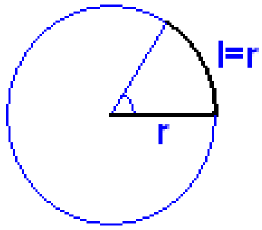
Tema 8

Medida de ángulos. Trigonometría

- Grados sexagesimales, centesimales y radianes
- Operaciones con grados
- Conversión entre unidades
- Funciones trigonométricas
- Actividades

GRADOS SEXAGESIMALES Y RADIANES

Se define un *grado sexagesimal* como la medida de un ángulo central cuyo arco de circunferencia correspondiente es la 1/360 parte de la longitud completa de dicha circunferencia.

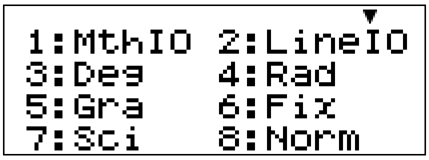


Un *radián* es el ángulo cuyo arco de circunferencia coincide con la medida del radio.

La calculadora también trabaja en grados centesimales, en la que un *grado centesimal* se define como la medida de un ángulo central cuyo arco corresponde a 1/400 de la longitud de la circunferencia.

La calculadora científica tiene por tanto, tres modos de trabajar los ángulos: grados sexagesimales (**Deg**), centesimales (**Gra**) y radianes (**Rad**).

La elección de la medida del ángulo se realiza a través de la combinación de teclas SHIFT MODE.



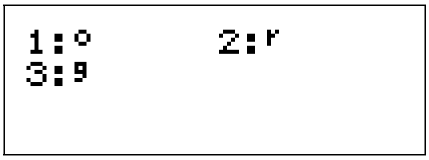
La elección se entenderá como modo de trabajo por defecto, aunque en todo momento se podrá introducir un ángulo expresado en cualquier medida, añadiendo el símbolo correspondiente.

Para introducir un ángulo en una determinada medida hay que proceder en la forma siguiente:

1. Escribir el valor correspondiente al ángulo.

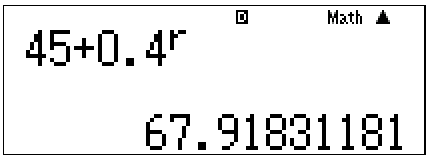
2. Pulsar la combinación de teclas SHIFT Ans.

   Aparecerán las opciones siguientes:



3. Seleccionar la opción correspondiente a la medida en la que se desea expresar el ángulo (º grados sexagesimales, r radianes y g grados centesimales).

Esto permitirá realizar operaciones con ángulos expresados en distintos sistemas de unidades.



La secuencia de teclas que hemos pulsado ha sido:

[4] [5] [+] [0] [·] [4] [SHIFT] [Ans] [2] [=]

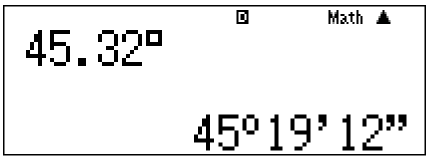
OPERACIONES CON GRADOS

Con ayuda de la tecla [º ’ ”] se podrán realizar operaciones con medidas de ángulos expresados en grados, minutos y segundos o expresados en forma decimal, realizando la conversión entre las dos formas de representación.

Por ejemplo, para convertir la medida del ángulo 42,35º a grados minutos y segundos, basta con pulsar la secuencia de teclas siguientes, una vez introducida la expresión decimal anterior:

[º ’ ”] [=]

Obtendremos el resultado siguiente:

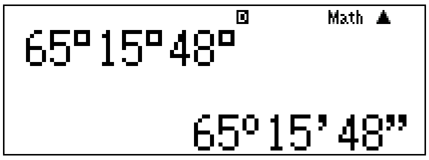


Para realizar la conversión inversa, el proceso comenzará introduciendo los grados, minutos y segundos de la medida del ángulo, pulsando después de cada valor la tecla [°’’’].

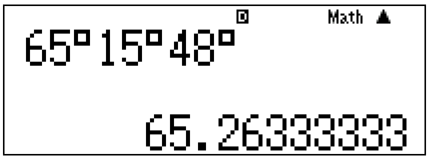
Por ejemplo, para obtener el valor decimal del ángulo 65º 15’ 48”, pulsamos las teclas siguientes:

[6] [5] [°’’’] [1] [5] [°’’’] [4] [8] [°’’’] [=]

Una vez introducido el ángulo que aparecerá en la forma siguiente:



Basta pulsar [SHIFT] [°’’’] para obtener el valor decimal del ángulo.



CONVERSIÓN ENTRE UNIDADES

La equivalencia entre grado y radianes es de π **radianes = 180°.**

El radián es una unidad extremadamente útil para medir ángulos, puesto que la mayor parte de los ángulos más usados se expresa como múltiplo o divisor de π.

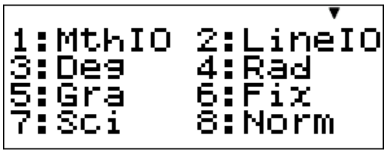
¿Sabías que…

El término radián fue usado por primera vez en 1871 por Mauro Thomson, hermano del inventor de la escala de temperatura Kelvin, William Thomson (también conocido como lord Kelvin).

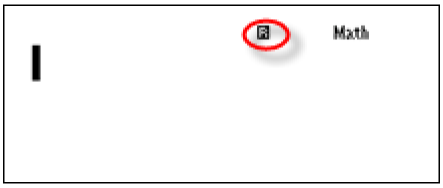
EJEMPLO 1

Convertir el ángulo de 30° a radianes

Lo primero será establecer radianes como medida de ángulo en la calculadora la calculadora, pulsando la secuencia de teclas SHIFT MODE 4



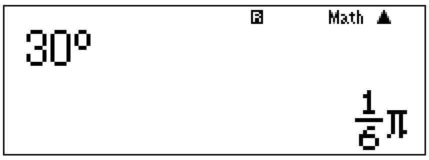
Si ya lo tenemos, debería aparecer una letra **R** en la parte superior de la pantalla de la calculadora.



A continuación, introducimos la medida del ángulo, indicando que está expresado en grados sexagesimales.

3 0 SHIFT Ans 1 =

El resultado será el valor del ángulo expresado en radianes.

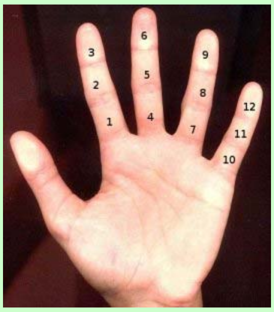


De manera análoga se realizará la conversión inversa.

¿Sabías que…

El sistema sexagesimal tiene su origen en la antigua Babilonia. Si con el dedo pulgar de la mano derecha empezamos a contarnos las falanges del resto de dedos, el resultado será 12. En la antigüedad, cada vez que se llegaba hasta 12, se levantaba un dedo de la mano opuesta antes de volver a empezar. De esta manera, 12 falanges contadas x 5 dedos de la otra mano = 60.

Además, el sistema sexagesimal permitía realizar unos cálculos relativamente sencillos con sus fracciones, ya que el 60 posee una gran cantidad de divisores y tiene la particularidad de que es el número más pequeño que se puede dividir por 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

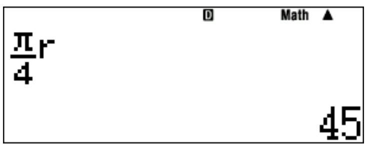


EJEMPLO 2

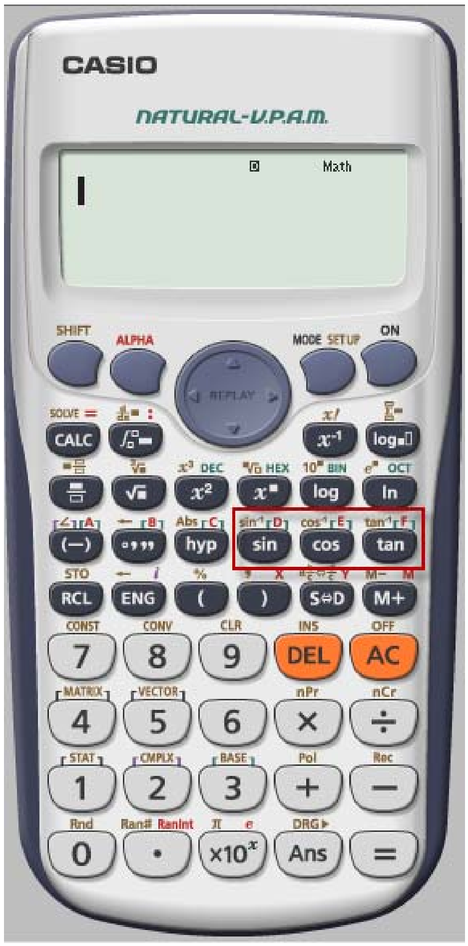
Convertir $\frac{\pi}{4}$ *radianes en grados*

En primer lugar, seleccionamos en la calculadora el modo sexagesimal para la medida de los ángulos (cuando lo hayamos hecho nos debería aparecer una **D** en la parte superior de la pantalla): SHIFT MODE 3

A continuación, introducimos:



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



En la historia de las matemáticas, la trigonometría siempre ha tenido una gran importancia. Utilizando trigonometría el hombre ha sido capaz de obtener mediciones imposibles. Por citar algunos ejemplos, con trigonometría se han calculado distancias y alturas inalcanzables, se ha medido el radio de la tierra con una fiabilidad reseñable, se han aproximado las verdaderas distancias que hay entre cuerpos celestes.

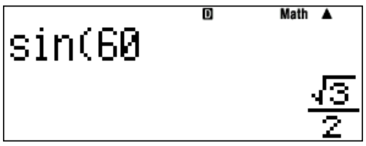
En la calculadora disponemos de las teclas para obtener de manera directa, los valores del seno, coseno y tangente de cualquier ángulo; así como las funciones inversas arco seno, arco coseno y arco tangente, representadas por $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$.

EJEMPLO 3. Funciones trigonométricas expresadas en grados

3.1. Calcular sen 60°

Para trabajar con funciones trigonométricas en el sistema sexagesimal, pondremos la calculadora en grados $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{3}$

Escribimos $\boxed{\text{sin}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$

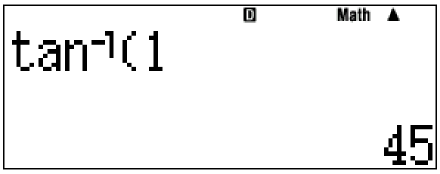


(Nótese que no es necesario cerrar el último paréntesis. El hecho de cerrarlo o no, no alterará el resultado).

3.2. Calcular x si $tgx = 1$

Al despejar la x, tenemos que utilizar la función inversa de la tangente.

Escribimos [SHIFT] [tan] [1] [=]



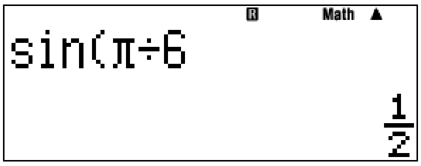
EJEMPLO 4. Funciones trigonométricas expresadas en radianes

Al trabajar con radianes, no debemos olvidar cambiar a radianes el modo de la calculadora [SHIFT] [MODE] [4]

4.1. Calcular $sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Encontramos el símbolo π en la calculadora en la parte inferior del teclado, en el botón [$\times 10^x$]. Para activarlo, debemos usar previamente la tecla [SHIFT].

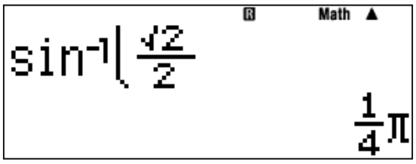
Ponemos [sin] [SHIFT] [$\times 10^x$] [÷] [6] [=]



Puede observarse que de no haber hecho el cambio a radianes, el resultado hubiera sido otro diferente. En realidad, realizar esta operación en la calculadora en modo grados supone calcular el seno de 0,52 (menos de un grado sexagesimal). Habrá que hacer mucho hincapié en esto, pues los alumnos pueden olvidarse y errar todos los resultados.

4.2. Calcular x si $senx = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Pulsamos la siguiente secuencia de teclas:



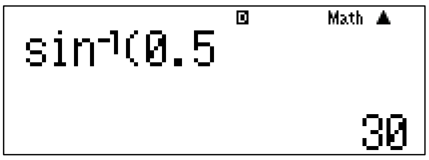
Conviene destacar que la calculadora sólo nos ofrece las funciones trigonométricas del primer cuadrante. Si queremos calcular un ángulo de otro cuadrante, el enunciado deberá especificarlo.

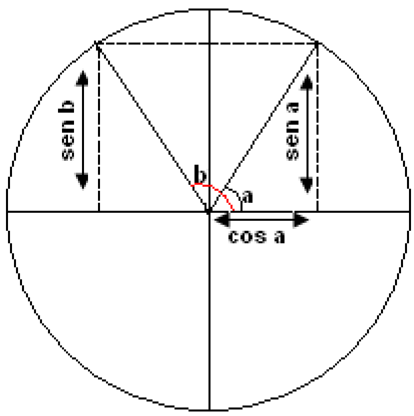
Es éste un ejercicio deductivo bastante estimulante para el alumno que empieza a tener contacto con las funciones trigonométricas.

EJEMPLO 5

Calcula el ángulo del segundo cuadrante cuyo seno vale 0,5.

De nuevo en modo *grado*, obtenemos que el seno de 30 es 0,5. Pero este no es el resultado requerido, pues nos pedían un ángulo del segundo cuadrante.





sen a = sen b

Sobre la circunferencia goniométrica (circunferencia centrada en el origen y de radio 1), se puede definir el *seno de un ángulo a* como la medida de la proyección de dicho ángulo sobre el eje de ordenadas. De igual manera, se define el *coseno de un ángulo a* como la proyección sobre el eje horizontal o de abscisas.

Si observamos la circunferencia goniométrica, podemos observar que existen dos ángulos cuyo seno vale lo mismo. Así pues, se puede deducir que si sen30=0,5 entonces el seno de su ángulo suplementario también valdrá 0,5. En este ejemplo concreto, el ángulo pedido era 150º.

ACTIVIDADES

1. Calcular x en radianes y en grados

a) cosx=0,6 b) tgx= 2 c) senx=1/2

2. Calcular

$$a)\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \quad b)sen\left(3\pi\right) \quad c)tg\left(\frac{\pi}{5}\right) \quad d)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$

3. ¿Cuántos radianes son los siguientes ángulos?

a) 18° b) 52° c) 125° 30’45’’ d) 270°

4. ¿Cuántos grados son los siguientes radianes?

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{10}$ c) $\frac{7\pi}{4}$ d) π

OTRAS ACTIVIDADES PARA PRACTICAR CON LA CALCULADORA

5. Calcular el ángulo del tercer cuadrante cuyo seno valga -0,5

6. Calcular el ángulo del cuarto cuadrante cuyo coseno valga $\frac{\sqrt{2}}{2}$

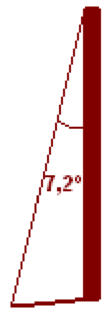
7. El ángulo con el que un observador que mide 1,60 m ve la altura de una torre es de 45º 15' . Si la distancia del observador a la torre es de 72 m, calcula la altura de la torre.

8. Eratóstenes y el radio de la tierra

Partiendo de la suposición falsa de que la Tierra es totalmente esférica, el griego Eratóstenes midió el radio de nuestro planeta con una precisión asombrosa y utilizando un método que podía ser interesante representar en clase.

El día del solsticio de verano observó que en la ciudad de Siena los rayos del sol llegaban perpendicularmente (comprobó que se podía ver el fondo de un pozo). Al mismo tiempo, hizo que en la ciudad de Alejandría se midiera el ángulo de inclinación del sol, utilizando un palo clavado en el suelo.

Dicho ángulo fue de 7,2º.



Responde las cuestiones siguientes:

1. ¿Qué fracción representan 7,2º con respecto a 360º? (Eratóstenes supuso que la Tierra era una esfera perfecta). Simplifica la fracción. Solución = **A**

La distancia entre Alejandría y Siena era de 800 km. Luego, 800 km es igual a la fracción **A** de la circunferencia de la Tierra.

2. Utilizando el valor **A**, ¿cuál es la circunferencia completa de la Tierra, según calculó Eratóstenes? Solución = **L**

Aplicando que la longitud de una circunferencia es

$$L = 2\pi r \text{ , con } r = \text{radio}$$

3. Despeja r en la ecuación anterior, utilizando la longitud **L** que estimó Eratóstenes.

4. ¿Cuál fue el error que cometió Eratóstenes?

Indicación: Hoy día se estima que el radio de la tierra es de 6378 Km. Sorprendente el método de Eratóstenes, ¿no? Evidentemente, la pequeña diferencia estriba en la suposición de que la Tierra era una esfera perfecta.