[Dos Variables].**

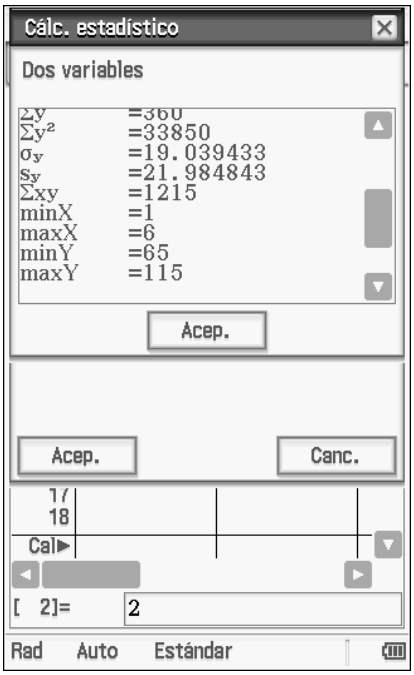
(2) En el cuadro de diálogo que aparece, especifique el nombre **[ListaX]** y el nombre **[ListaY].**

(3) Pulse **[Acep.]**









Obsérvese que no aparece ningún parámetro estadístico conjunto como la covarianza, que recordemos es la media aritmética de los productos de las diferencias de los valores de cada variable respecto de su media marginal; esto no tiene importancia ya que se puede calcular con los datos anteriores, y sobre todo porque la covarianza no da una medida objetiva (comparable) de la correlación entre variables.

El criterio que se utiliza para medir la fuerza de la correlación entre dos variables es el coeficiente de correlación lineal, r que es la razón entre la covarianza de las variables X e Y y el producto de sus desviaciones típicas marginales. Recordemos alguna de sus propiedades fundamentales:

- El valor de r no cambia al hacerlo la escala de medición.
- Si r>o, la correlación es directa.
- Si r<0, la correlación es inversa.
- El valor de r está entre -1 y +1.
- Si r toma valores cercanos a -1 la correlación es fuerte (e inversa).
- Si r toma valores cercanos a +1 la correlación es fuerte (y directa).
- Si |r|=1, la correlación es perfecta. Hay dependencia lineal entre las variables X e Y.
- Si r toma valores cercanos a 0, la correlación es débil.

Este coeficiente lo calcularemos con la calculadora más adelante.

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS DE DOS VARIABLES

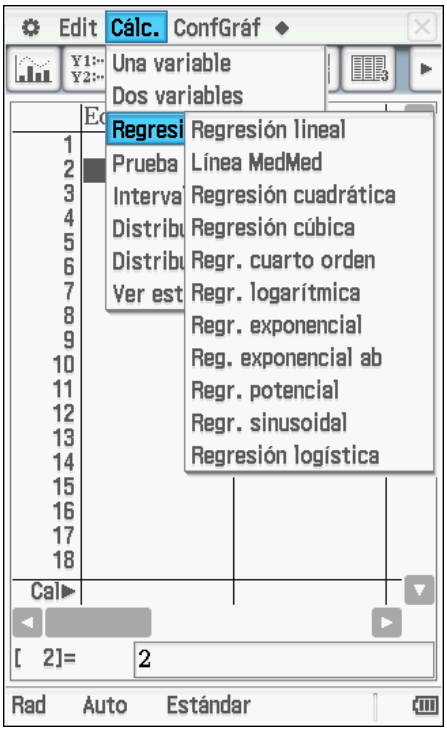
Para sacar el máximo provecho a la correlación vamos a hallar qué recta es la que mejor se ajusta a la nube de puntos; esta recta nos permitirá calcular qué valor de Y es el que cabe esperar para un valor conocido de X. O sea, podemos hacer estimaciones de una variable a partir de la otra.

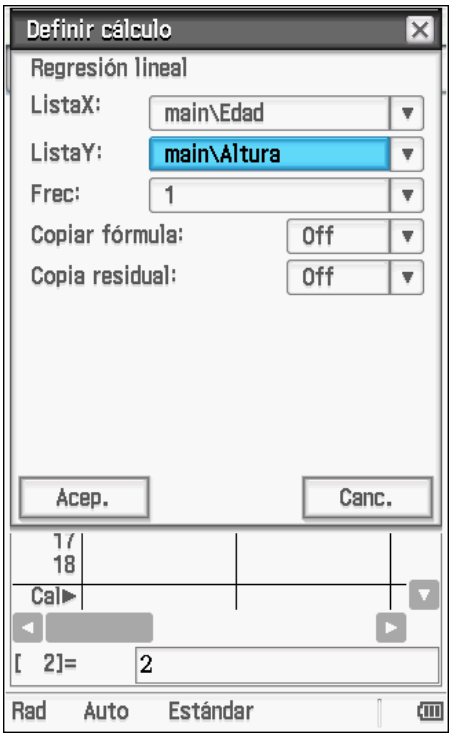
La recta de regresión es la que mejor se ajusta a la nube de puntos. Es una recta que asignaría a cada valor x de X el promedio de los y correspondientes a x. Pero además de la regresión lineal hay otros modelos de regresión (como hemos enumerado al principio).

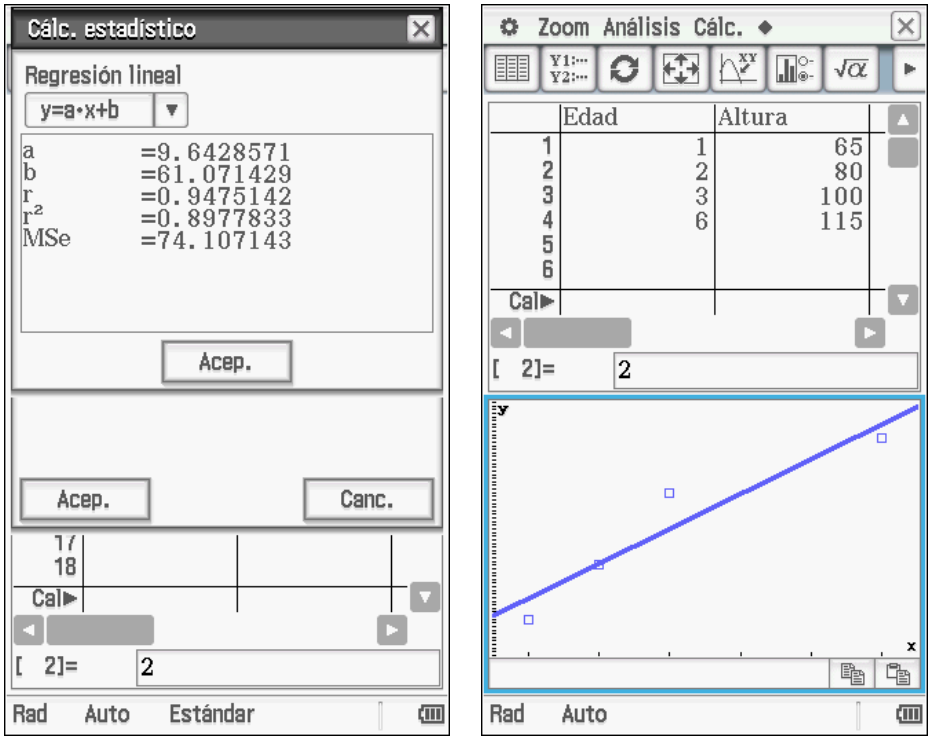
La regresión lineal utiliza el método de mínimos cuadrados para determinar la ecuación que se ajusta a sus puntos de datos, y devuelve valores para la pendiente y la intersección con el eje OY. La representación gráfica de esta relación es un gráfico de regresión lineal.

Para obtenerlo:

Desde la ventana de listas o del gráfico de regresión pulse **[Cálc.], [Regresiones],[Regresión lineal]**







Obsérvese que aparece por primera vez el coeficiente de correlación lineal; al ser cercano a +1 la correlación es fuerte y directa.

El modelo de regresión lineal tiene el siguiente significado:

a: Coeficiente de la regresión (pendiente).

b: Corte con el eje Y (término constante de la regresión).

r: Coeficiente de correlación.

r^2 : Coeficiente de determinación.

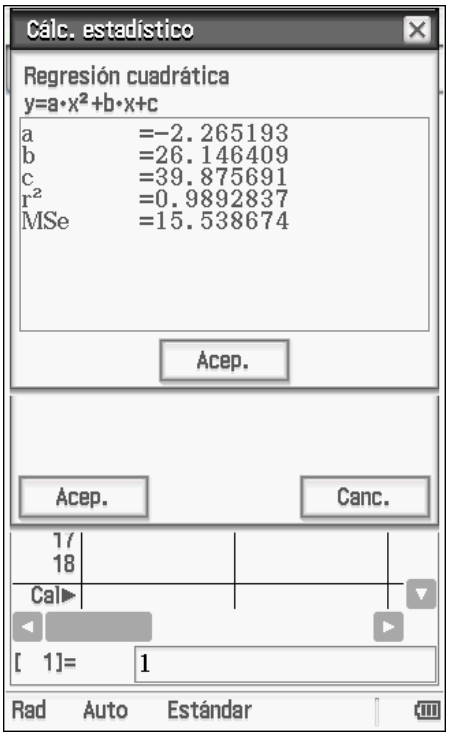
Mse: Error cuadrático medio.

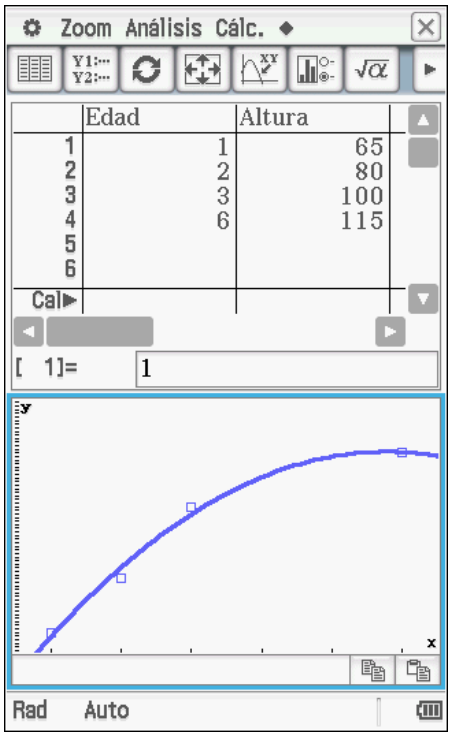
$$MSe = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - (a \cdot x_i + b))^2$$

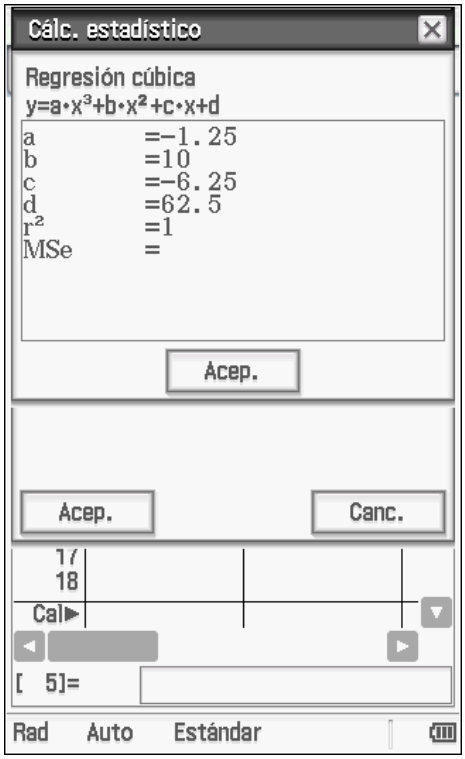
Regresión cuadrática y cúbica.

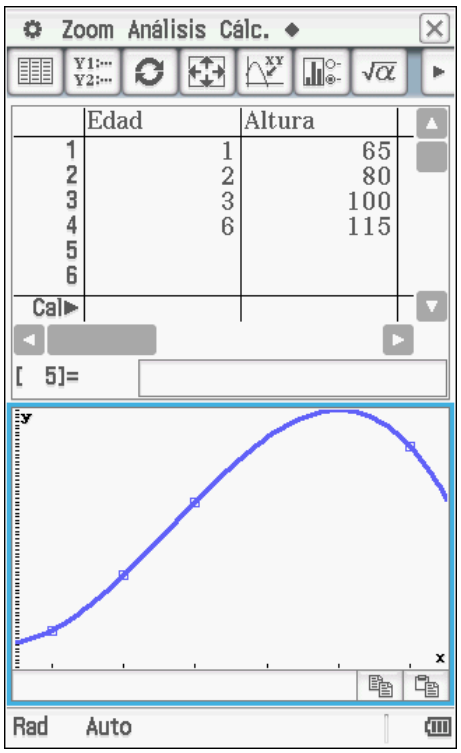
Se puede dibujar un gráfico de regresión cuadrática, cúbica basado en los puntos trazados. Estos gráficos utilizan el método de mínimos cuadrados para dibujar una curva que pase por tantos puntos de datos como sea posible. Estos gráficos pueden expresarse como expresiones de regresión cuadrática, cúbica y de orden cuatro. Para obtenerlos:

Desde la ventana de listas o del gráfico de regresión pulse **[Cálc.]**, **[Regresiones]**,**[Regresión cuadrática (cúbica)]**.









Se pueden ensayar todavía algunas regresiones más, pero el procedimiento es el mismo en todos los casos.

Vamos a dejar el ejemplo que nos ha servido de guía y vamos a ver un tipo de ***regresión especial.***

Cuando sospeche que los datos contienen valores extremos, deberá utilizar el gráfico Med-Med (que se basa en las medianas), en lugar del gráfico de regresión lineal. El gráfico Med-Med es similar al gráfico de regresión lineal, pero también minimiza los efectos de los valores extremos.

Consideremos el siguiente ejemplo

La siguiente tabla recoge las puntuaciones obtenidas en un test sobre visión espacial (T) y sus correspondientes calificaciones en la asignatura de Dibujo (D):

T	14	54	40	66	70	60	58	63	60
D	9	3	2	6	8	4	3	7	4

Observe este dato. Introduzca los valores en sendas tablas y dibuje la nube de puntos correspondiente; estudie si la recta de regresión es idónea y si no lo es siga los pasos:

Desde la ventana de gráficos o listas:

Pulse **[Cálc][Línea MedMed].**

ACTIVIDADES.

1. Introducir los datos de dos variables mostrados a continuación. Después trace un diagrama de dispersión de los datos y luego conecte los puntos para producir un gráfico de línea xy.

List1	0’5	1’2	2’4	4’0	5’2
List2	–2’1	0’3	1’5	2’0	2’4

2. Introducir los datos de dos variables mostrados a continuación y trace un diagrama de dispersión de los datos. A continuación, realizar una regresión logarítmica de los datos para ver los parámetros de regresión, y luego dibujar el gráfico de regresión.

List1	0’5	1’2	2’4	4’0	5’2
List2	–2’1	0’3	1’5	2’0	2’4

3. En el ejercicio anterior dibuje el gráfico de regresión sin realizar el cálculo de regresión.
4. En una competición de patinaje artístico por parejas se otorgan dos notas: una a los ejercicios obligatorios (X) y otra a los ejercicios libres (Y).

   Las seis parejas que se disputan la final han obtenido los siguientes resultados:

X	5	5	6	7	7	7
Y	5	7	7	7	7	8

   a) ¿Qué tipo de correlación hay entre las variables?
   b) Dibuje la nube de puntos.
   c) Calcule el coeficiente de regresión.
   d) Ensaye los diferentes tipos de regresión que hemos visto en el tema.

Tema 12.
PROBABILIDAD. DISTRIBUCIONES ESTADÍSTICAS. INFERENCIA ESTADÍSITICA

- Introducción
- Cálculo de probabilidades
- Distribuciones de probabilidad binomial y normal
- Intervalos de confianza
- Contraste de hipótesis
- Actividades propuestas

INTRODUCCIÓN

En este tema expondremos las distintas opciones que la calculadora ofrece para el cálculo de probabilidades.

En la segunda parte se ofrecen herramientas para calcular probabilidades de una variable aleatoria que sigue una distribución de probabilidad discreta: binomial, y otra que sigue una distribución de probabilidad continua: normal.

Y en la tercera parte abordaremos los temas de inferencia estadística: intervalos de confianza y contraste de hipótesis.

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

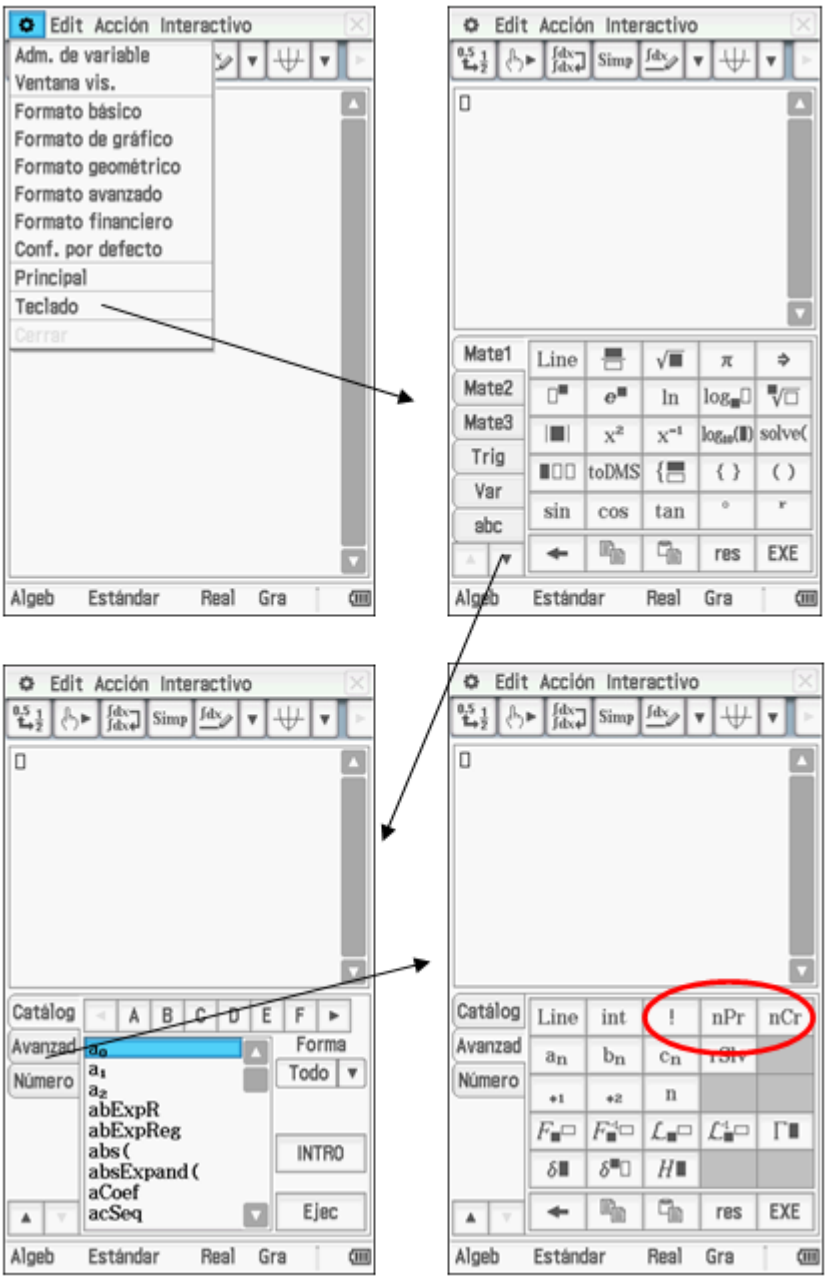
Las calculadoras gráficas facilitan los cálculos para abordar problemas de recuento y probabilidad. Además se puede realizar simulaciones de experimentos aleatorios, ayudando de esta manera a entender mejor las leyes de los grandes números y el concepto de probabilidad.

Ante un problema de recuento o de probabilidad, el alumnado deberá plantear la situación y decidir las mejores estrategias y técnicas. La calculadora le ayudará a comprobar resultados y, lógicamente, le proporcionará herramientas para el cálculo, no sólo aritméticas sino otras que ya vienen implementadas y que servirán de atajo para muchos procedimientos.

Combinatoria. Técnicas de recuento.

Las técnicas de recuento permiten resolver problemas que contienen cuestiones del tipo ¿cuántas cosas, de un cierto tipo, hay?, ¿de cuántas maneras podemos escoger…? En este tipo de problemas cada uno de los resultados posibles recibe el nombre de configuración.

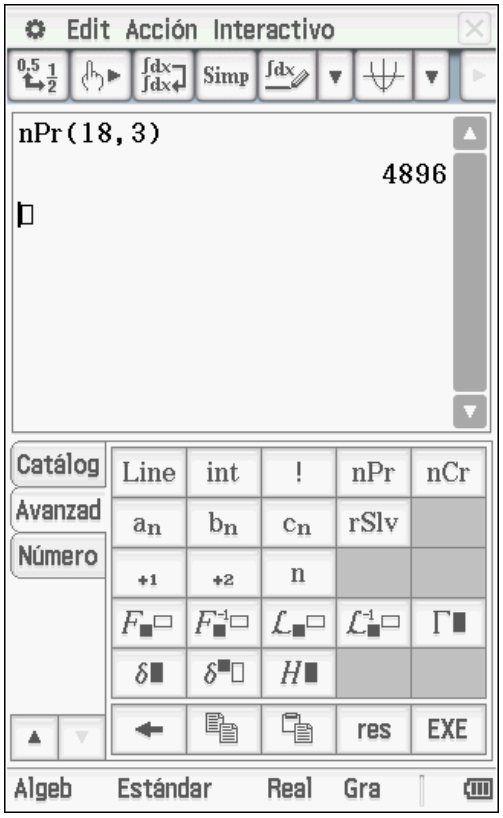
Las calculadoras gráficas disponen de herramientas para realizar los cálculos que intervienen en los problemas de técnicas de recuento. En la calculadora gráfica ClassPad 400 las teclas, combinaciones de teclas y herramientas son: **!, nPr, nCr** que pueden verse en el teclado virtual siguiente:



Variaciones.

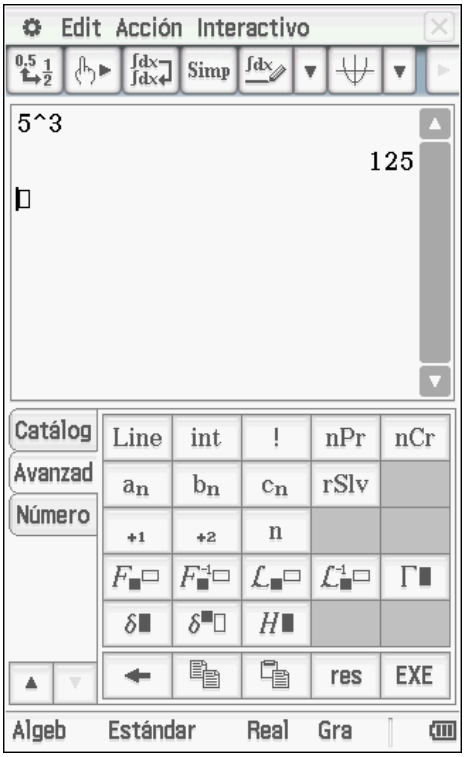
Ejemplo 1. En una comunidad de 18 vecinos, ¿de cuántas maneras pueden elegirse al presidente, al tesorero y al vocal si un vecino no puede tener más de un cargo)?

Importa el orden porque los cargos son diferentes; no se pueden repetir porque un vecino no puede tener más de un cargo; no intervienen todos los elementos en las configuraciones, puesto que hay 18 vecinos y sólo seleccionamos 3. Se trata de variaciones ordinarias de 18 elementos tomados de 3 en 3.



Ejemplo 2. ¿Cuántos números de tres cifras hay, de modo que las tres cifras sean impares?

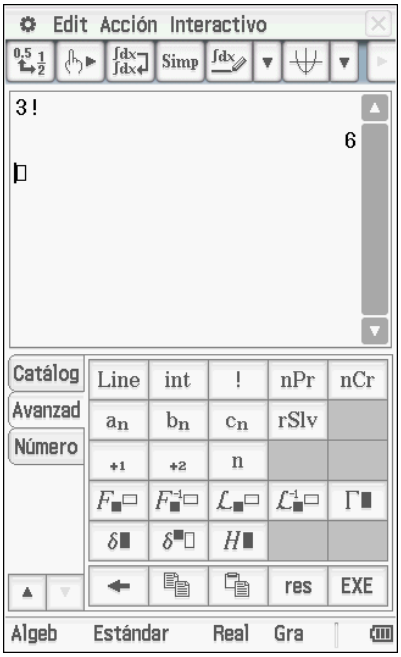
Para formar uno de tres de estos números hemos de escoger tres cifras entre 1, 3, 5, y 7, de manera que importa el orden y que pueden aparecer elementos repetidos. Se tratan por tanto de calcular las variaciones con repetición de cinco elementos tomados de 3 en 3.



Permutaciones

Ejemplo 3. Diana tiene hilo de algodón de tres colores: rojo, azul y negro. ¿Cuántas camisetas diferentes de tres franjas horizontales de distinto color puede confeccionar?

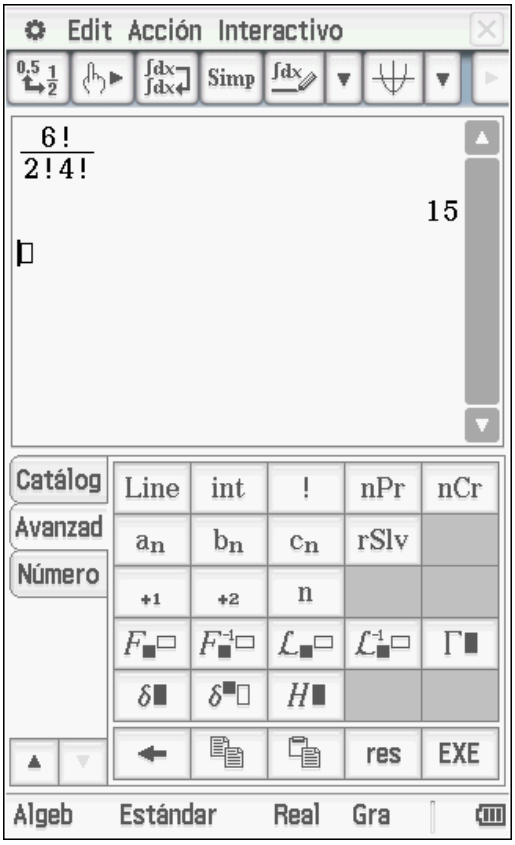
Importa el orden, porque dos camisetas se diferencian sólo por el orden en el que aparecen los colores; no se pueden repetir los elementos e intervienen todos en todas las configuraciones. Se trata, pues, de permutaciones de 3 elementos.



Ejemplo 4. En un código secreto, las diversas letras se obtienen combinando los signos • (punto) y – (raya). ¿Cuántas letras diferentes podemos obtener utilizando dos puntos y cuatro rayas?

Las diversas letras son las ordenaciones de seis signos, de los que 2 son iguales entre ellos (2 puntos) y 4 son iguales entre ellos (4 rayas) y diferentes de los anteriores.

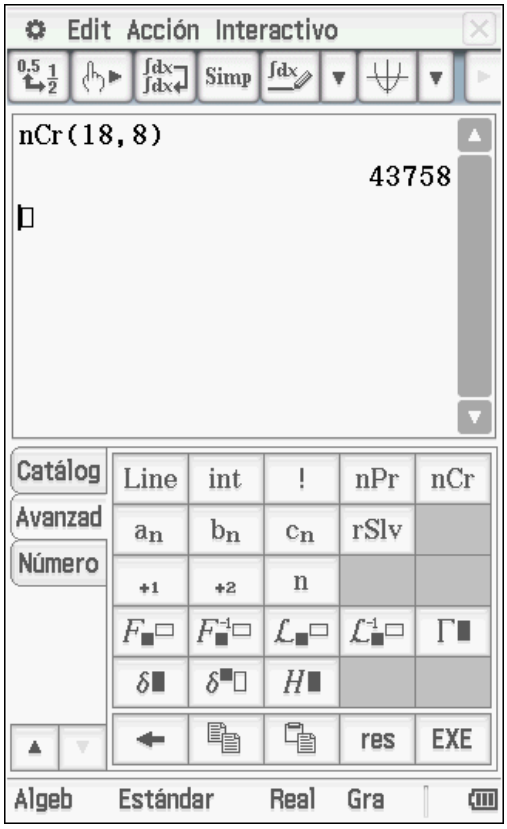
Tenemos que contar, pues, las permutaciones con repetición de 6 elementos del tipo 2, 4.



Combinaciones

Ejemplo 5. Si en la comunidad de vecinos del ejemplo 1 es necesario formar una comisión de ocho vecinos cualesquiera para resolver un determinado problema, ¿de cuántas maneras se puede hacer?

No importa el orden de colocación de los elementos porque no hay distinción de cargos; no se pueden repetir los elementos, ya que tienen que ser ocho vecinos diferentes. Se trata de combinaciones ordinarias de 18 elementos tomados de 8 en 8.

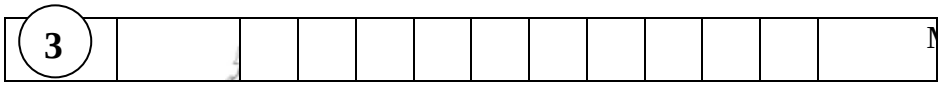


El azar. Simulaciones.

Vamos a ver que sin grandes conocimientos matemáticos y con una calculadora gráfica como la ClassPad 400 podemos resolver problemas o cuestiones relacionadas con el azar. La simulación de la realización de una experiencia nos proporciona los resultados un número elevado de veces con lo que podremos sacar conclusiones que serán suficientes.

Ejemplo 1. La carrera de caballos.

Este juego aparece en muchos libros de texto utilizando todo tipo de elementos: caballos, coches, tortugas, etc. La versión más conocida utiliza la suma de dados. Se necesita un tablero con números (que serán los dorsales) del 0 al 12 (después cada uno tendrá que elegir los correctos). Una de las filas del tablero puede construirse de esta forma:



Además, dos dados con caras enumeradas del 1 al 6 y 12 fichas. Vamos a considerar que juegan a lo sumo 6 jugadores.

Cada jugador elige un caballo y coloca su ficha en el número correspondiente. No puede haber dos jugadores con el mismo caballo. Si no se ponen de acuerdo se lanzan primero los dos dados y eligen según la puntuación que hayan sacado. Cada jugador puede elegir dos caballos para evitar que salga una suma que nadie ha elegido y para que la partida sea más dinámica. Por turno, cada jugador lanza los dos dados y suma los números que salen. El caballo cuyo dorsal coincide con esa suma avanza una casilla (aunque no sea el del jugador que ha lanzado los dados). Gana la partida el jugador cuyo caballo llega primero a la meta.

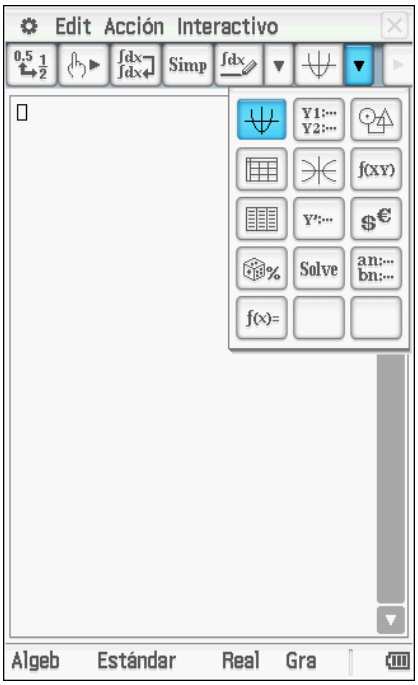
Se plantan las siguientes cuestiones: ¿Es igual apostar por cualquier caballo?, si se repiten las partidas, ¿se mantendrá siempre la apuesta por el mismo caballo?, o ¿hay algún caballo que parece que tiene más garantías de éxito?

Vamos a utilizar la calculadora ClassPad para simular un determinado número de carreras.

Entramos en el menú 

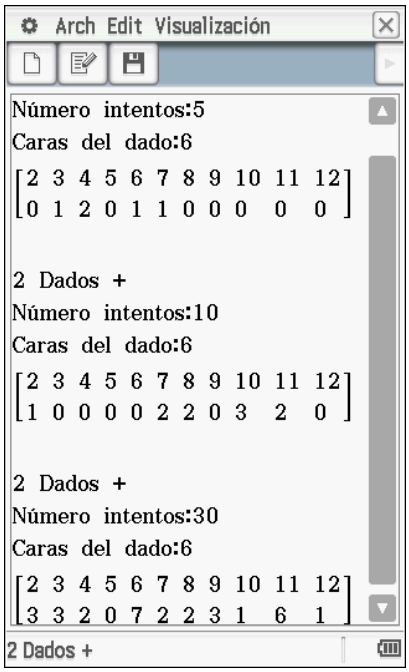
.

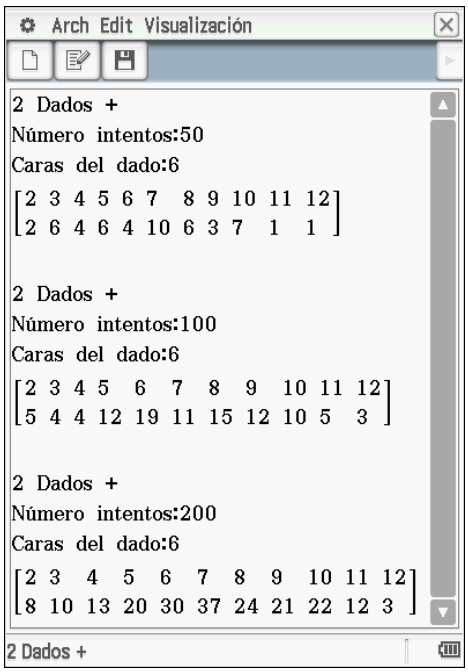
Elegimos la opción *Probabilidad.*



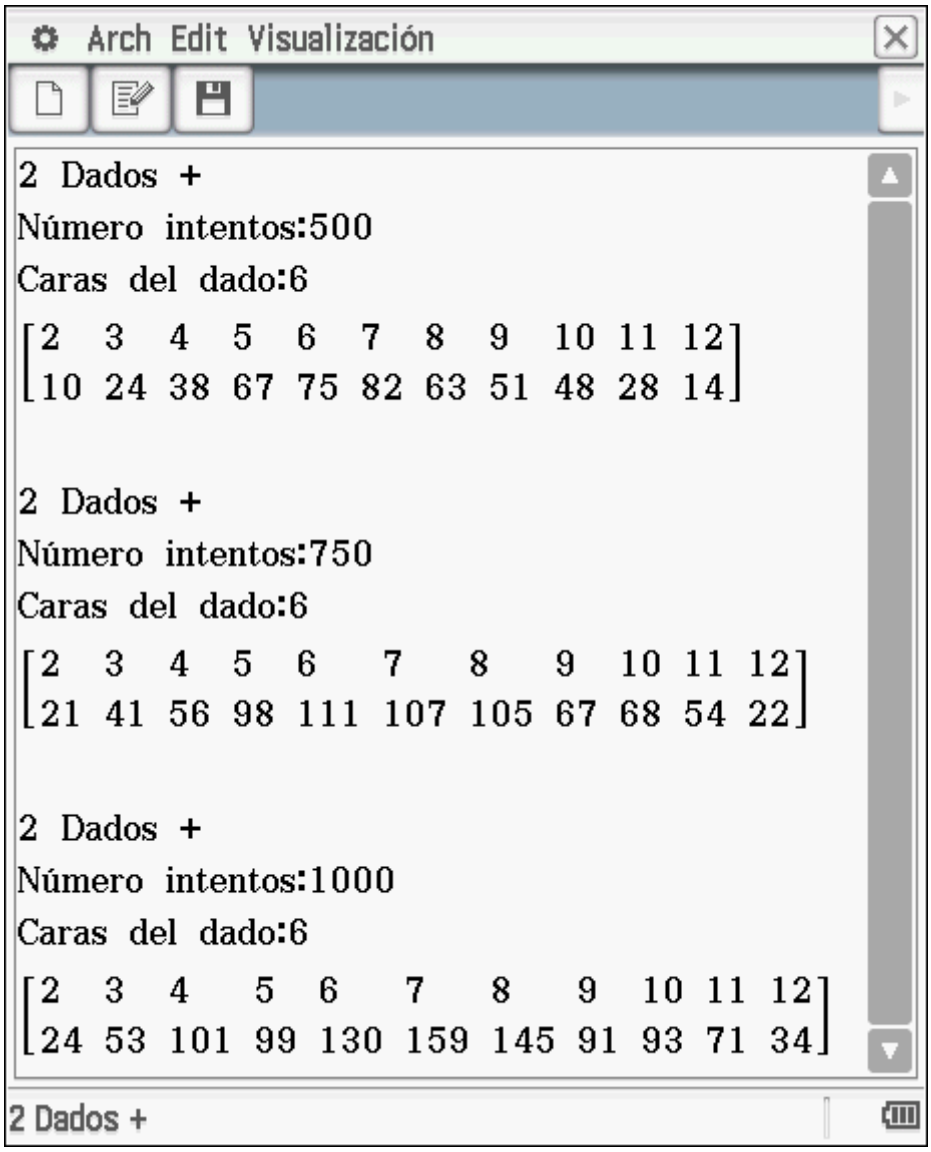
(la casilla que contiene un dado, )

Para simular estas carreras elegimos la opción “2 dados +” y vamos cambiando el número de intentos. Así, si jugamos 5, 10, 30, 50, 100 o 200 partidas obtenemos:





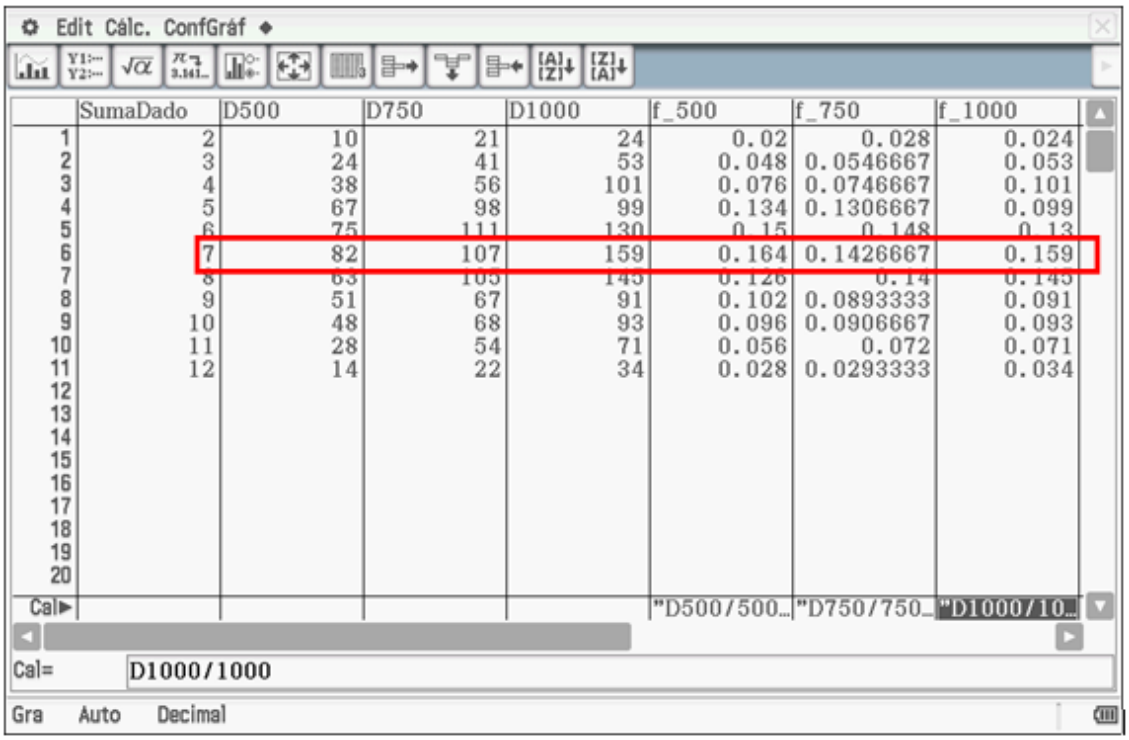
Si fueran 500, 750 o 1000 partidas:



Ahora vamos a construir una tabla de frecuencias (véase el tema de estadística unidimensional). La primera columna contiene los resultados de la suma de los dados, la segunda, el número de veces que sale cada suma en 500 jugadas, la tercera, en 750 jugadas y la cuarta, en 1000 jugadas.

f_500, f_750 y f_1000 son las frecuencias relativas correspondientes.

Podemos observar el resultado conocido como ley de los grandes números que regula el comportamiento del azar y según la cual, al aumentar el número de realizaciones de un experimento aleatorio, la frecuencia relativa de cada uno de los resultados tiende a aproximarse a un determinado valor que es su probabilidad.



	SumaDado	D500	D750	D1000	f_500	f_750	f_1000
1	2	10	21	24	0.02	0.028	0.024
2	3	24	41	53	0.048	0.0546667	0.053
3	4	38	56	101	0.076	0.0746667	0.101
4	5	67	98	99	0.134	0.1306667	0.099
5	6	75	111	130	0.15	0.148	0.13
6	7	82	107	159	0.164	0.1426667	0.159
7	8	63	105	145	0.126	0.14	0.145
8	9	51	67	91	0.102	0.0893333	0.091
9	10	48	68	93	0.096	0.0906667	0.093
10	11	28	54	71	0.056	0.072	0.071
11	12	14	22	34	0.028	0.0293333	0.034
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
Cal▶					"D500/500…	"D750/750…	"D1000/10…

Obsérvese como el número 7 es el que más se repite

7	82	107	159	0.164	0.1426667	0.159

Su frecuencia se ve estabilizando en torno a 0’16, que sería una aproximación de su probabilidad con lo que ya podríamos contestar a las cuestiones planteadas al principio del juego.

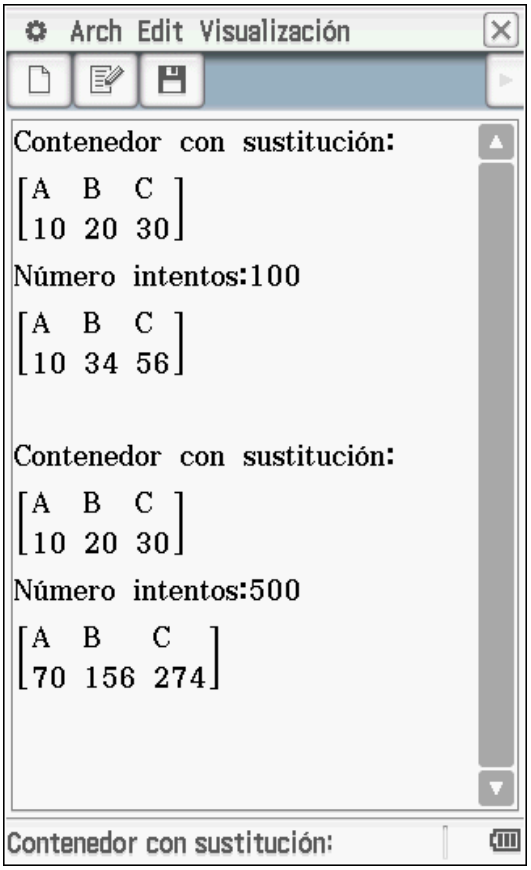
Ejemplo 2. Extracción de bolas de una urna.

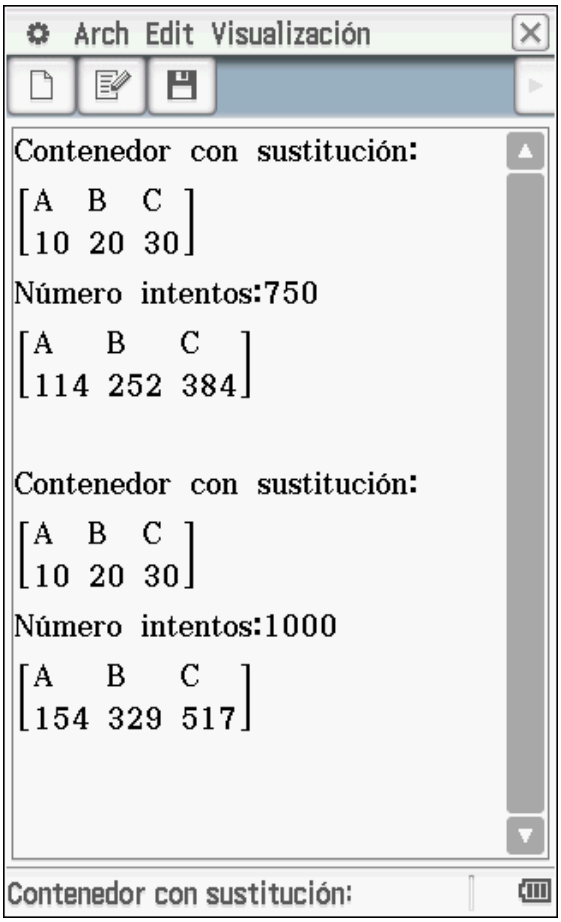
Colocamos en una urna 10 bolas del tipo A, 20 del tipo B y 30 del tipo C. Para comprobar mediante una simulación que la probabilidad de extraer bola del tipo C se acerca a 0’5 (30 de 60 bolas son del tipo C) procedemos como se indica a continuación.

En la pantalla que ya vimos en el ejemplo1, seleccionamos contenedor.

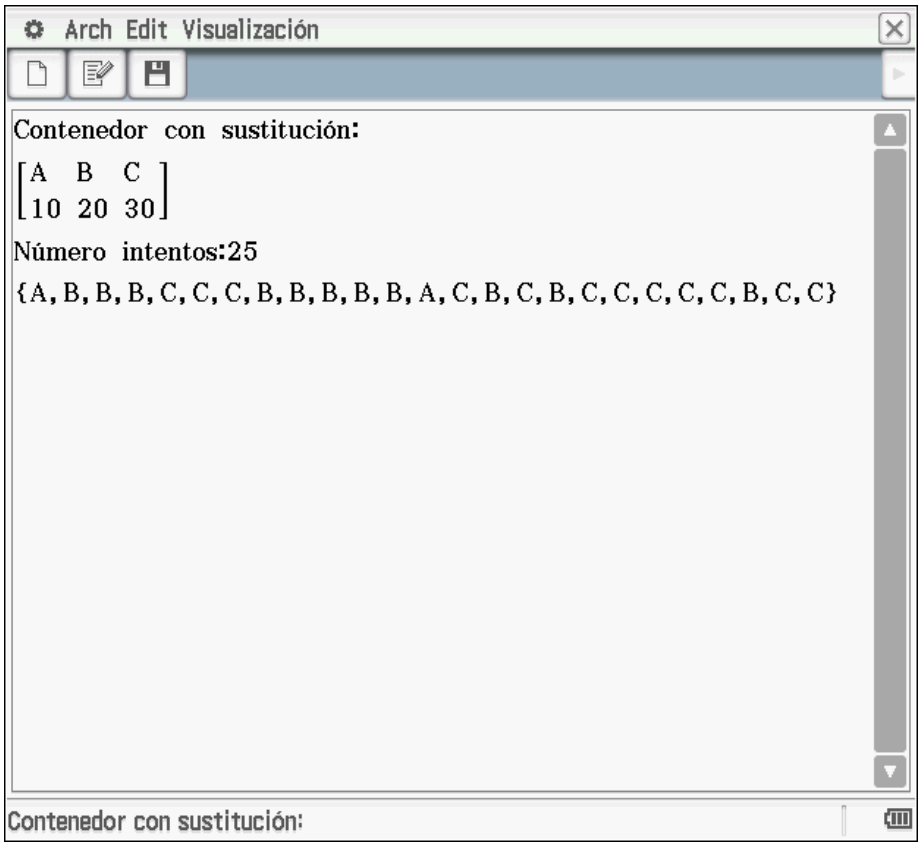
Ahora ponemos los datos en A, B y C. Seleccionamos también la opción *Sustituir* para indicar que se volverá a colocar la bola una vez extraída.

Vamos a simular 100, 500, 750 y 1000 intentos.





Observación: Podemos ver cómo van siendo los resultados uno a uno; para ello se selecciona *Visualización->Datos muestra* en la barra de menús:



Ejemplo 3. Cómo comprobar con simulaciones un problema de probabilidad.

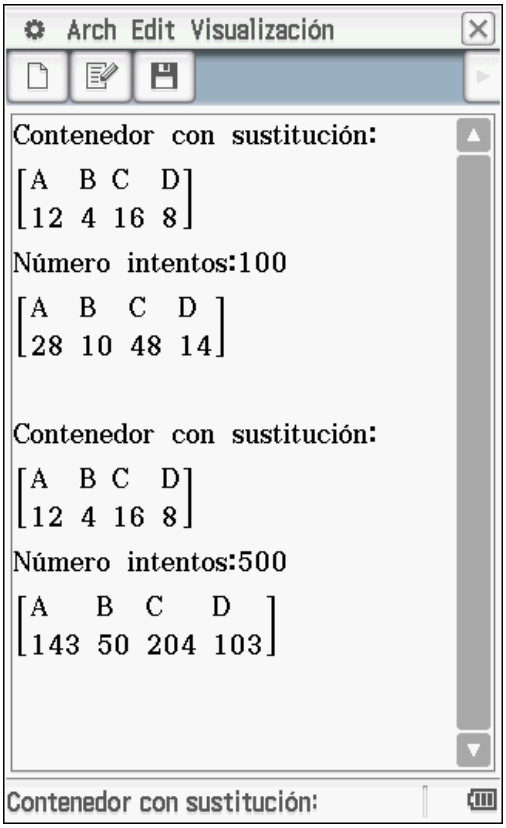
Consideremos el siguiente enunciado:

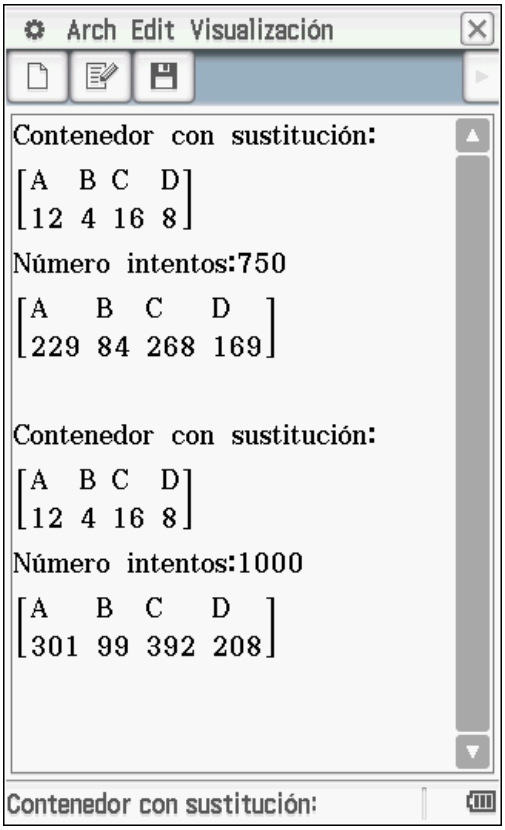
Un juego con la baraja española de 40 cartas solo distingue estas posibilidades: FIGURA (sota, caballo o rey), AS, MENOR QUE 6 (2, 3, 4,5), MAYOR QUE 5 (6, 7). Calcula la probabilidad en cada caso.

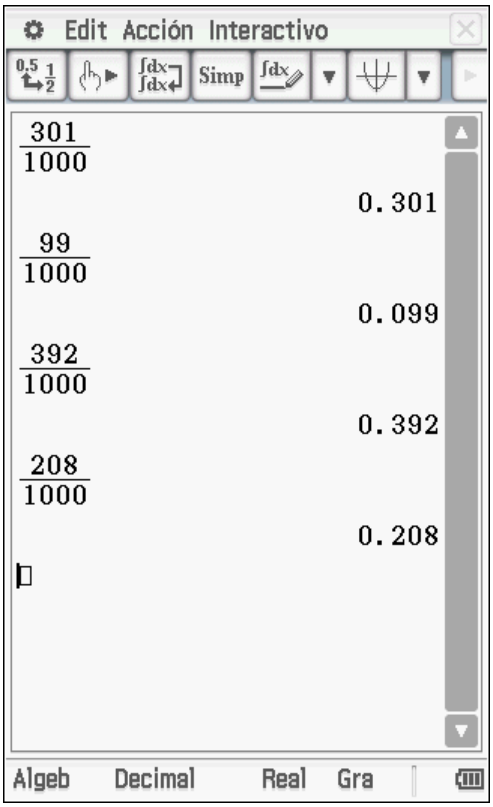
Desarrollo: Hay 40 cartas, por lo que la probabilidad de cada una es $\frac{4}{40}$. Hay 3 figuras en cada palo, por tanto hay 12 figuras con probabilidad 0’3. Hay 4 ases en la baraja con probabilidad 0’1. Hay 4 números menores que 6 en cada palo, por lo que son 16 con probabilidad 0’4. Hay 2 números mayores que 5 en cada palo, por lo que son 8 con probabilidad 0’2.

Simulación con la calculadora: Llamemos A al tipo de cartas FIGURA, B al tipo AS, C al tipo MENOR QUE 6, y D al tipo MAYOR QUE 5.

Hacemos 100, 500, 750 y 1000 extracciones de cartas y después calculamos las frecuencias para 1000 casos.







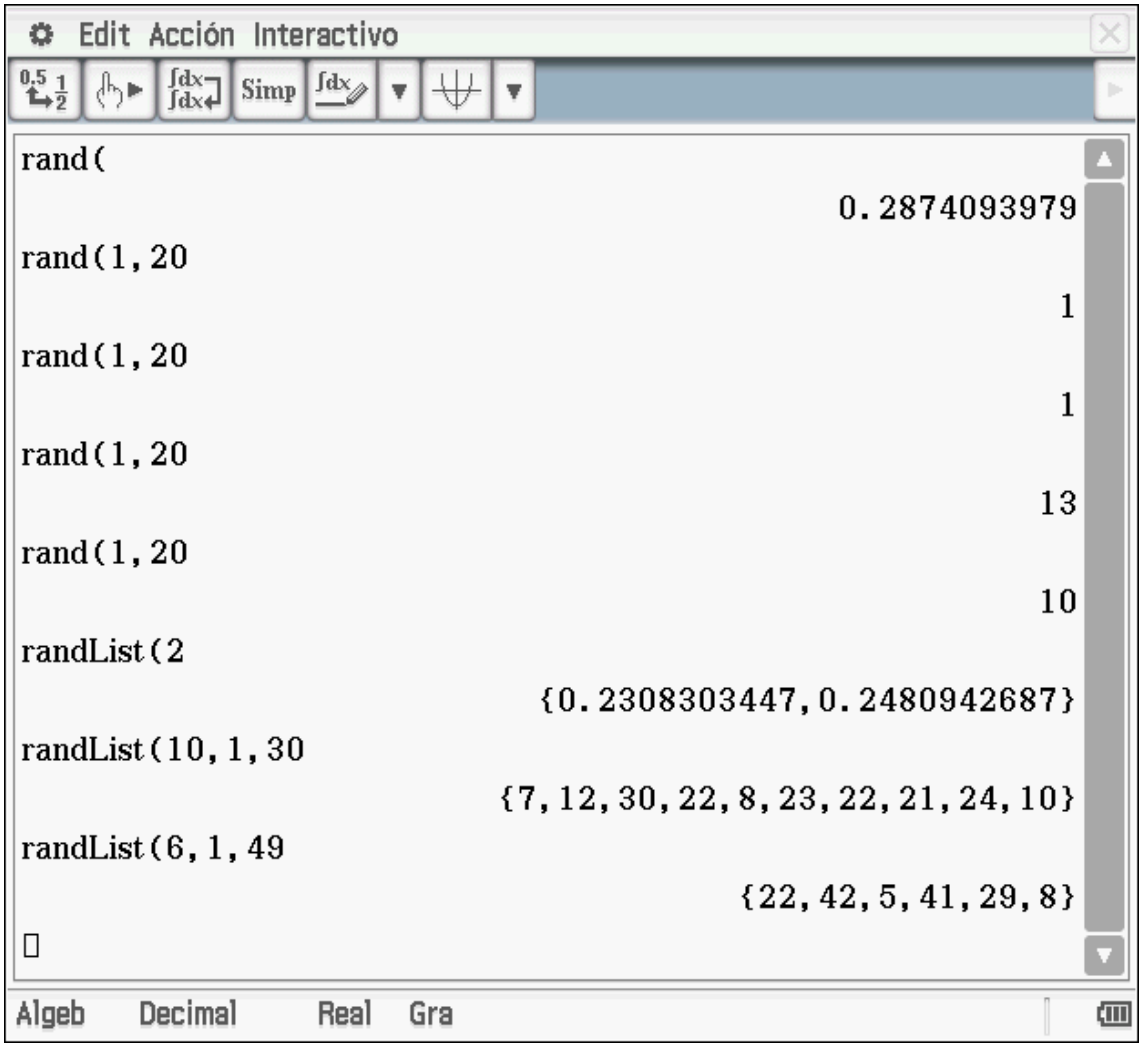
Puede comprobarse que están muy cercanas a las probabilidades teóricas.

Tabla de números aleatorios

Una tabla de números aleatorios es una sucesión de dígitos generados al azar por diversos métodos, como lanzamientos de monedas, dados, ruletas, simulaciones, calculadora u ordenador. Se anotan los resultados y se confecciona una lista. La más habitual es la que contiene números entre 0 y 9. Para usarla nos situamos en un lugar cualquiera de la tabla y elegimos al azar una dirección para desplazarnos. A partir de ahí, se van leyendo los resultados y se realizan las simulaciones pertinentes.

Pero con las calculadoras gráficas como ClassPad podemos disponer de cuantos números aleatorios queramos y con determinadas cifras y condiciones.

En la opción *cat* del teclado *Keyboard*, podemos ver las opciones rand (y radnList (cuyo significado podemos ver en las siguientes pantallas).

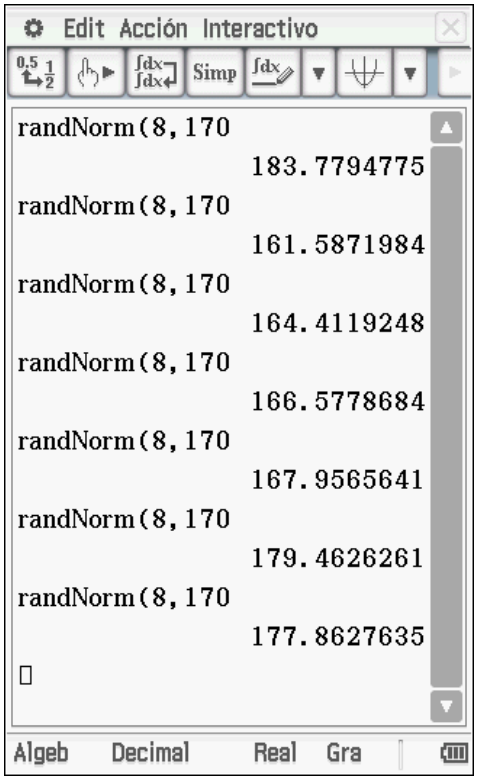


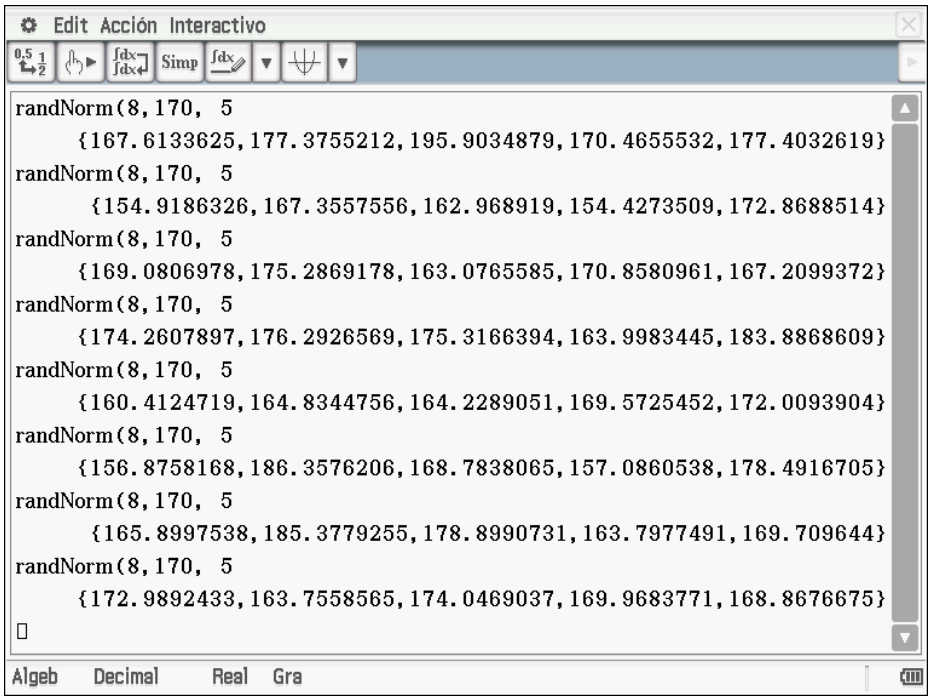
El penúltimo ejemplo muestra 10 números aleatorios naturales entre 1 y 30.

En la última línea puede observarse como conseguir una combinación de la lotería primitiva.

La función **randNorm** genera un número aleatorio normal de 10 dígitos basado en un valor medio especificado por σ y unos valores de desviación estándar μ.

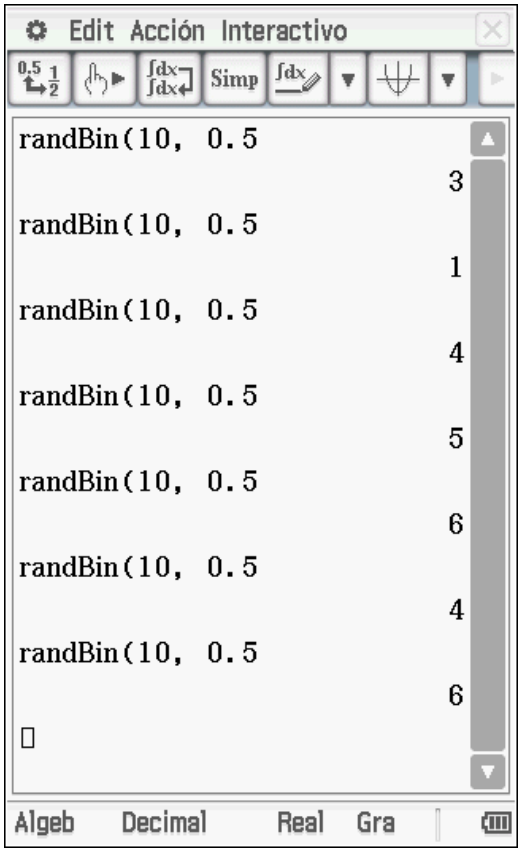
Ejemplo: La estatura del alumnado de una clase se distribuye según una distribución normal de media 170 cm y una desviación de 8.

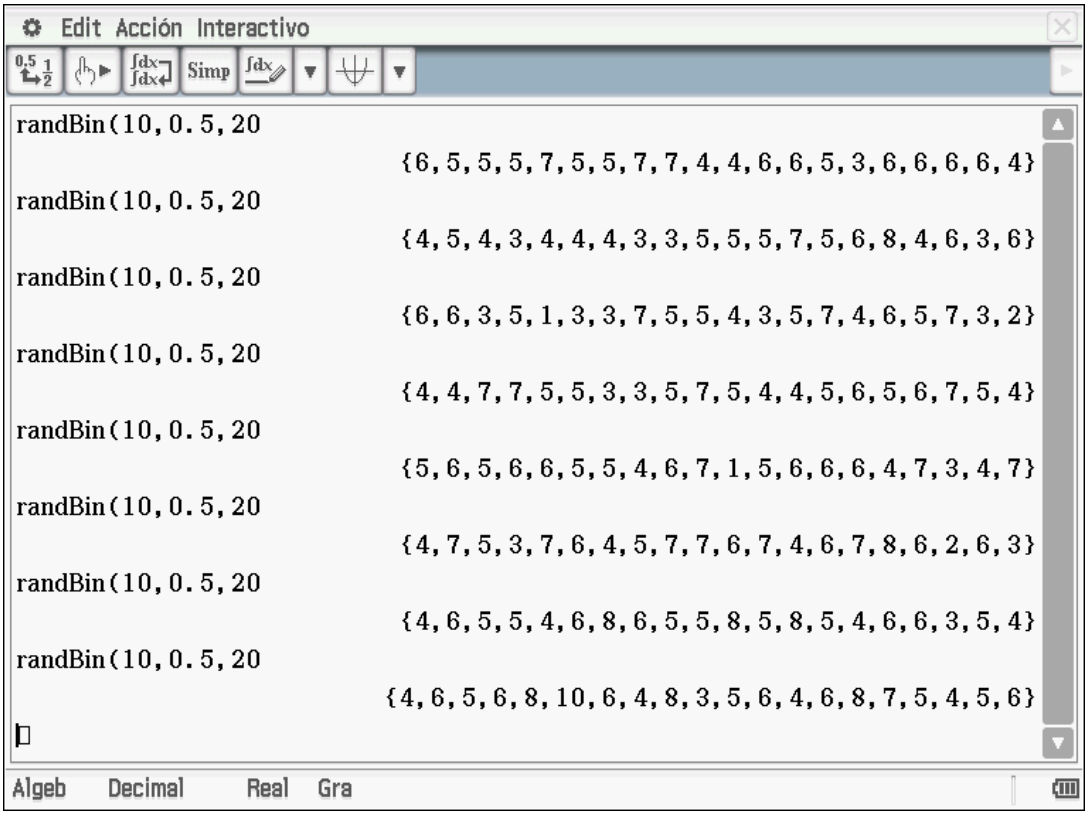




La función **randBin** genera números aleatorios binomiales para un número de intentos n y una probabilidad P.

Ejemplo: Si lanzamos una moneda diez veces, ¿cuántas veces se espera que salga cruz?





En la última pantalla hemos repetido el experimento 20 veces cada vez. (Cuidado: 10 lanzamientos de la moneda y 20 experimentos consistentes en lanzar 10 veces la moneda).

Combinatoria para calcular probabilidades.

La aplicación de la ley de Laplace para el cálculo de probabilidades en experiencias regulares requiere contar casos favorables y casos posibles. Como con la combinatoria podemos contar agrupaciones de todo tipo y con las calculadoras podemos hacer los cálculos que intervienen en los problemas de recuento, es natural que la calculadora sea útil en el cálculo de probabilidades.

Ejemplo 1. Se extraen tres cartas de una baraja de 40. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean FIGURAS (sota, caballo o rey)?

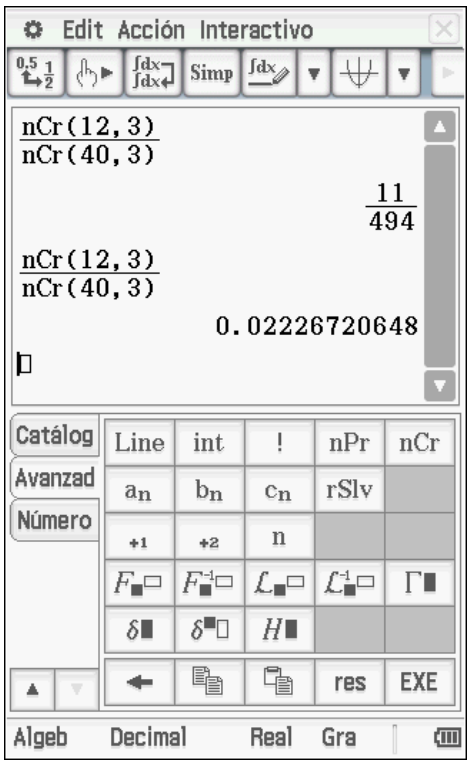
Casos favorables: extraer 3 figuras de un total de 40; C_{12}^{3}

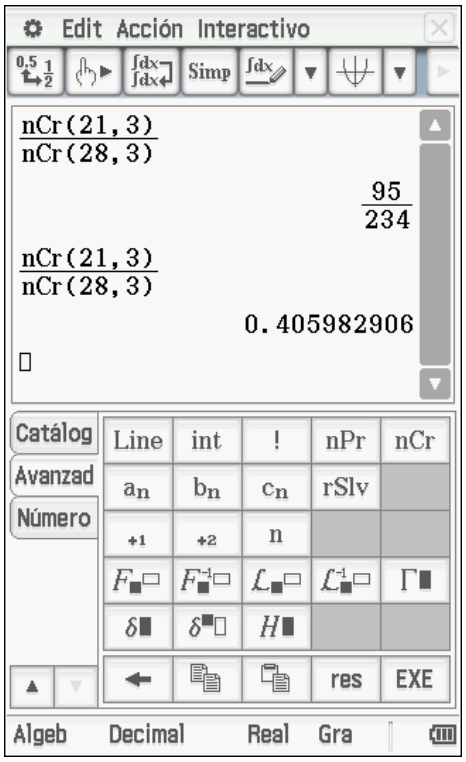
Casos posibles: extraer 3 cartas de un total de 40; C_{40}^{3}

Ejemplo 2. Calcular la probabilidad de que al escoger tres fichas de un dominó ninguna sea un doble.

Casos posibles: tríos que pueden formarse al coger 3 fichas de las 28; C_{28}^{3}

Casos favorables: tríos que pueden formarse al coger 3 fichas de 21 que no son dobles; C_{21}^{3}.





DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Distribución de probabilidad discreta: distribución binomial.

Recordemos:

Un experimento sigue el modelo de la **distribución binomial** si:

1. En cada prueba del experimento sólo son posibles **dos resultados**: el suceso A (**éxito**) y su contrario $\overline{A}$.

2. La **probabilidad del suceso A es constante**, es decir, que no varía de una prueba a otra. Se representa por **p**.

3. El **resultado** obtenido en cada prueba es **independiente** de los resultados obtenidos anteriormente.

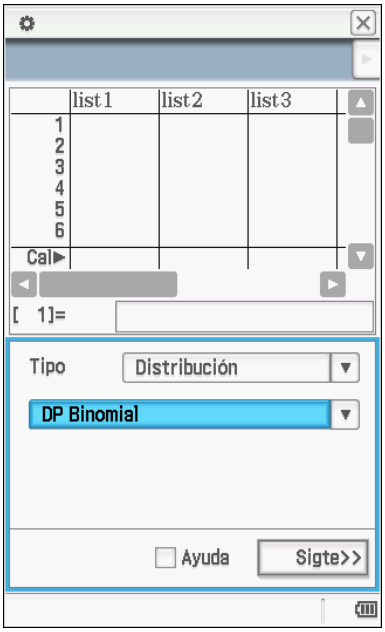
La **variable aleatoria binomial**, **X**, expresa el **número de éxitos obtenidos** en cada prueba del experimento.

La **variable binomial es una variable aleatoria discreta**, sólo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, ..., n suponiendo que se han realizado n pruebas.

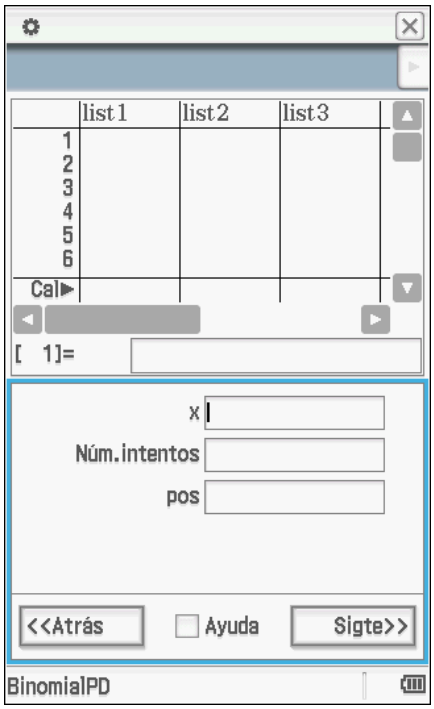
La distribución binomial se suele representar por B(n, p), donde n es el número de pruebas de que consta el experimento y p es la probabilidad de éxito. La probabilidad de $\overline{A}$ es $1-p$, y la representamos por q.

Veamos como utilizar la aplicación *Estadística* de la calculadora ClassPad 400 para realizar cálculos con distribuciones binomiales:

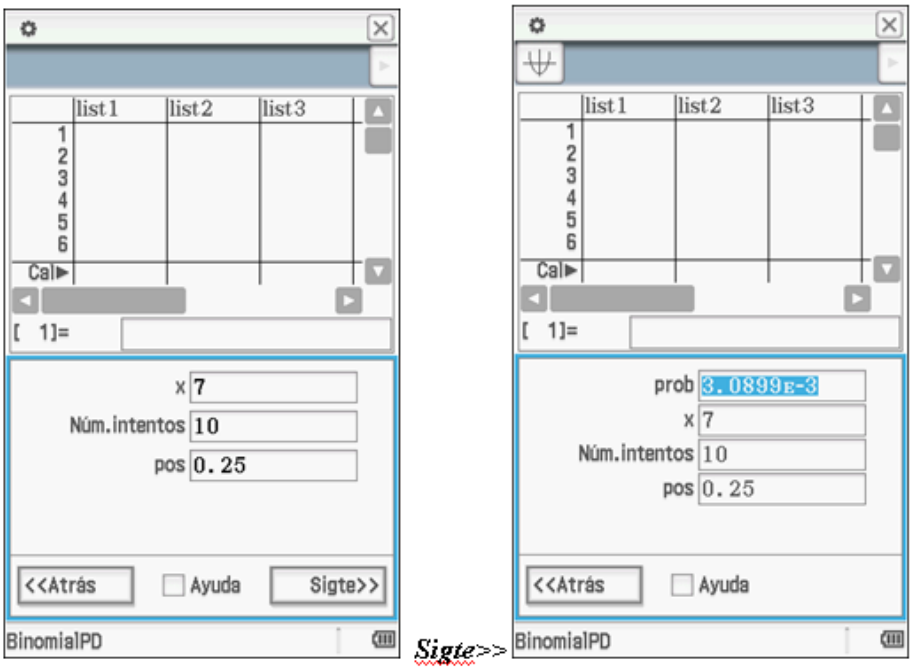
En el menú *Estadística* elegimos *Cálc. ->Distribución* y a continuación *DP Binomial*



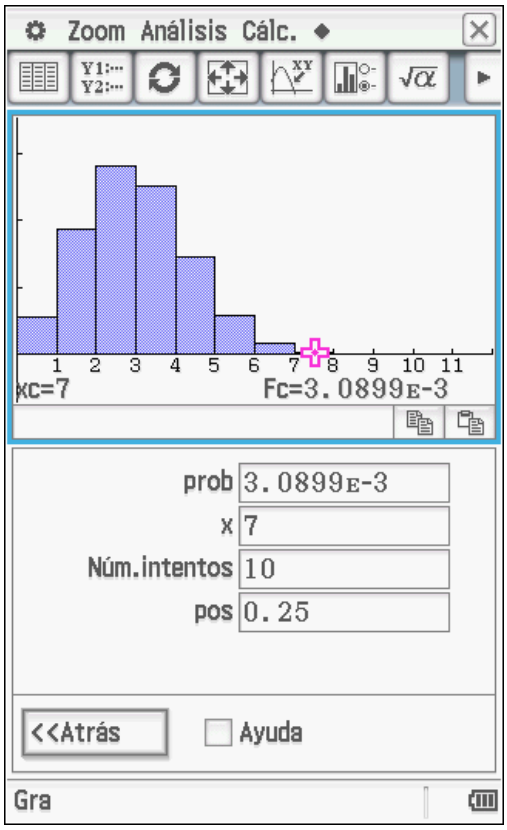
Este comando calcula la probabilidad de que una variable aleatoria que sigue una distribución binomial sea un valor *x* dado. Determina la probabilidad de *x* éxitos cuando se realizan *n* intentos con probabilidad (posibilidad) de éxito *p*.



Ejemplo 1. Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada de las cuales tiene cuatro posibles respuestas de las que sólo una es correcta. Si contestamos al azar, calcula la probabilidad de acertar 7 respuestas.



Podemos obtener el gráfico pulsando en el botón de gráficas situado arriba a la izquierda. 

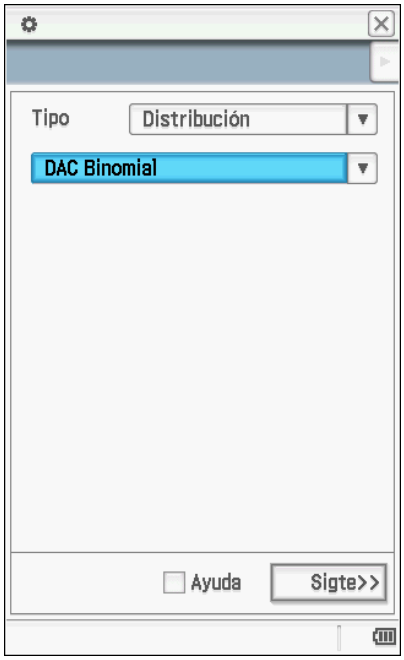


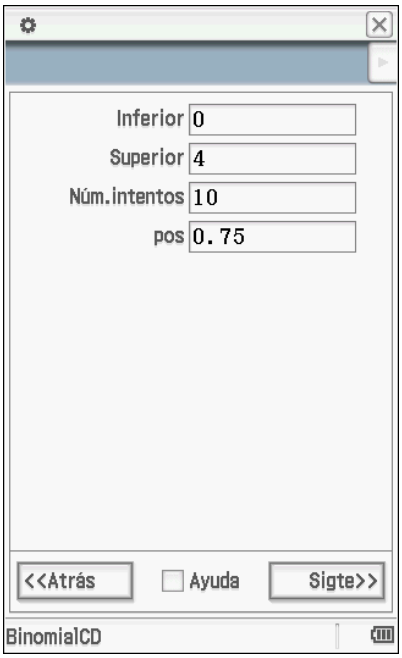
Para calcular la probabilidad de que una variable aleatoria que sigue una distribución binomial sea un valor x dado o menor, o sea, para determinar la probabilidad de x o menos éxitos cuando se realizan n intentos con probabilidad de éxito p, se utiliza

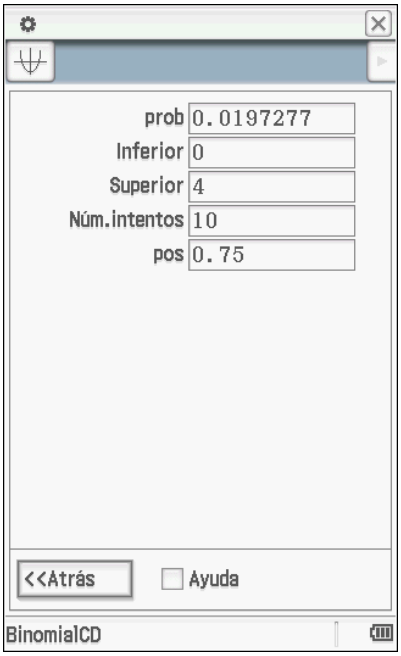
Cálc. ->Distribución y a continuación *DAC Binomial* (distribución acumulativa).

Ejemplo 2. Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada de las cuales tiene cuatro posibles respuestas de las que sólo una es correcta. Si contestamos al azar, calcula la probabilidad de: a) Aprobar el examen. b) No llegar al notable.

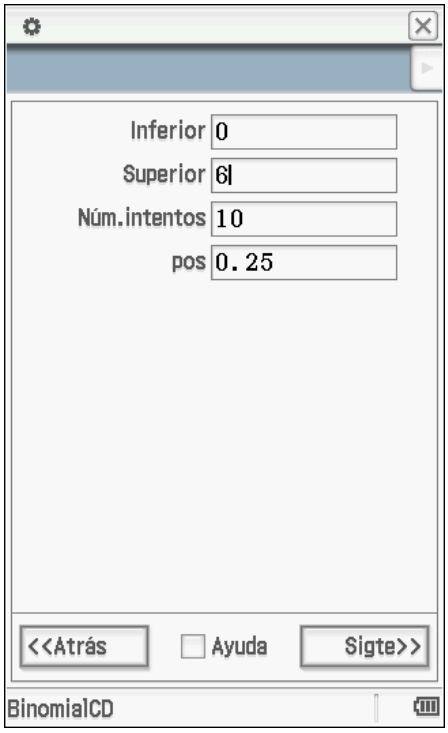
Para a) cambiamos a probabilidad (acumulativa) de no acertar y calculamos $p(x \leq 4)$.

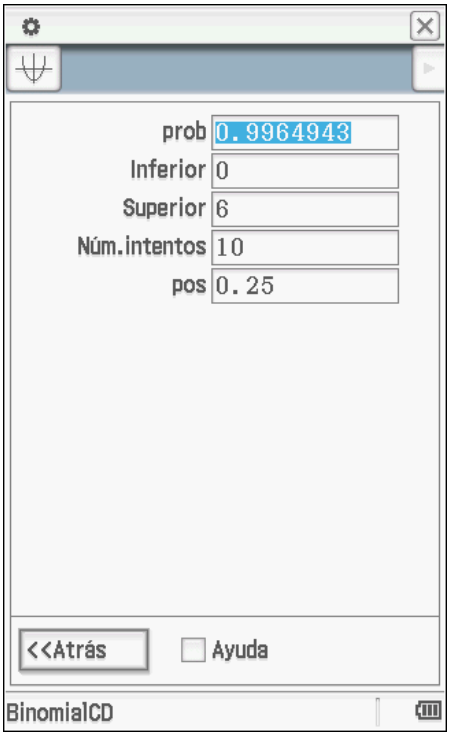






Para el apartado b), procedemos de forma análoga.





Distribución de probabilidad continua: distribución normal.

Recordemos:

Una **variable aleatoria continua** sigue una **distribución normal** de **media μ** y **desviación típica σ**, y se designa por **N(μ, σ),** si se cumplen las siguientes condiciones:

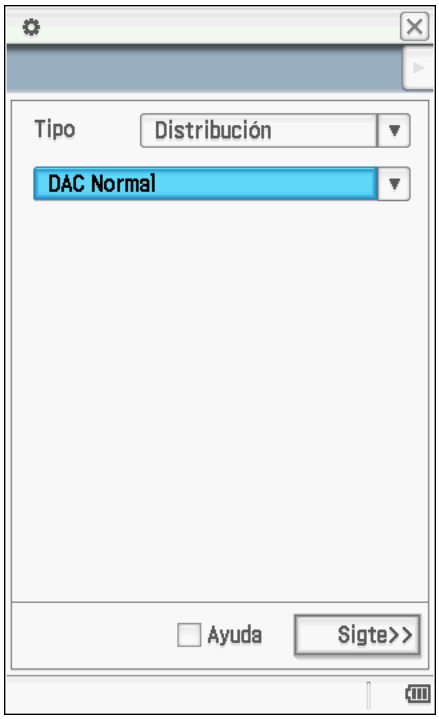
1. La variable puede tomar cualquier valor: (-∞, +∞)

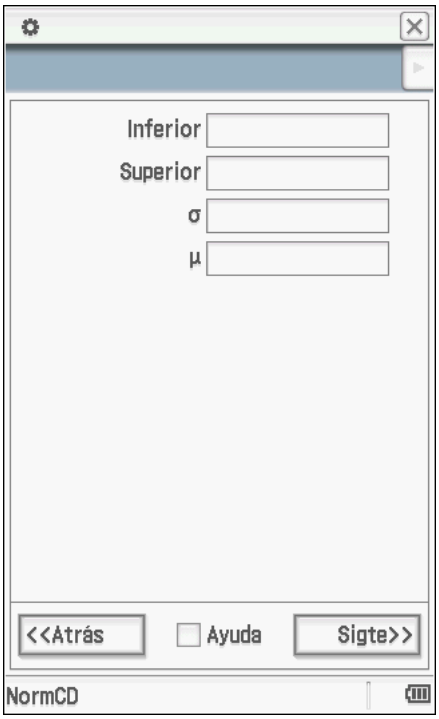
2. La **función de densidad**, es: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Esta distribución permite describir probabilísticamente fenómenos estadísticos donde los valores más usuales se agrupan en torno a uno central y los valores extremos son escasos.

Veamos como utilizar la aplicación *Estadística* de la calculadora ClassPad 400 para realizar cálculos con distribuciones normales. Es sumamente sencillo y con resultados inmediatos sin necesidad de utilizar engorrosas tablas de distribuciones y sin necesidad de tipificar la variable. Además permite calcular probabilidades de cualquier tipo P(X<a), P(X>a), P(a<X<b). También permite visualizar las gráficas correspondientes.

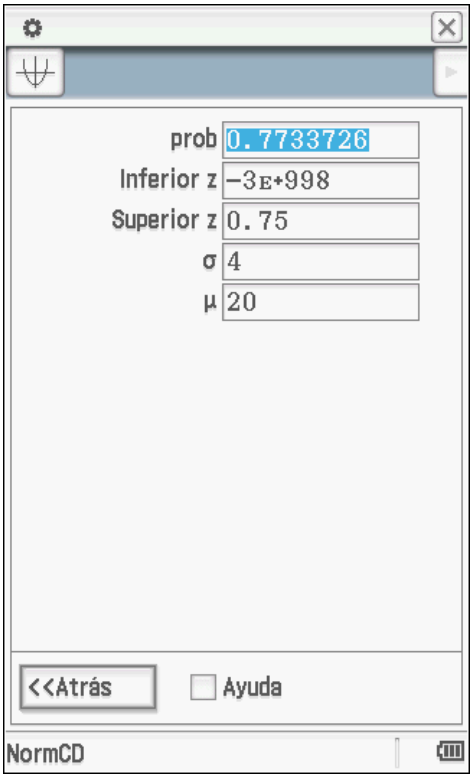
En el menú *Estadística* elegimos *Cálc. ->Distribución* y a continuación *DAC Normal.*

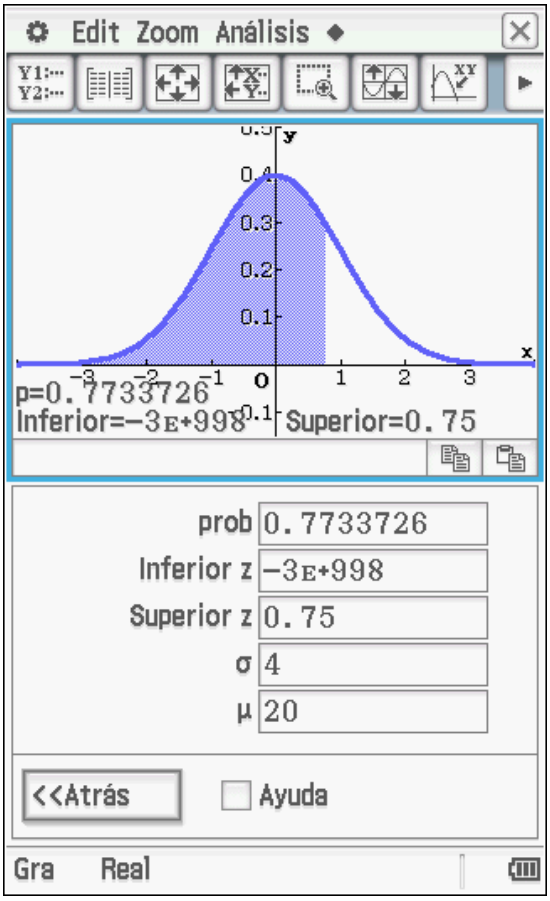




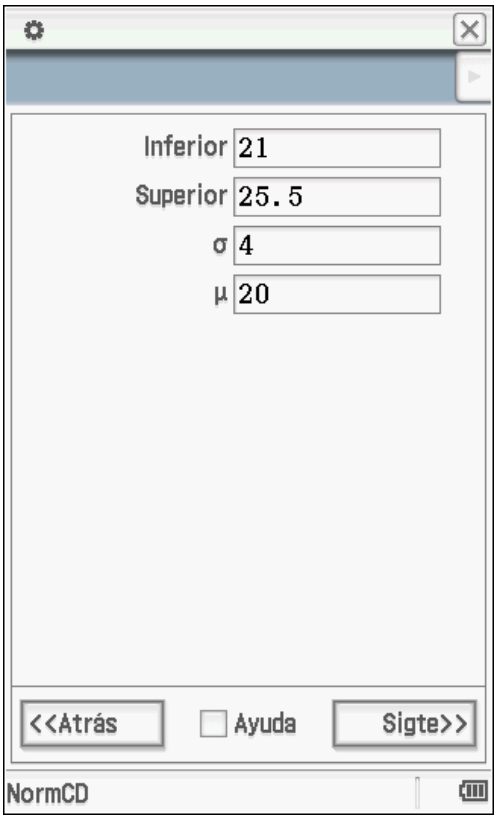
Ejemplo 1. En una distribución normal de media 20 y de desviación típica 4, calcula las siguientes probabilidades: a) *P(x<23)*, b) *P(21<x<25,5)*, c) *P(x=23)*, d) *P(x>40)*, e) *P(15'4<x<22'7)*, f) *P(15'4<x<17'2)*.

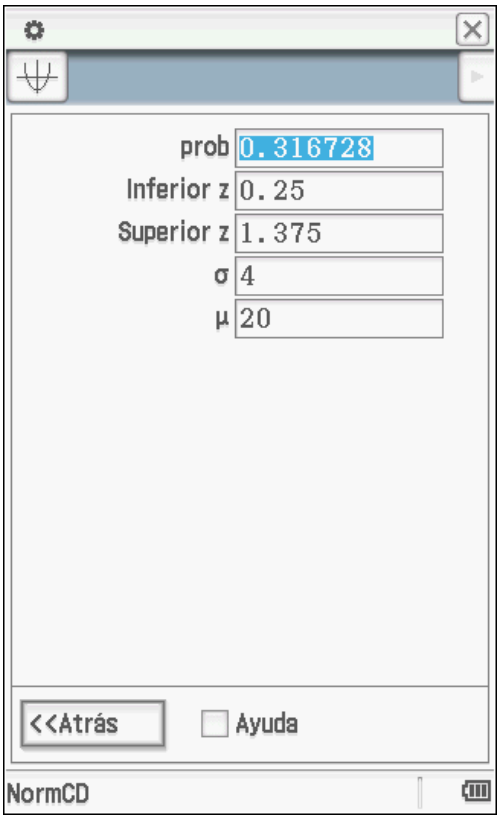
a)

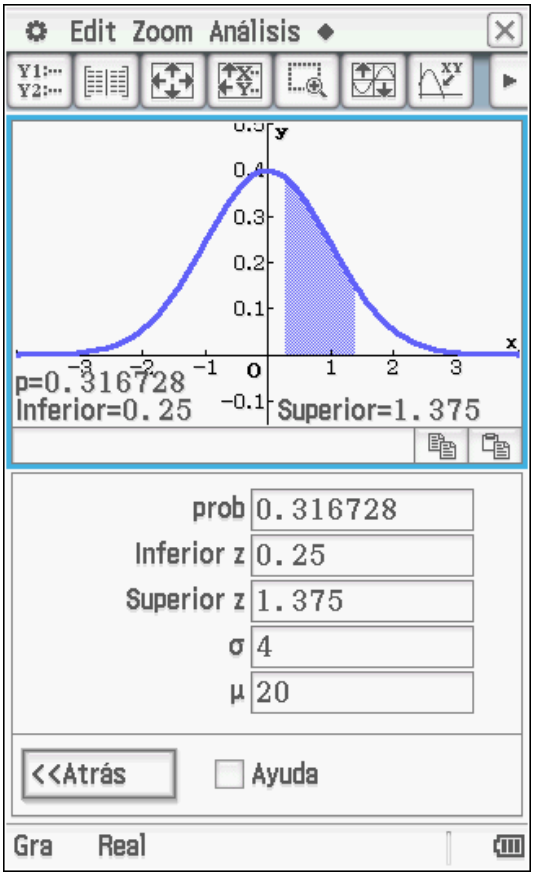



Edit Zoom Análisis
p=0.7733726
Inferior=−3E+998
Superior=0.75
prob 0.7733726
Inferior z −3E+998
Superior z 0.75
σ 4
μ 20
<<Atrás
Ayuda
Gra Real

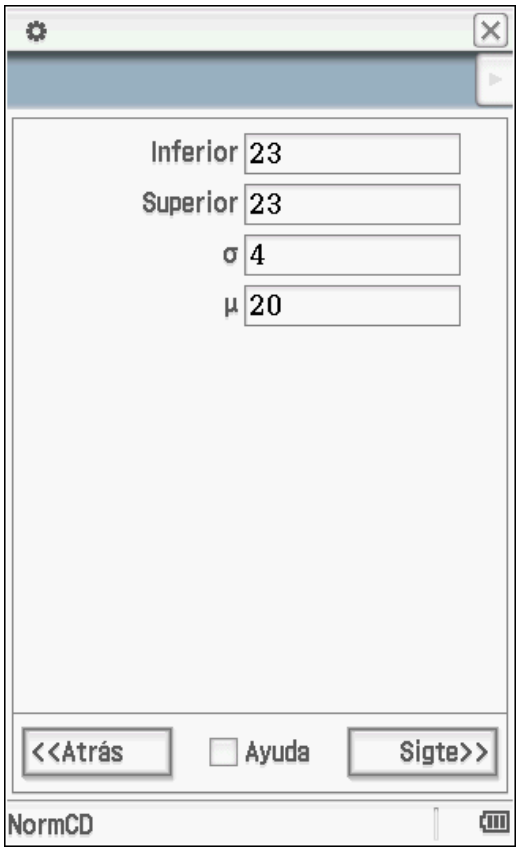
b)

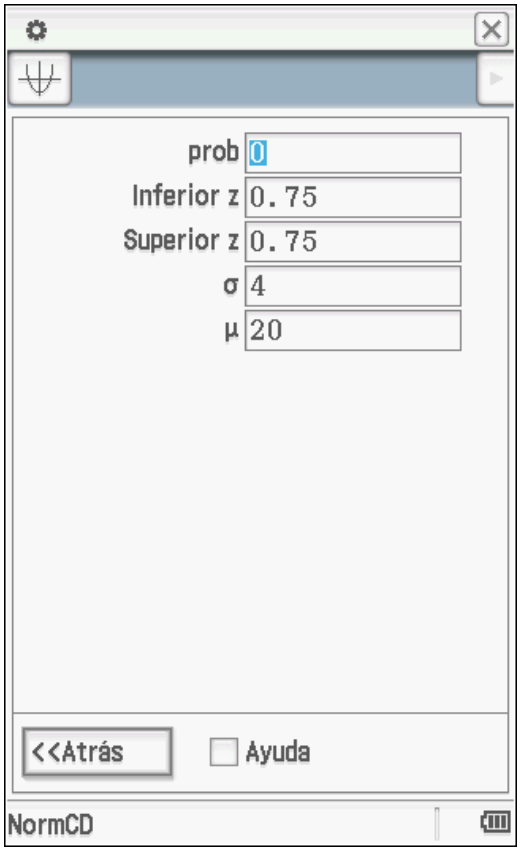

Inferior 21
Superior 25.5
σ 4
μ 20
<<Atrás
Ayuda
Sigte>>
NormCD

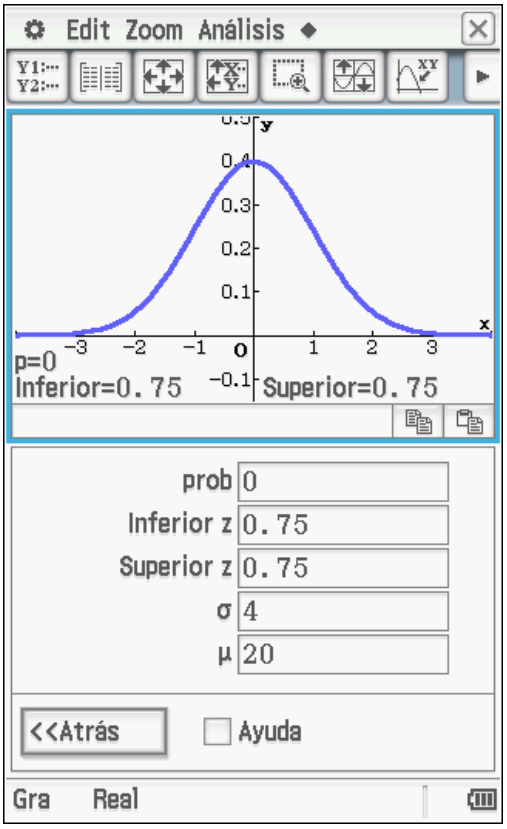

prob 0.316728
Inferior z 0.25
Superior z 1.375
σ 4
μ 20
<<Atrás
Ayuda
NormCD


Edit Zoom Análisis
p=0.316728
Inferior=0.25
Superior=1.375
prob 0.316728
Inferior z 0.25
Superior z 1.375
σ 4
μ 20
<<Atrás
Ayuda
Gra Real

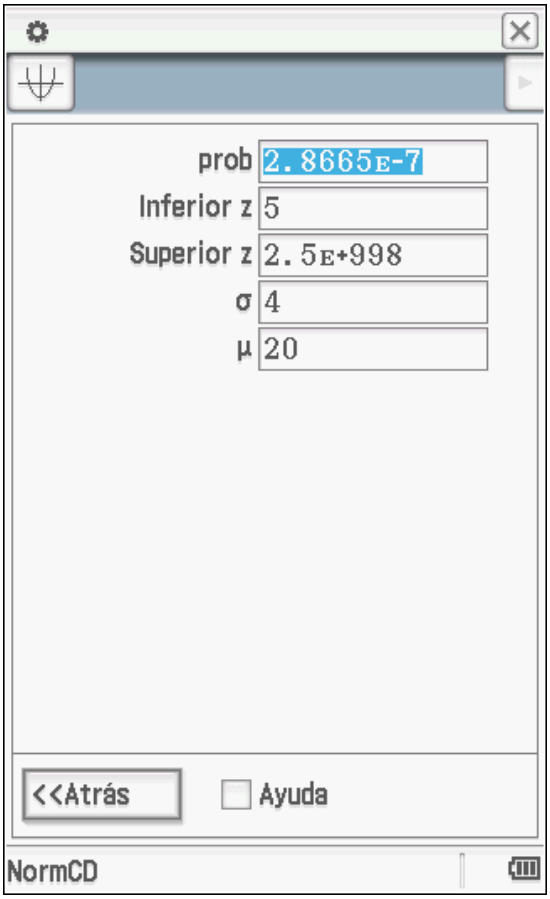
c)


Inferior 23
Superior 23
σ 4
μ 20
<<Atrás
Ayuda
Sigte>>
NormCD

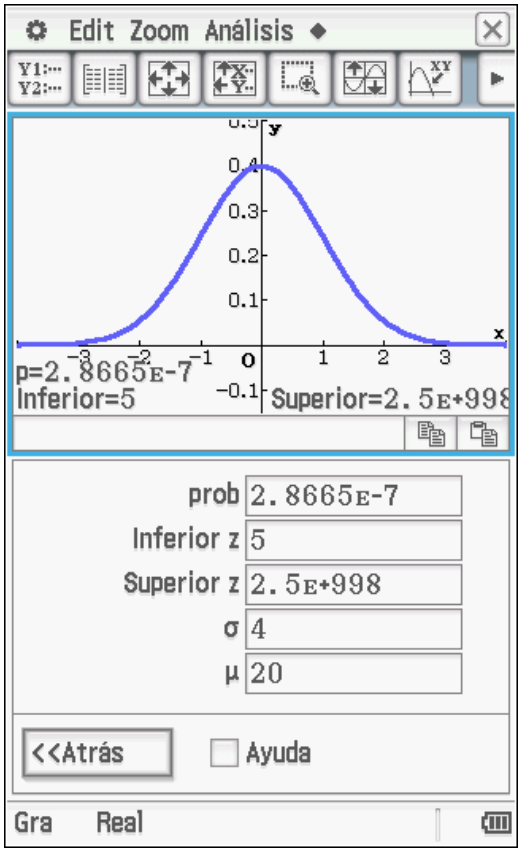

prob 0
Inferior z 0.75
Superior z 0.75
σ 4
μ 20
<<Atrás
Ayuda
NormCD



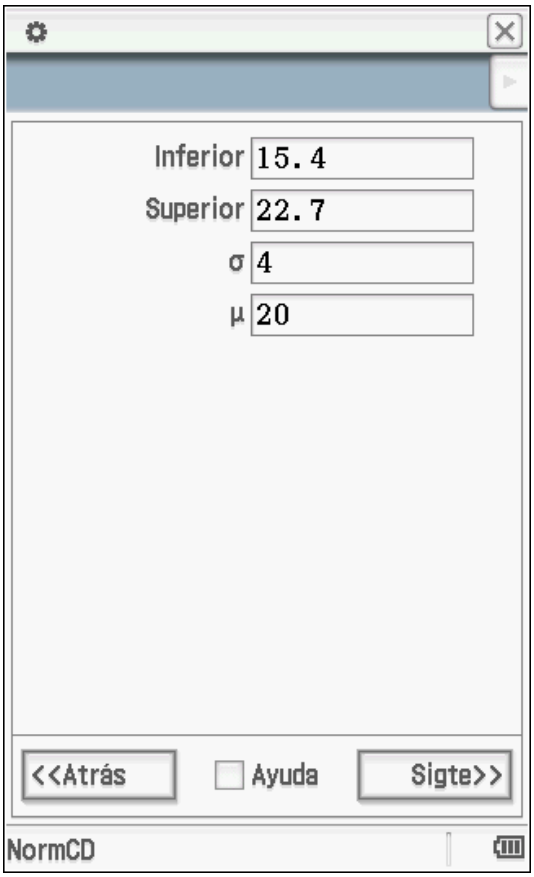
d)

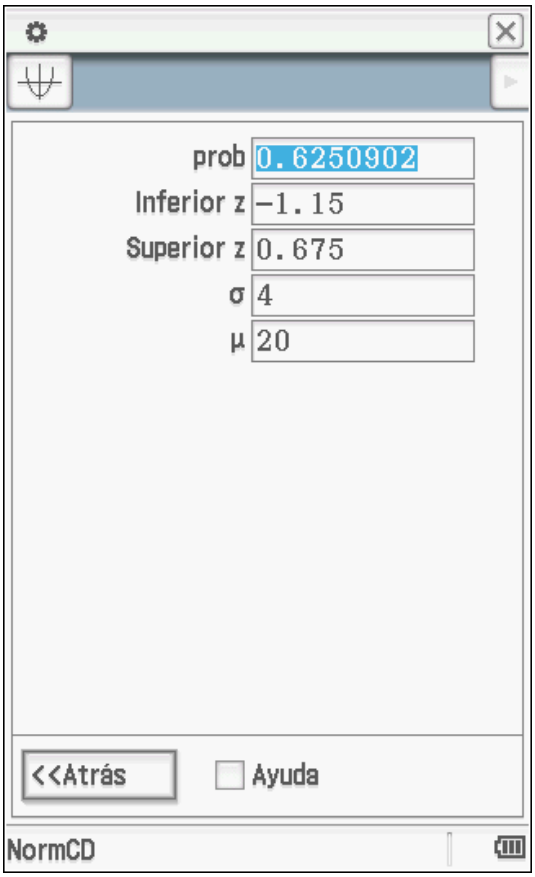


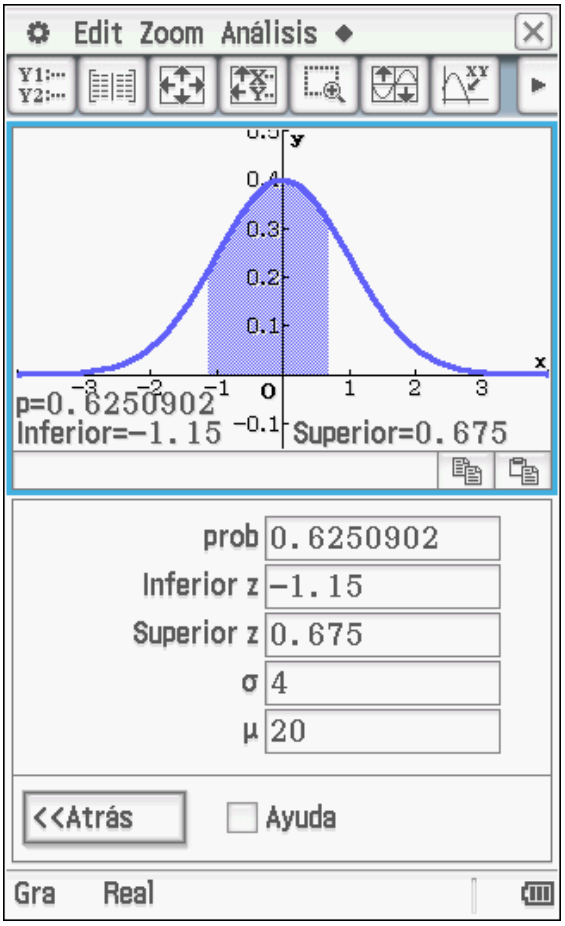
(Prácticamente nula).


Edit Zoom Análisis
p=2.8665E-7
Inferior=5
Superior=2.5E+998
prob 2.8665E-7
Inferior z 5
Superior z 2.5E+998
σ 4
μ 20
<<Atrás
Ayuda
Gra Real

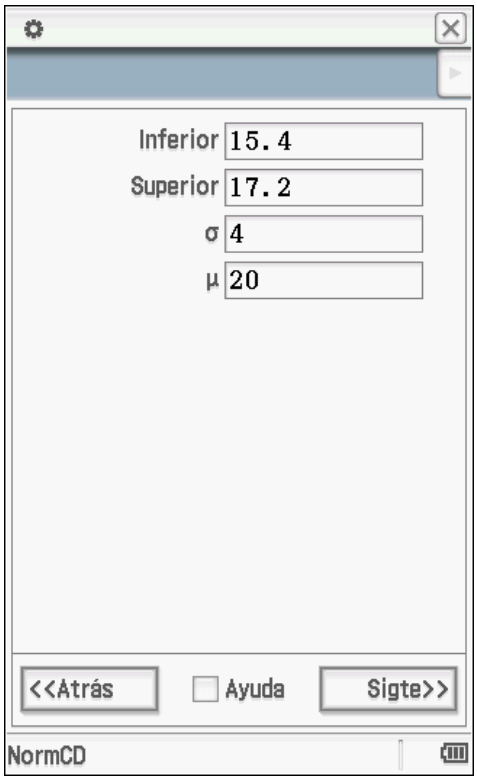
e)

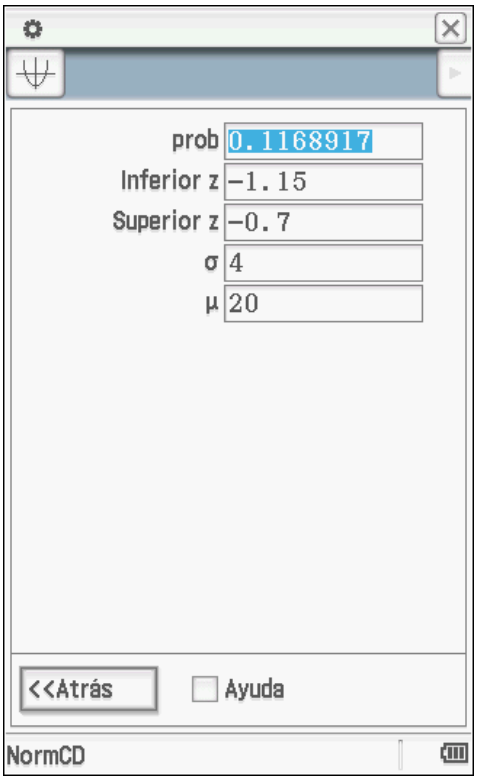

Inferior 15.4
Superior 22.7
σ 4
μ 20
<<Atrás
Ayuda
Sigte>>
NormCD

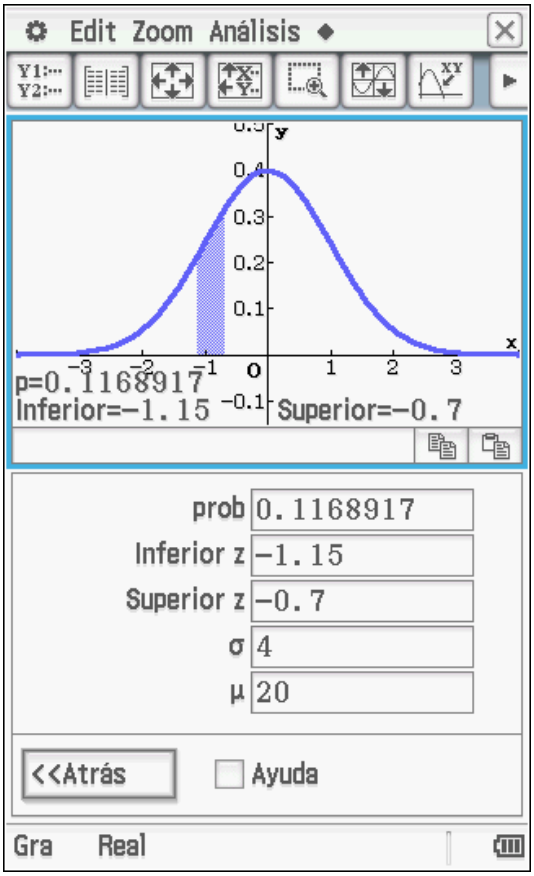

prob 0.6250902
Inferior z −1.15
Superior z 0.675
σ 4
μ 20
<<Atrás
Ayuda
NormCD


Edit Zoom Análisis
p=0.6250902
Inferior=−1.15
Superior=0.675
prob 0.6250902
Inferior z −1.15
Superior z 0.675
σ 4
μ 20
<<Atrás
Ayuda
Gra Real

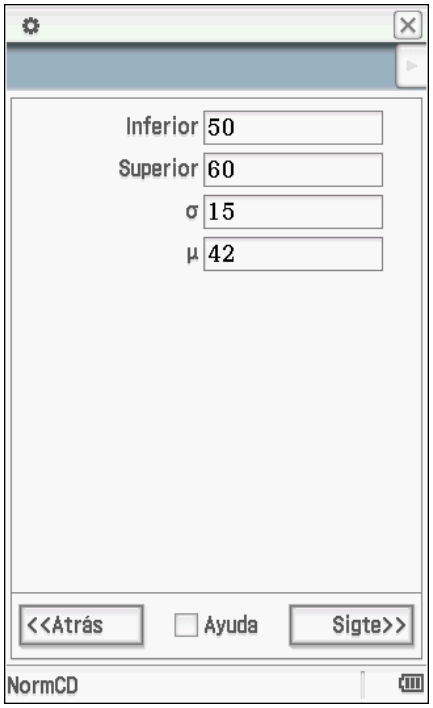
f)

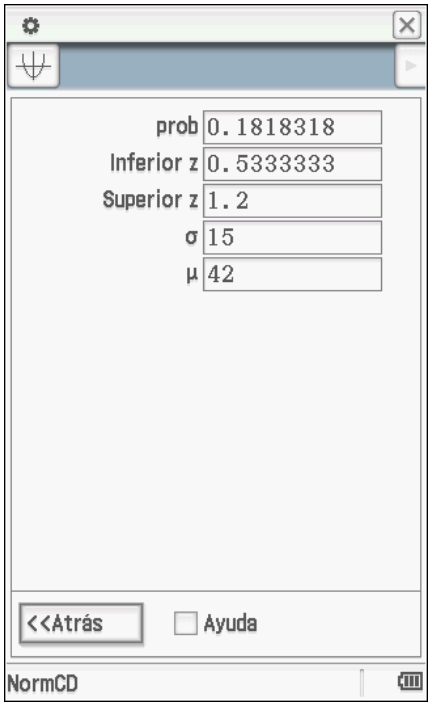

Inferior 15.4
Superior 17.2
σ 4
μ 20
<<Atrás
Ayuda
Sigte>>
NormCD


prob 0.1168917
Inferior z −1.15
Superior z −0.7
σ 4
μ 20
<<Atrás
Ayuda
NormCD



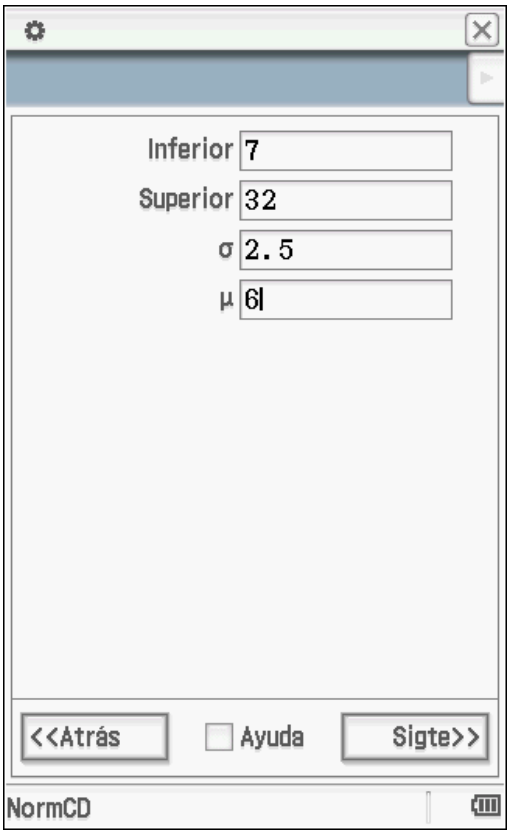
Ejemplo 2. 400 alumnos han hecho un examen y los resultados se distribuyen normalmente de media 42 y desviación típica 15. ¿Qué porcentaje de alumnos tiene una puntuación comprendida entre 50 y 60?

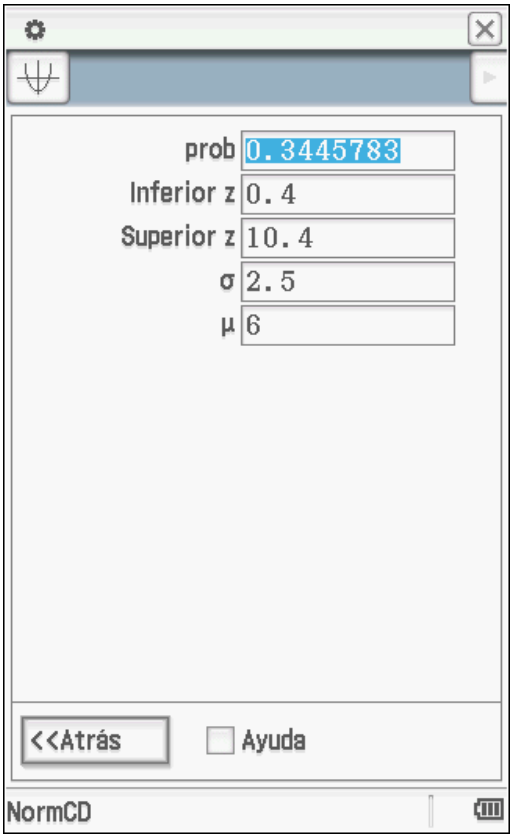


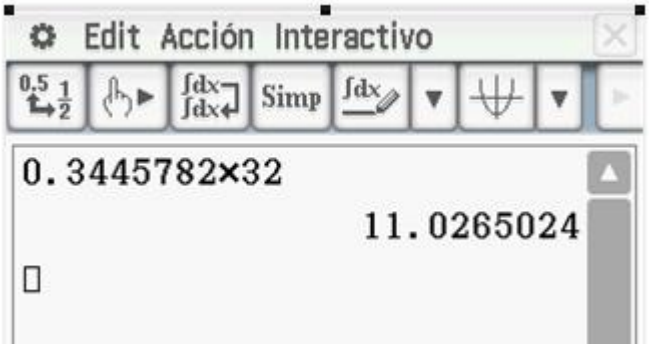


El 18’2 %.

Ejemplo 3. Un profesor ha observado que las notas obtenidas en los exámenes de Estadística siguen una distribución *N(6, 2'5)*. Si se presentaron al último examen 32 alumnos, ¿cuántos sacaron al menos un 7?







11 alumnos sacaron más de un 7.

INFERENCIA ESTADÍSTICA CON LA CLASSPAD 400

Introducción

El estudio de la Estadística inferencial es realmente muy difícil si no se utilizan recursos apropiados. La aparición de las calculadoras gráficas estadísticas ha supuesto un gran avance al facilitar los tediosos cálculos y centrar el objetivo de la enseñanza en los conceptos. La calculadora ClassPad 400 permite obtener con gran facilidad estimaciones de parámetros, determinar intervalos de confianza, validar hipótesis, etc.
Estudiaremos algunas de las posibilidades de la ClassPad 400 para el estudio de la Inferencia Estadística en ESO y Bachillerato.

1. INTERVALOS DE CONFIANZA

- **Intervalo de confianza para la media**

El comando OneSampleZInt calcula el intervalo de confianza para la media poblacional cuando se conoce la desviación típica de la población.

Si se conoce la lista de datos, la sintaxis del comando es: **OneSampleZInt 1-α, σ, List, Frec**, siendo α el nivel de significación, σ la desviación típica, List el nombre de la lista de datos, Frec la lista que contiene las frecuencias de los datos.

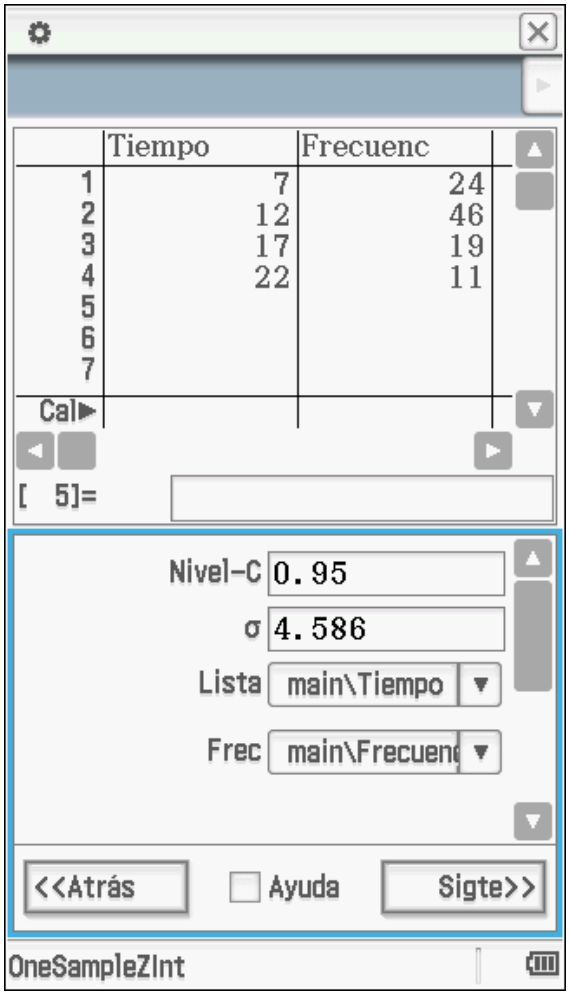
Si se conocen los parámetros estadísticos de la muestra, la sintaxis del comando es la siguiente: **OneSampleZInt 1-α, σ, x , n**, siendo α el nivel de significación, σ la desviación típica, x la media y n el tamaño de la muestra.

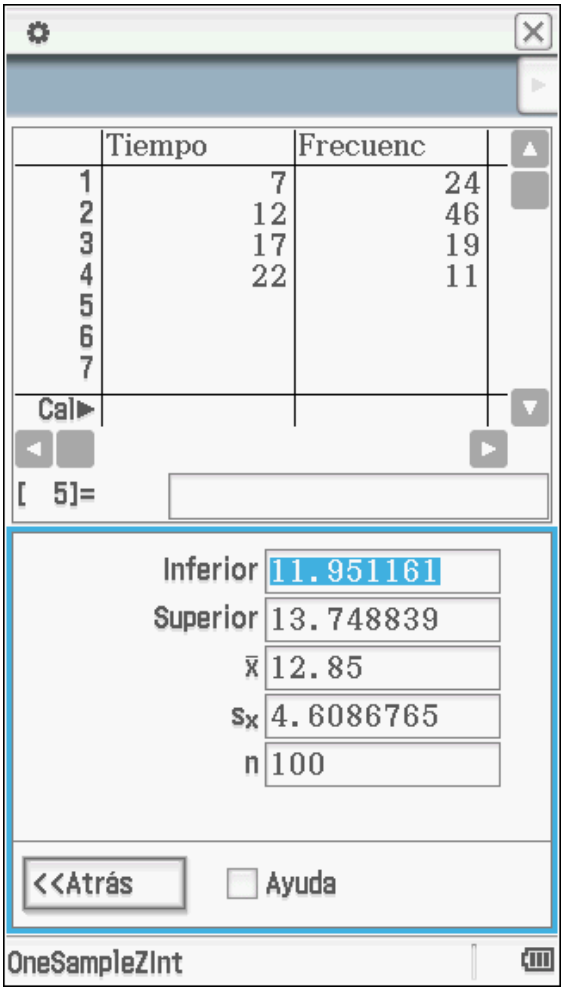
- La siguiente tabla muestra las duraciones (en días) de 100 pastillas de jabón de una determinada marca. Halla un intervalo de confianza para la duración media de dichas pastillas con un nivel de significación α=0,05. Sigue los siguientes pasos:

Duración	7	12	17	22
Frecuencia	24	46	19	11

1) En el editor de listas de la aplicación Estadística, introduce en las listas list1 y list2 las duraciones y las frecuencias, respectivamente. Selecciona el comando Calc./ Intervalo y, en la lista desplegable elige la opción Zint muestra única y la opción Lista. Toca el botón [Sigte.].

2) En la siguiente ventana introduce 0.95 como nivel de confianza, 4.586 como valor de la desviación típica poblacional, indica que los datos están en Tiempo y que las frecuencias están en Frecuenc. Toca el botón [Sigte] y observa que se muestran los límites inferior y superior del intervalo de confianza, junto con la media muestral, la cuasidesviación típica y el tamaño de la muestra.





- El comando OneSampleTIntcalcula el

intervalo de confianza para la media poblacional cuando se desconoce la desviación típica de la población y el amaño de la muestra es pequeño. Para ello utiliza las fórmulas:

$$\left(\bar{x} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{x\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{x\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$$

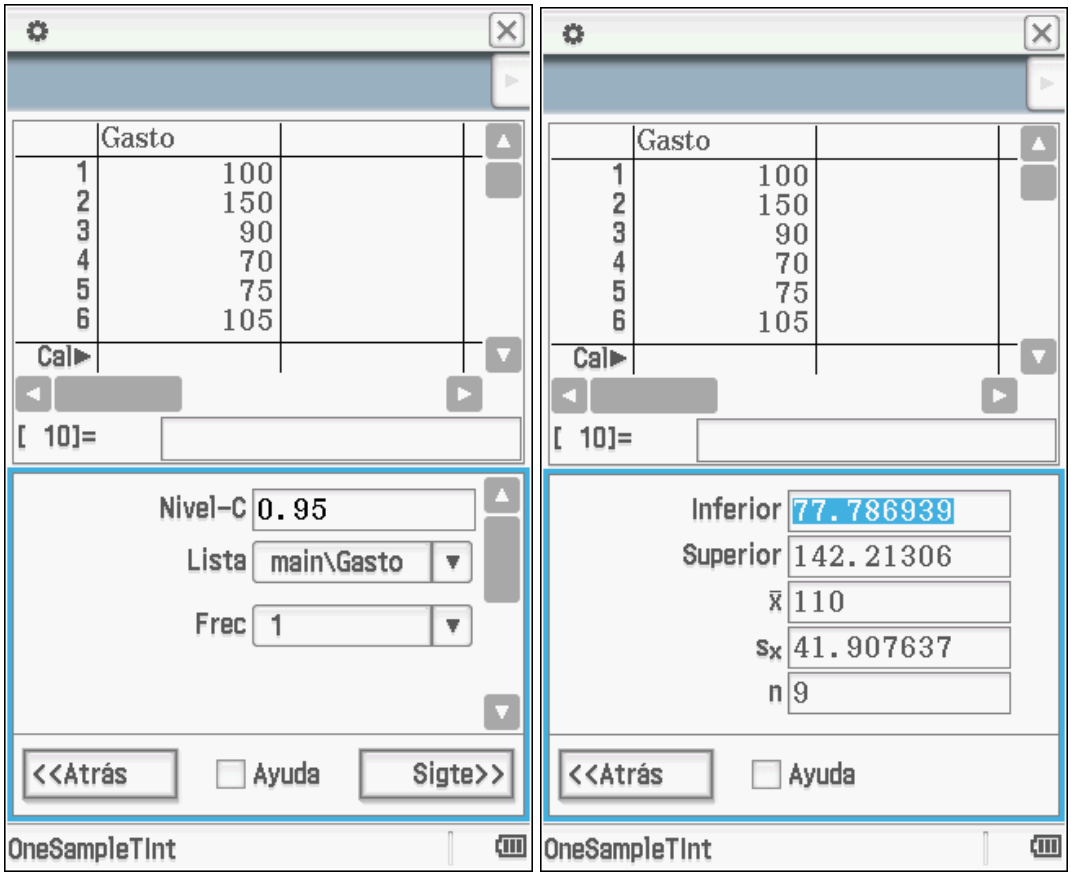
Siendo α el nivel de significación y 1-α el nivel de confianza.

Si se conoce la lista de datos, la sintaxis del comando es: **OneSampleTInt 1-α, List, Frec**, siendo α el nivel de significación, List el nombre de la lista de datos, Frec la lista que contiene las frecuencias de los datos.

Si se conocen los parámetros estadísticos de la muestra, la sintaxis del comando es la siguiente: **OneSampleTInt 1-α, $\bar{x}$, xσn−1, n**, siendo α el nivel de significación, xσn−1 la desviación típica muestral, $\bar{x}$ la media y n el tamaño de la muestra.

- El gasto semanal de fotocopias, en céntimos de euro, para una muestra de 9 estudiantes es: 100, 150, 90, 70, 75, 105, 200, 120, 80. Halla un intervalo de confianza al 95% para la media de gasto semanal en fotocopias por estudiante.

En el editor de listas de la aplicación Estadística, introduce en la lista list1 los gastos en fotocopias. A continuación selecciona el comando Calc / Intervalo y en la lista desplegable selecciona la opción Tint muestra única y la opción Lista. Toca el botón [Sigte].



En la pantalla se muestran los extremos inferior y superior del intervalo de confianza, junto con la media muestral, la cuasidesviación típica y el tamaño de la muestra. Observa que el intervalo de confianza es (77.79, 142.21).

- **Intervalo de confianza para la proporción**

El comando OnePropZInt calcula el intervalo de confianza para la proporción de éxitos en una población. Para ello utiliza las fórmulas:

$$\left(\frac{x}{n}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}\cdot\frac{x}{n}\cdot\left(1-\frac{x}{n}\right)},\frac{x}{n}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}\cdot\frac{x}{n}\cdot\left(1-\frac{x}{n}\right)}\right)$$

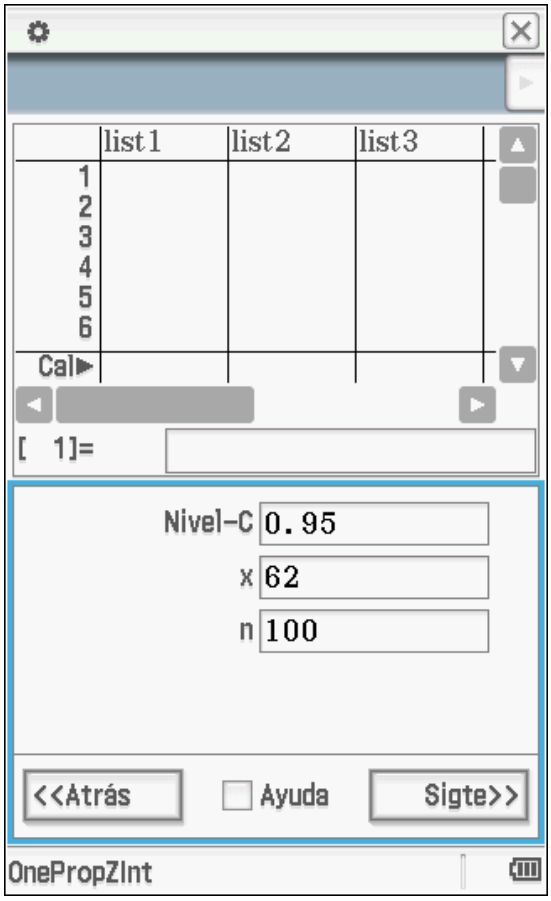
siendo α el nivel de significación y 1-α el nivel de confianza, x el dato y n el tamaño de la muestra.

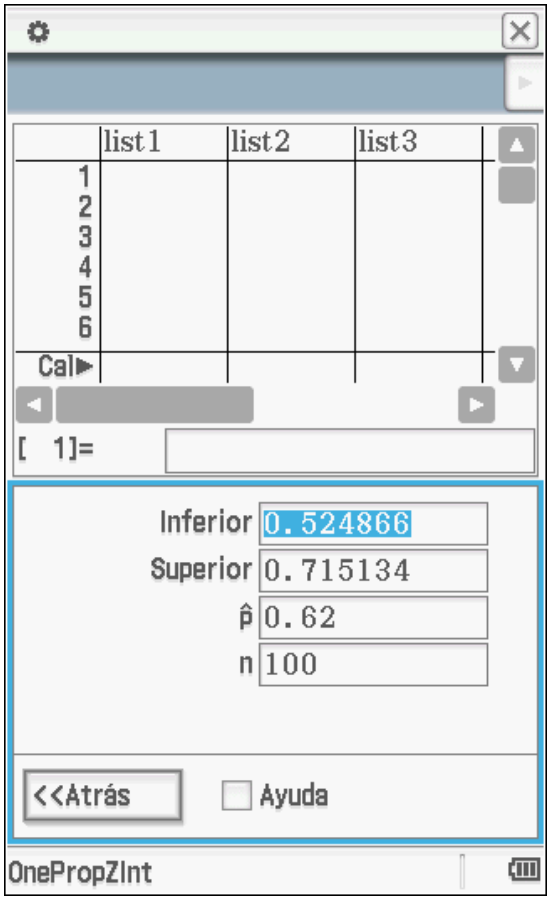
La sintaxis del comando es: **OnePropZInt 1-α, x, n**, siendo α el nivel de significación, x el dato y n el tamaño de la muestra.

- Se ha lanzado 100 veces una moneda obteniéndose 62 caras. Halla un intervalo de confianza para la proporción de caras, con un nivel de confianza del 95%.

En la aplicación Estadística, selecciona el comando Cálc. - -> Intervalo. En la lista desplegable, selecciona la opción *Zint una prop* y toca el botón [Sigte].

En la siguiente ventana introduce 0.95 como nivel de confianza, x=62 como número de casos y n=100 como tamaño de la muestra. Toca el botón [Sigte.] y observa que en la siguiente pantalla se muestran los extremos inferior y superior del intervalo de confianza, junto con la proporción muestral y el tamaño de la muestra. Comprueba que el intervalo de confianza es (0.525, 0.715).





2. TEST DE HIPÓTESIS

- **Contraste de una media**

El comando OneSampleZTest contrasta una hipótesis relativa a una media poblacional cuando la desviación típica de la población es conocida. Para una distribución normal se utiliza el estadístico:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

siendo $\bar{x}$ la media de los datos de la muestra, μ_0 la media poblacional supuesta, σ la desviación típica de la población y n el tamaño de la muestra.

Si se conoce la lista de datos, la sintaxis del comando es: **OneSampleZTest "condición",** μ_0**, σ, List, Frec**, siendo List y Frec los nombres de las listas que contienen los datos y las frecuencias y siendo:

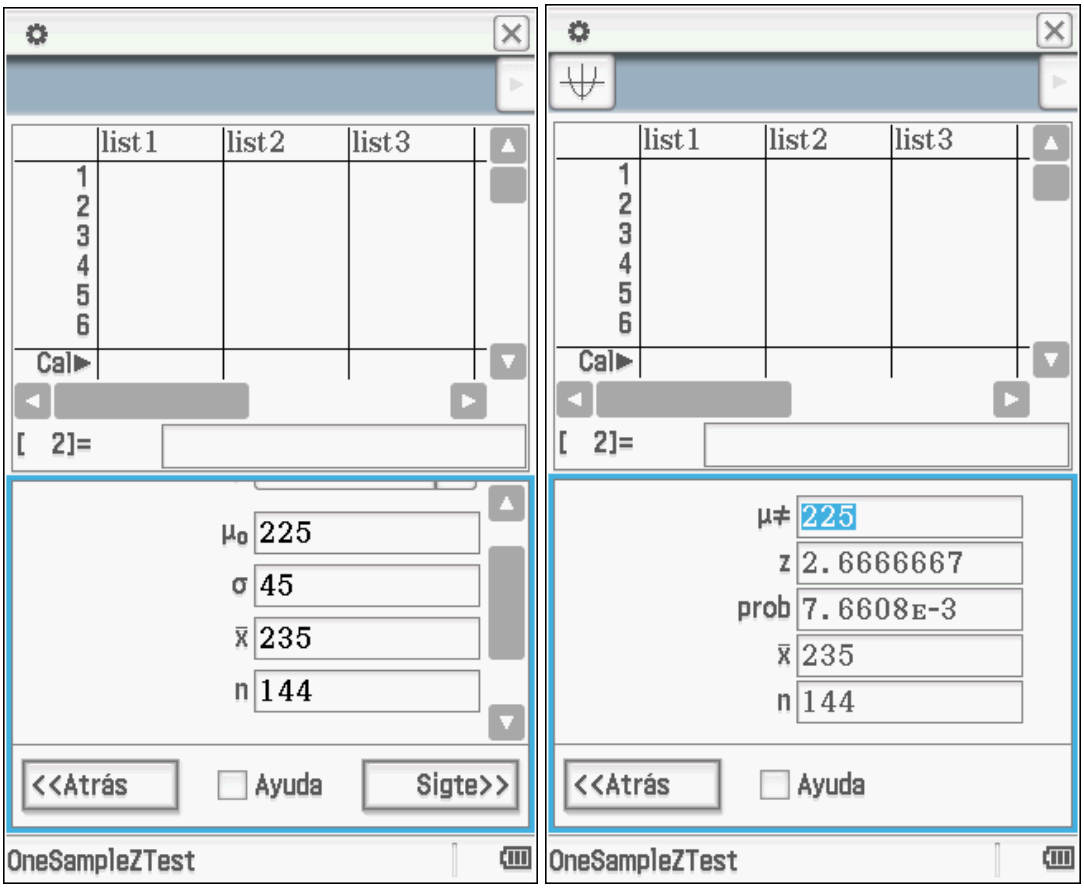
$$\text{Condición}=\begin{cases} \neq, & \text{si la prueba es de dos colas} \\ <, & \text{si la prueba es de cola inferior} \\ >, & \text{si la prueba es de cola superior} \end{cases}$$

Si se conocen los parámetros estadísticos de la muestra, la sintaxis del comando es la siguiente: **OneSampleZTest "condición",** μ_0**, σ,** $\bar{x}$ **, n**, siendo σ la desviación típica poblacional, $\bar{x}$ la media y n el tamaño de la muestra.

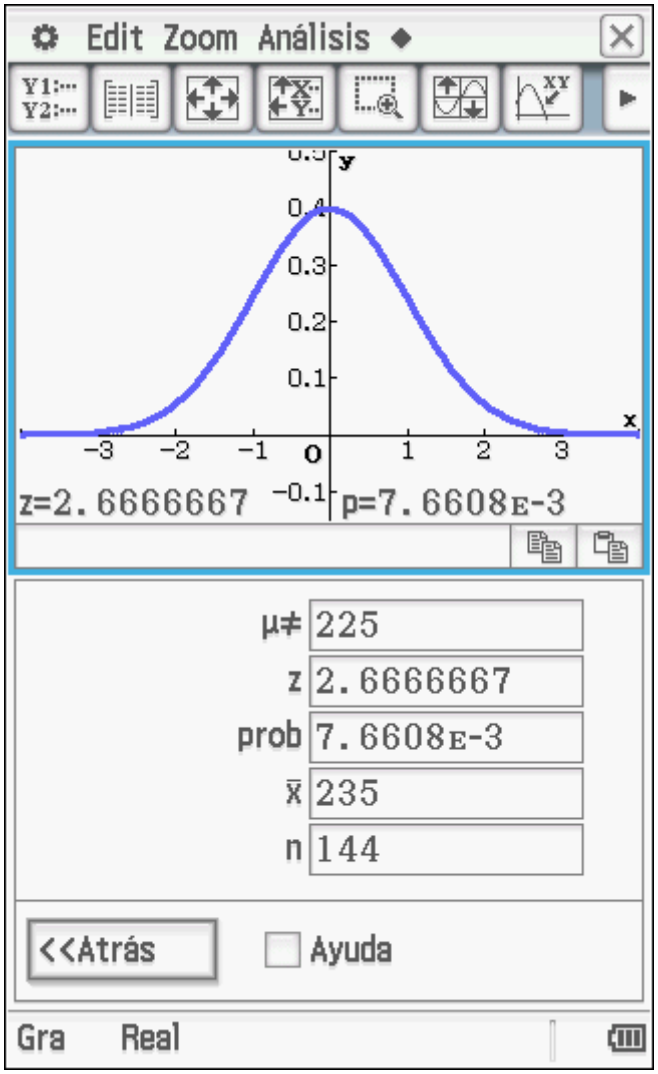
- El nivel de colesterol (en mg/dl) para una muestra de 144 personas mayores de 60 años tiene una media de 235, con una desviación típica de 45. ¿Se puede admitir que la media de colesterol de la población de mayores de 60 años es de 225, con un nivel de confianza del 95%?

En la aplicación Estadística, selecciona el comando Cálc. - - > Prueba. En la lista desplegable, selecciona la opción *Prueba Z 1 muestra* y elige la opción *Variable*. Toca el botón [Sigte].

En la siguiente ventana introduce ≠ como condición, 225 como μ_0 , 45 como desviación típica, 235 como media muestral y 144 el tamaño de la muestra. Toca el botón [Sigte.] y observa que en la siguiente pantalla se muestra el estadístico del test z=2.66666, junto con el p-valor, prob=7.660×E−3=0.00766 y el tamaño de la muestra. Como el p-valor es pequeño (inferior a 0.05, quiere decir que es muy poco probable que, suponiendo cierta la hipótesis nula, se cumpla lo observado en la muestra. Por tanto, hay que rechazar la hipótesis nula; es decir, la media de colesterol no es 225 mg/dl.



Al tocar el botón  aparece el gráfico con el estadístico y el p−valor.



El comando OneSampleTTest contrasta una hipótesis relativa a una media poblacional cuando la desviación típica de la población es desconocida y la muestra es pequeña. Para una distribución t se utiliza el estadístico:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{x\sigma_{n-1}/\sqrt{n}}$$

siendo $\bar{x}$ la media de los datos de la muestra, μ_0 la media poblacional supuesta, $x\sigma n-1$ la desviación típica de la muestra y n el tamaño de la muestra.

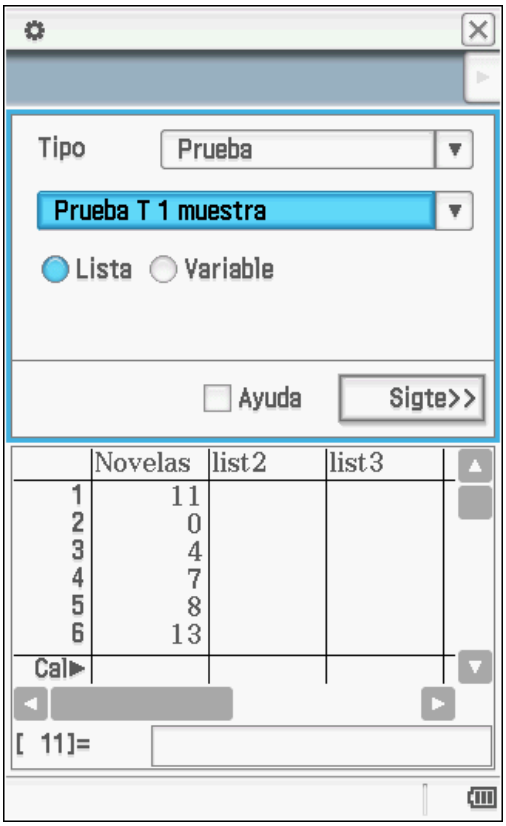
Si se conoce la lista de datos, la sintaxis del comando es: **OneSampleTTest "condición",** μ_0**, List, Frec**, siendo List y Frec los nombres de las listas que contienen los datos y las frecuencias y siendo:

$$\text{Condición}=\begin{cases} \neq, & \text{si la prueba es de dos colas} \\ <, & \text{si la prueba es de cola inferior} \\ >, & \text{si la prueba es de cola superior} \end{cases}$$

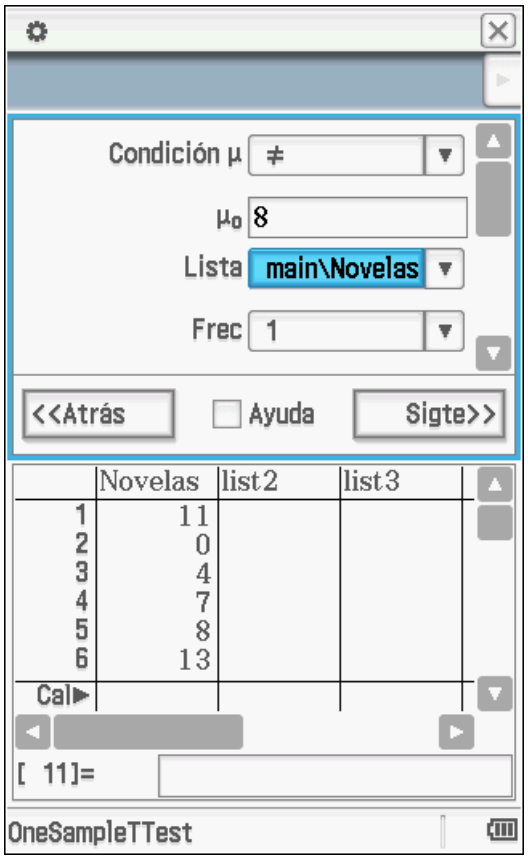
Si se conocen los parámetros estadísticos de la muestra, la sintaxis del comando es la siguiente: **OneSampleTTest "condición",** μ_0**,** $\bar{x}$ **, xσn−1 ,n**, siendo xσn−1 la desviación típica muestral, $\bar{x}$ la media y n el tamaño de la muestra.

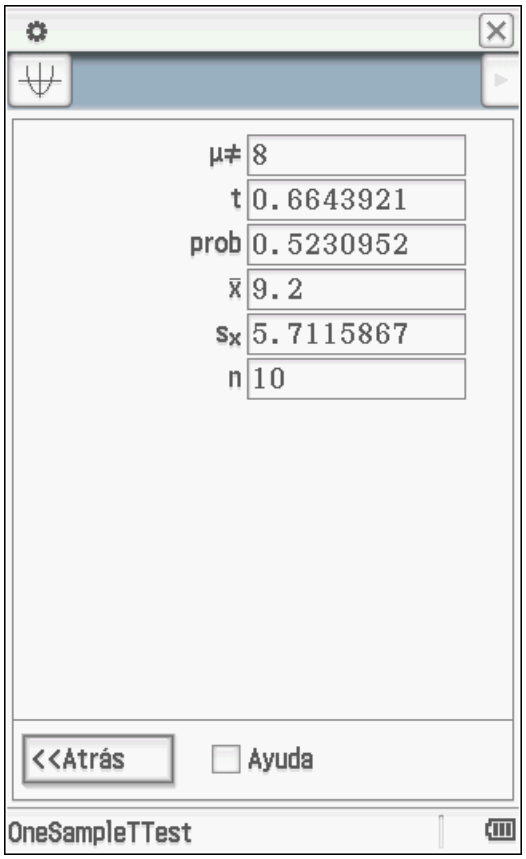
- Según un estudio, el número medio de novelas leídas cada curso por los universitarios españoles es de 8. Se toma una muestra de diez estudiantes obteniéndose los datos siguientes de novelas leídas en el último curso: 14, 10, 5, 11, 0, 4, 7, 8, 13, 20. ¿Podemos admitir que ese valor medio es válido para la población de estudiantes muestreada?

En el editor de listas de la aplicación Estadística, introduce los datos en la lista list1. A continuación, selecciona el comando Calc - - > Prueba y, en la lista desplegable selecciona *Prueba T 1 muestra* y elige la opción Lista. Toca el botón [Sigte].

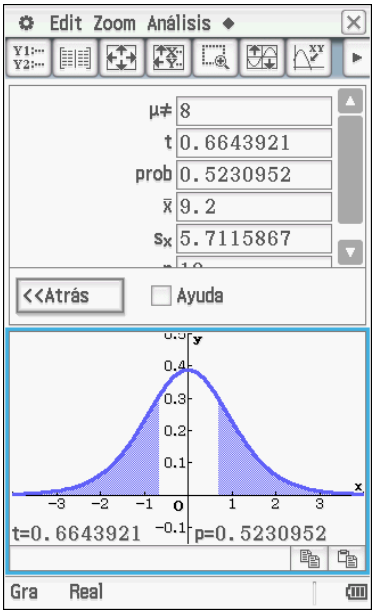


En la siguiente ventana introduce ≠ como condición, 8 como μ0 , Novelas como Lista y 1 como Frec. Toca el botón [Sigte] y observa que en la siguiente pantalla se muestra el estadístico del test, el pvalor, la media muestral, la cuasidesviación típica y el tamaño de la muestra. Como el p-valor es prob=0.5230952>0.05, no se puede rechazar la hipótesis nula. Es decir, la media de la población sigue siendo de 8 novelas.





Al tocar el botón aparece el gráfico con el estadístico y el p−valor.



- **Contraste de una proporción**

El comando OnePropZTest contrasta si el número de éxitos alcanza un proporción fija. Para una distribución normal se utiliza el estadístico:

$$Z = \frac{\frac{x}{n} - p_o}{\sqrt{\frac{p_o \cdot (1 - p_o)}{n}}}$$

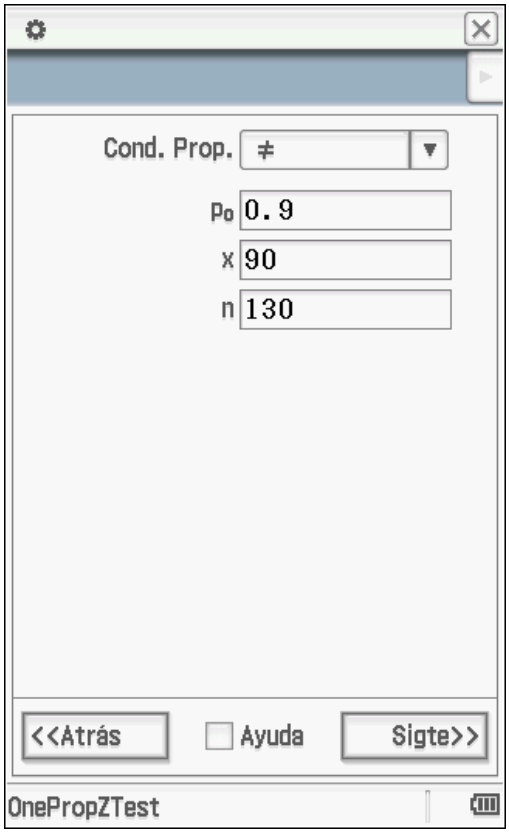
siendo po la proporción esperada de la población y n el tamaño de la muestra.

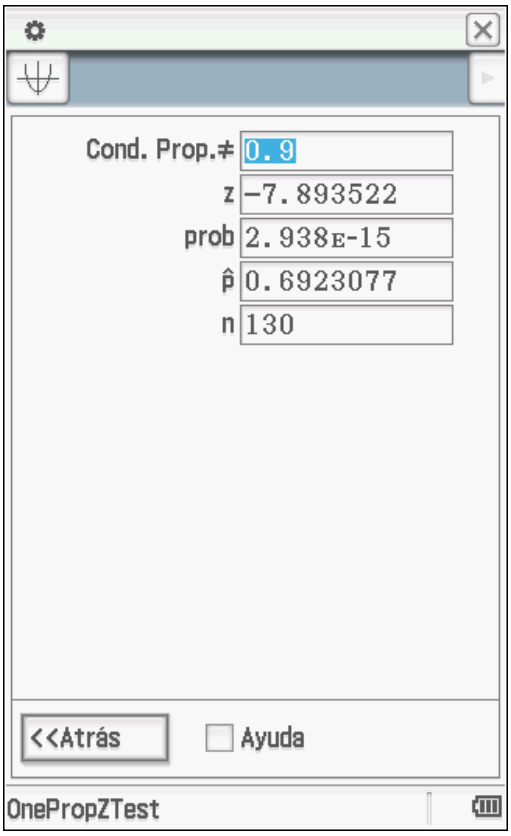
La sintaxis del comando es: OnePropZTest "cond", po, x, n, siendo cond = {≠, <, >}, po la proporción esperada en la población (entre 0 y 1), x el número de éxitos obtenidos en la muestra, n el tamaño de la muestra.

- Un medicamento es anunciado como eficaz al 90 por 100 para reducir las alergias en un período de 6 horas. Un hospital decide comprobarlo y suministra el medicamento a 130 pacientes obteniendo éxito en 90 de ellos. ¿Es cierta la eficacia que se afirma en el anuncio?

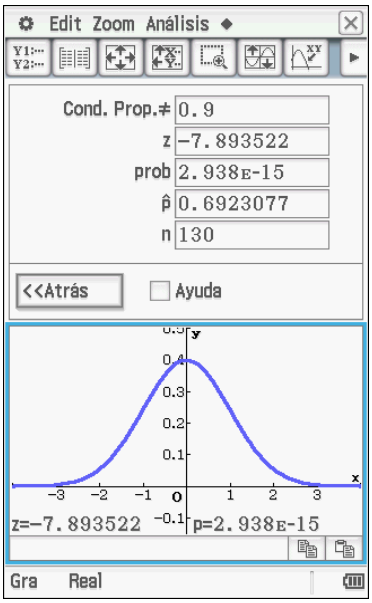
En la aplicación Estadística, selecciona el comando Calc. - - > Prueba y en la lista desplegable selecciona *Prueba Z 1 prop*. Toca el botón [Sigte].

En la siguiente ventana introduce ≠ como condición, 0.9 como p0, 90 como x y 130 como n. Toca el botón [Sigte] y observa que en la siguiente pantalla se muestra el estadístico del test, el p-valor, la proporción muestral y el tamaño de la muestra. Como el p-valor es prob=2.938x10^(−15)<0.05, se rechaza la hipótesis nula de que la eficacia del medicamento sea la anunciada.





Al tocar el botón  se muestra en pantalla el gráfico con el estadístico del test y el p−valor.



Actividades

1) ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas en una fila de butacas?

2) ¿De cuántas formas pueden mezclarse los siete colores del arco iris tomándolos de tres en tres?

3) En una clase de 35 alumnos se quiere elegir un comité formado por tres alumnos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?

4) ¿Cuántas quinielas de una columna han de rellenarse para asegurarse el acierto de los 15 resultados?

5) ¿Cuántas apuestas de Lotería Primitiva de una columna han de rellenarse para asegurarse el acierto de los seis resultados, de 49?

6) Con las cifras 1, 2 y 3, ¿cuántos números de cinco cifras pueden formarse? ¿Cuántos son pares?

7) Con las cifras 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4; ¿cuántos números de nueve cifras se pueden formar?

8) En el palo de señales de un barco se pueden izar tres banderas rojas, dos azules y cuatro verdes. ¿Cuántas señales distintas pueden indicarse con la colocación de las nueve banderas?

9) Halla el número de capicúas de 8 cifras. ¿Cuántos capicúas hay de nueve cifras?

10) Obtener 5 números aleatorios de 3 cifras.

11) Obtener 5 números enteros aleatorios menores que 10000.

12) Obtener 5 números aleatorios enteros de 1 cifra.

13) Realizar la simulación del juego "la carrera de caballos" pero usando la diferencia de las puntuaciones obtenidas en cada una de los dos dados.

14) Estimar la probabilidad de obtener una suma de 5 puntos al lanzar dos dados.

15) Estimar la probabilidad de obtener un número menor que 6 al lanzar un dado construido con un dodecaedro en el que sus caras están numeradas del 1 al 12.

16) De una baraja española sacamos una carta. Juan gana si sale una carta de oros, Luisa gana si obtenemos una figura y Ramón si aparece un as. ¿Quién tiene más posibilidades de ganar?

17) De una bolsa que contiene 20 bolas blancas, 12 rojas y 8 negras, se extrae una bola. a) ¿Qué color tiene más probabilidades de salir? b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar bola roja o negra? c) ¿Y de sacar una bola que no sea negra?

18) Se lanza una moneda cuatro veces. Calcular la probabilidad de que salgan más caras que cruces.

19) Un agente de seguros vende pólizas a cinco personas de la misma edad y que disfrutan de buena salud. Según las tablas actuales, la probabilidad de que una persona en estas condiciones viva 30 años o más es 2/3. Hállese la probabilidad de que, transcurridos 30 años, vivan: a) Las cinco personas. b) Al menos tres personas. c) Exactamente dos personas.

20) Si de seis a siete de la tarde se admite que un número de teléfono de cada cinco está comunicando, ¿cuál es la probabilidad de que, cuando se marquen 10 números de teléfono elegidos al azar, sólo comuniquen dos?

21) La probabilidad de que un hombre acierte en el blanco es 1/4. Si dispara 10 veces ¿cuál es la probabilidad de que acierte exactamente en tres ocasiones? ¿Cuál es la probabilidad de que acierte por lo menos en una ocasión?

22) En unas pruebas de alcoholemia se ha observado que el 5% de los conductores controlados dan positivo en la prueba y que el 10% de los conductores controlados no llevan puesto el cinturón de seguridad. También se ha observado que las dos infracciones son independientes. Un guardia de tráfico para cinco conductores al azar. Si tenemos en cuenta que el número de conductores es suficientemente importante como para estimar que la proporción de infractores no varía al hacer la selección.

a) Determinar la probabilidad de que exactamente tres conductores hayan cometido alguna de las dos infracciones.

b) Determine la probabilidad de que al menos uno de los conductores controlados haya cometido alguna de las dos infracciones.

23) Un laboratorio afirma que una droga causa efectos secundarios en una proporción de 3 de cada 100 pacientes. Para contrastar esta afirmación, otro laboratorio elige al azar a 5 pacientes a los que aplica la droga. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?

a) Ningún paciente tenga efectos secundarios.

b) Al menos dos tengan efectos secundarios.

24) Se ha medido la longitud de 13 plantas de una especie de soja, obteniendo los siguientes resultados:

20,2 22,9 23,3 20,0 19,4 22,0 22,1 22,0 21,9 21,5 19,7 21,5 20,9

Halla un intervalo de confianza para la longitud media de esta especie de plantas, con un nivel de significación del 5%.

25) Una muestra aleatoria de 100 alumnos que se presenta a las pruebas de Selectividad, revela que la media de edad es de 18,1 años. Halla un intervalo de confianza de 90% para la edad media de todos los estudiantes que se presentan a las pruebas, sabiendo que la desviación típica de la población es de 0,4.

26) En un sondeo electoral realizado a 273 personas de una población, se manifestaron 82 personas favorables a un determinado partido político. ¿Cuál es el intervalo de confianza del 95% para la proporción de la población total que votará a dicho partido?

27) Los gastos mensuales de las familias de un municipio se distribuyen normalmente. Si seleccionamos a 30 familias al azar y obtenemos como media 1500 euros de gastos y desviación típica 300 euros, halla un intervalo de confianza para la media de los gastos mensuales de las familias del municipio, con un nivel de confianza del 90%.

28) Se desea hacer un estudio de mercado para conocer el precio medio de los libros científicos. Para ello, se elige una muestra aleatoria formada por 34 libros y se determina que la media muestral es de 34,9 euros con una desviación típica de 4,5 euros. Halla el intervalo de confianza para el precio medio de los libros científicos con un nivel de confianza del 99%.

29) Cuando se introdujo hace varios años una determinada política, el 67% de la gente votó a favor. Se piensa que actualmente hay un porcentaje mayor de votantes que está a favor de la misma política. Una muestra aleatoria de 265 votantes proporciona un porcentaje de 73,2 individuos que están de acuerdo con dicha política. A partir de los datos de la muestra, ¿podemos admitir como válida nuestra suposición, con un nivel de confianza del 95%? ¿Y con un nivel de confianza del 99%?

30) Hace 10 años, el 52% de los ciudadanos estaban en contra de una ley. Recientemente, se ha elaborado una encuesta a 400 personas y 184 se mostraron contrarios a la ley. Con estos datos y con un nivel de significación del 0,01, ¿podemos afirmar que la proporción de contrarios a la ley ha disminuido?

31) Un experto, basado en los anteriores comicios, sostiene que si se celebran elecciones generales en este momento tan solo acudiría a votar el 48% de la población. No obstante, en un sondeo electoral realizado recientemente entre 1500 personas, 800 tienen intención de votar. ¿Supone esto, con un nivel de confianza del 99%, que el experto se equivoca y la intención de voto es mayor?

32) Hace algunos años, la media de estatura de los valencianos adultos era de 170 cm, con desviación típica σ=9 cm. Pasado el tiempo, un muestreo realizado a 36 adultos da una media de 172 cm. ¿Podemos afirmar, con una confianza del 90% que la estatura de los valencianos ha cambiado?

33) Se sabe, por trabajos realizados por expertos, que la velocidad lectora media de los niños de 6 años es de 40 palabras por minuto, siendo la desviación típica de 12. Hemos tomado una muestra aleatoria de 49 niños de 6 años y les hemos medido su velocidad lectora, resultando una media de 42 palabras por minuto. ¿Podemos afirmar que nuestra media es compatible con la de los expertos a un nivel de confianza del 99%?

34) Se sabe que el peso de los recién nacidos en una determinada población sigue una distribución normal de media 3600 g y desviación típica 280 g. Se toma una muestra al azar de 196 de estos recién nacidos y se calcula la media. ¿Cuál es la probabilidad de que esta media esté entre 3580 g y 3620 g?

35) En una prueba atlética de velocidad celebrada el año pasado se obtuvo una marca media de 72 segundos y una desviación típica de 2 segundos. Recientemente se ha efectuado una modificación en la prueba. Para determinar el efecto de este cambio, se sometieron a prueba a diez atletas obteniéndose los siguientes tiempos:

76,2 78,3 76,4 74,7 72,6 78,4 75,7 70,2 73,3 74,2

Suponiendo que la desviación típica es la misma que antes de la modificación:

a) ¿Podemos concluir que ha cambiado el rendimiento medio de los atletas en esa prueba?

b) ¿Podemos considerar que el rendimiento de los atletas ha aumentado?

c) Si sabemos que la desviación típica no es la misma que antes de la modificación, ¿cuáles serían entonces las respuestas a los apartados (a) y (b)?

36) En una muestra de 400 personas de una población hay 80 que tienen teléfono móvil. Calcula el intervalo de confianza aproximado para la proporción poblacional para un nivel de confianza del 95%.

37) Un laboratorio farmacéutico afirma que el número de horas que un medicamento de fabricación propia tarda en curar una determinada enfermedad sigue una variable normal con desviación típica igual a 8. Se trata un muestra de 100 enfermos a los que se les suministra el medicamento y se observa que la media de horas que tardan en curarse es igual a 32. a) Encuentra un intervalo de confianza, con un nivel de significación del 99% para la media del número de horas que tarda en curar el medicamento.

b) Si el nivel de significación es igual a 0,05, ¿cuál es el tamaño de la muestra que habría que considerar para estimar el valor de la media con un error menor de 3 horas?.

38) Se sabe que 2 de cada 8 habitantes de una ciudad utiliza el transporte público para ir a su trabajo. Se hace una encuesta a 140 de esos ciudadanos.

a) Halla el número esperado de ciudadanos que no van a su trabajo en transporte público.

b) Halla la probabilidad de que el número de ciudadanos que van al trabajo en transporte público esté entre 30 y 45.

39) En una muestra de 600 personas de una ciudad se observa que 30 son inmigrantes.

a) Halla un intervalo de confianza de nivel 0,95 para el porcentaje de inmigrantes en la ciudad.

b) Si se quiere estimar el porcentaje de inmigrantes con un error máximo de 0,02, ¿cuál es el tamaño de la muestra que habría que considerar si se una un nivel de significación del 1%?

40) El equipo directivo afirma que la media del recorrido que hacen los alumnos que asisten a un centro de bachillerato es, a lo sumo, igual a 2,5 km con una desviación típica igual a 0,5 km. Se toma una muestra de 81 alumnos y se obtiene para ellos un recorrido medio de 2,6 km.

a) ¿Se puede aceptar con un nivel de significación igual a 0,05 la afirmación del equipo directivo?

b) ¿La respuesta del apartado anterior es la misma si el nivel de confianza es del 99%?

41) Cuando una máquina funciona correctamente, produce piezas cuya longitud sigue una ley normal de media 12 cm y desviación típica 1 cm. El encargado del control de calidad ha tomado una muestra de 25 piezas obteniendo una media de 11,5 cm.

a) Contrasta la hipótesis de que la máquina está funcionando correctamente, con un nivel de significación igual a 0,05.

b) Calcula el intervalo de confianza al nivel de 95% para la longitud media de las piezas que está produciendo la máquina.

42) La duración de las llamadas de teléfono, en una oficina comercial, sigue una distribución normal con desviación típica 10 segundos. Se hace una encuesta entre 50 llamadas y la media de duración obtenida en esa muestra es 35 segundos. Calcula un intervalo de confianza al 99% para la duración media de las llamadas.

43) Preguntadas 100 personas de cierta ciudad, elegidas al azar, si leen el periódico al menos una vez a la semana, solo 40 han contestado que sí. Halla un intervalo de

confianza, con nivel de confianza del 99%, para la proporción de personas de esa ciudad que leen el periódico al menos una vez a la semana.

44) Al lanzar 5000 veces una moneda al aire salieron 3000 caras. ¿Se puede aceptar, con un nivel de significación del 0,05 que la moneda no está trucada?.

45) Con el fin de estimar la edad media de los habitantes de una gran ciudad, se tomó una muestra aleatoria de 300 habitantes, que arrojó una edad media de 35 años y una desviación típica de 7 años.

a) Halla el intervalo del 95% de confianza en el que se encontrará la edad media de la población.

b) ¿Qué nivel de confianza se debería usar para que el intervalo fuera 35 ± 0,44?

46) Usando el generador de números aleatorios de la calculadora, selecciona al azar cinco estudiantes de tu clase.

47) Una factoría de chocolate produce 5000 piezas de chocolate diarias. La división de control de calidad decide seleccionar al azar 50 piezas (el 1%) de chocolate para su inspección de calidad diaria (antes de analizar los datos estadísticamente). El inspector de calidad ha numerado las piezas de chocolate de acuerdo con su orden de producción, es decir, la primera pieza de chocolate producida en el día tiene el número 1, la segunda el número 2 y así sucesivamente. Usa la calculadora para seleccionar 50 piezas de las 5000.