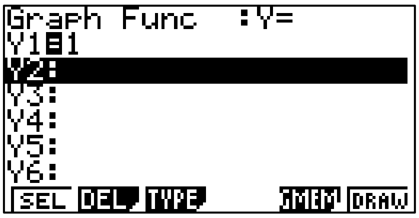
Cinemática

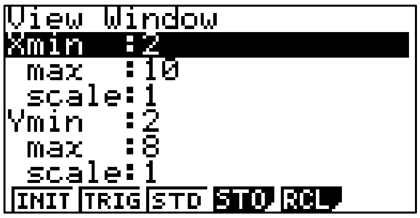
El siguiente estudio se ha realizado con el modelo fx-9750G Plus de Casio, los demás modelos de calculadora gráfica Casio funcionan de manera similar al anterior.

La resolución gráfica de problemas de móviles con la calculadora gráfica presenta un inconveniente, los ejes de coordenadas están etiquetados como *x* (eje de abscisas) e *y* (eje de ordenadas). La calculadora representa funciones *y(x)*, pero nuestro interés se centrará en funciones *x(t)*, de manera que tenemos un cambio de nomenclatura: $y \leftrightarrow x \quad x \leftrightarrow t$.

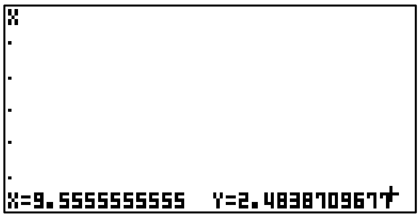
Para obtener una correcta representación de los gráficos con sus ejes correspondientes, crearemos una pantalla de fondo (*Background*) que nos permita representar los ejes de coordenadas adecuados.

Desde el menú GRAPH dibujaremos una función con la escala de ejes adecuada para que no aparezcan ni su gráfica, ni los ejes de coordenadas en pantalla.



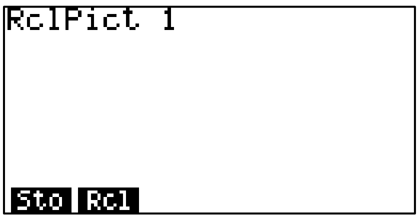


Pulsamos F6 (**DRAW**) para dibujar la función de manera que obtenemos la pantalla vacía. La opción **Text** del submenú **Sketch** (F4), nos permitirá añadir los nombres de los ejes que nos interesan.



Pulsando OPTN F1 (**PICT**) F1 (**STO**) y por ejemplo F1 (**Pict1**), almacenamos la imagen para que podamos utilizarla más adelante.

Desde el menú RUN podemos ver como ha quedado la imagen, si pulsamos OPTN F1 (**PICT**) F2 (**Rcl**) **1** EXE



Análogamente, podemos crear las etiquetas para los gráficos *y(t)* (Pic2), *v(t)* (Pic3) y *a(t)* (Pic4):

Resolución gráfica de problemas de móviles con m.r.u.:

$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0)}$ $\qquad v(t) = v_0 = constante \qquad a(t) = 0$

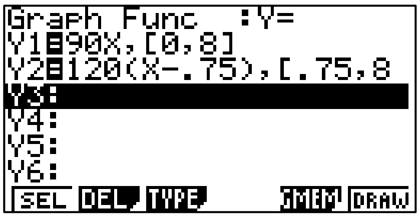
1. Un camión sale de una población por autopista a 90 km/h. Tres cuartos de hora más tarde, un coche sale de la misma población a 120 km/h.

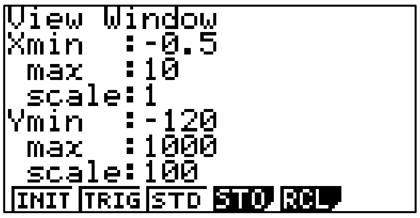
a) Representa y resuelve gráficamente el problema.
b) ¿Cuánto tardará el coche en avanzar el camión?
c) ¿A qué distancia de la población de salida se realizará el adelantamiento?

El sistema de ecuaciones será:

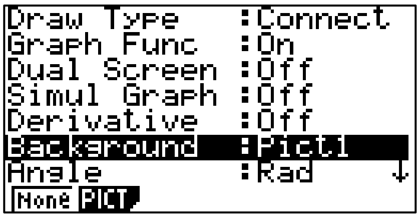
Camión: $x_1 = 90\,t$

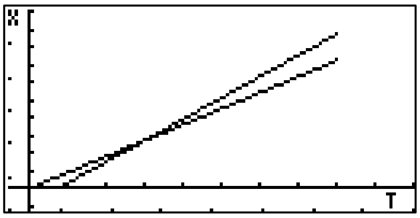
Coche: $x_2 = 120\,(t - 0'75)$

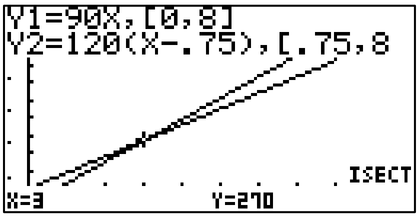




Como queremos que al representar los ejes salgan las etiquetas correctas, añadimos el background ***Pict1*** *de la manera siguiente:* SHIFT MENU (**SET UP**). EXE *y dibujamos el sistema.*







Con F5 (**G-Solv**) F5 (**ISCT**) *resolvemos las preguntas b y c del enunciado.*

x = 3 → t = 3 horas → el coche tardará 2 h 15 min en adelantar al camión

y = 270 → x = 270 km

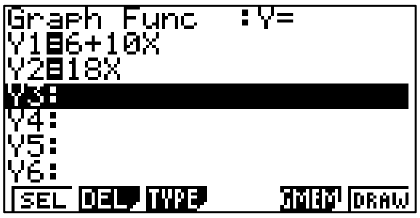
2. Un ciclista que va a 18 km/h pretende alcanzar a otro ciclista que va a 10 km/h y le lleva una ventaja de 6 km. ¿Cuánto tardará en alcanzarlo? ¿Qué distancia recorrerá para conseguirlo?

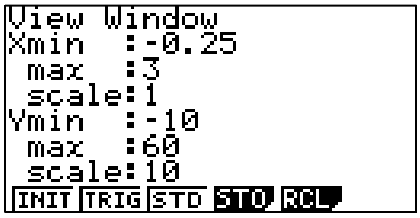
¿Cuánto hace que pasó el primer ciclista ha pasado por el lugar donde estaba el segundo ciclista inicialmente?

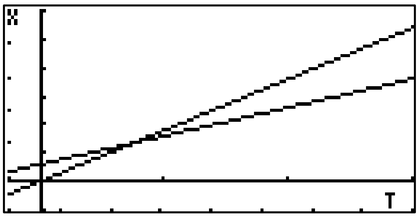
El sistema de ecuaciones será:

Ciclista A: $x_1 = 6 + 10t$

Ciclista B: $x_2 = 18\,t$



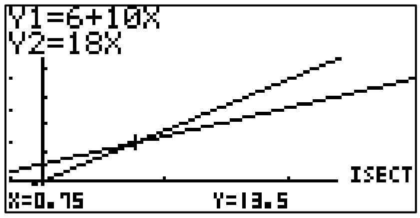




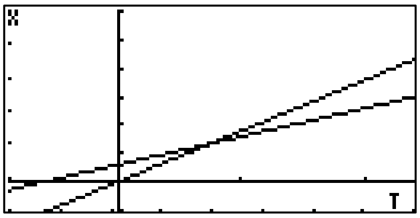
Con F5 (**G-Solv**) F5 (**ISCT**):

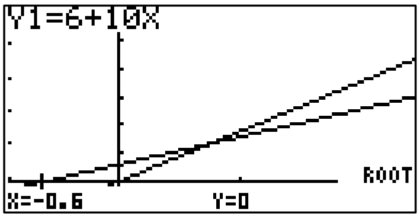
x = 0'75 → t = 45 minutos

y = 13'5 → x = 13'5 km



Para saber cuánto hace que el ciclista A pasó por dónde se encontraba B inicialmente, buscamos la intersección con el eje T (X).
Como dicha intersección no aparece en pantalla, desplazamos el gráfico con las teclas de cursor hacia la izquierda hacemos F5 (**G-Solv**) F1 (**ROOT**), seleccionando Y1 = 6 + 10X





Hacía 0'6 h = 36 minutos que había pasado el primer ciclista(A) por el punto inicial del segundo (B).

3. Un autocar emprende un viaje de Barcelona a Madrid por autopista a 90 km/h. Media hora más tarde sale otro autocar en la misma dirección a 100 km/h. (distancia Barcelona-Madrid = 640 km aprox.)

a) ¿Atrapará el segundo autocar al primero antes de llegar a Madrid?
b) Si es así, ¿a qué distancia de Barcelona se realizará el adelantamiento?
c) ¿Cuánto tardará cada autocar en llegar a Madrid?

4. Dos poblaciones A y B distan 25 km. Una persona sale caminando de A hacia B a una velocidad de 4 km/h. Simultáneamente sale de B hacia A otro caminante a 6 km/h. Calcula el tiempo que tardan en encontrase y la distancia que ha recorrido cada uno en ese instante.

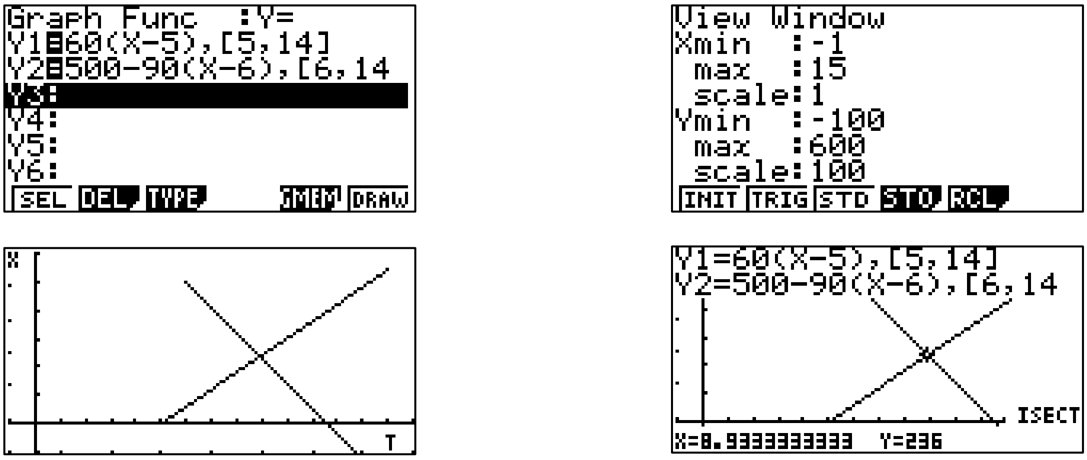
El sistema de ecuaciones será:

Caminante A: $x_1 = 4\,t$

Caminante B: $x_2 = 25 - 6t$

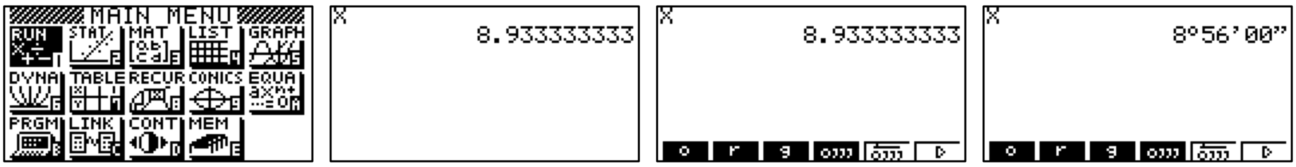
5. Un caminante y un ciclista avanzan por una carretera, uno hacia el otro, a velocidades de 6 km/h y 24 km/h, respectivamente. ¿Cuánto tardarán en cruzarse si la distancia que los separa es de 8 km? ¿Qué distancia recorre el caminante?

6. Un coche sale de la ciudad A a las 5 h a.m con una velocidad constante de 60 km/h en dirección a la ciudad B, la cual se encuentra a 500 km. A les 6 h a.m., otro coche sale de la ciudad B en dirección a la ciudad A con una velocidad constante de 90 km/h. ¿A qué hora se cruzaran, y a qué distancia de A ocurrirá tal hecho?



A les $8,9\widehat{3}$ *horas en el kilómetro 236.*

Podemos pasar el resultado a sistema sexagesimal desde el menú RUN*. Recordemos que los valores de X y de Y quedan almacenados en las memorias X e Y respectivamente.*
Pulsamos [ALPHA] [+] **(X)** [EXE] *y a continuación* [OPTN] [F6] [F5] **(ANGL)** seguido de [F5] [°' "]
Obtenemos así el resultado expresado en 'horas, minutos y segundos'.



A les 8 horas 56 minutos en el kilómetro 236.

7. En el problema anterior, ¿cuál de los dos coches llegará antes a su destino?

8. Un camión de transporte realiza, una vez por semana la ruta entre las ciudades A y B. Si va a 80 km/h, tarda-hi tres horas más que si va a 100 km/h. ¿Qué distancia hay entre las dos ciudades?

Movimiento vertical

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} g\, t^2$$

$$v_y(t) = v_{0y} + g\, t$$

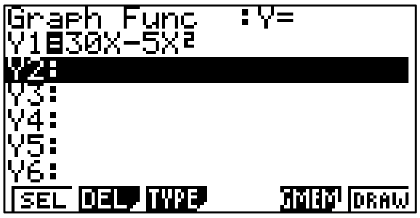
$$g = -10 m/s^2$$

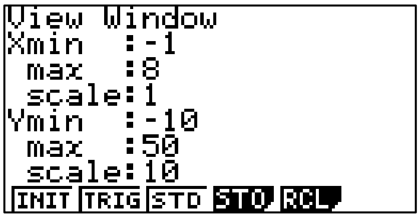
**Para simplificar se ha escogido $t_0 = 0$*

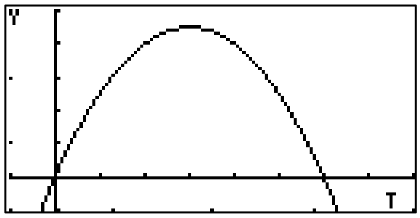
9. Se lanza hacia arriba un objeto con una velocidad de 30 m/s. ¿Qué altura alcanzará y en cuánto tiempo?. ¿Cuándo llegará al suelo? ¿A qué altura se encuentra después de 1 segundo del lanzamiento? ¿En qué instantes de tiempo se encuentra a 20 m de altura? Realiza el gráfico correspondiente a la velocidad v(t) y halla la velocidad que llevará en el momento de llegar al suelo. ($g = -10$ m/s^2).

$y = 0+30t-5t^2$

Utilizar las opciones de F5 (**G-Solv**):
ROOT MAX Y-CAL X-CAL





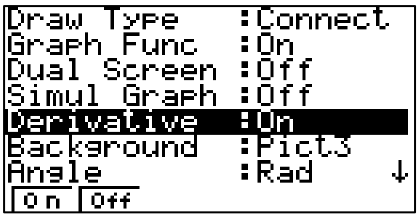


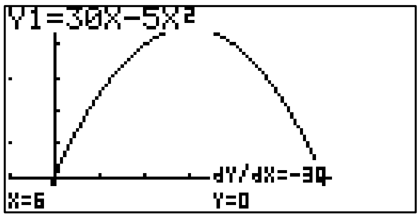
(es necesario un nuevo background Pict2 con y(t))

10. A partir del gráfico y(t) calcula qué velocidad llevará el objeto del ejercicio anterior en el momento de tocar suelo.

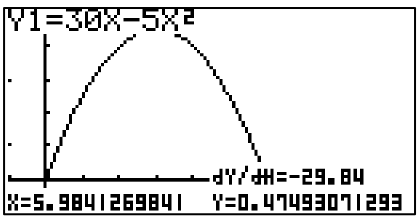
Recordar que $v(t_0) = \left(\frac{d\, y(t)}{dt}\right)_{t=t_0}$

Utilizar la opción de F4 (**Sketch**) : F2 (**Tang**) (*o bien* F1 (**Trace**)) *activando previamente* SHIFT MENU **(Set Up)** *la opción* **Derivative : On**

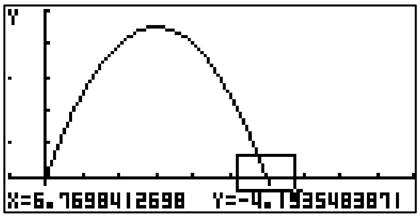


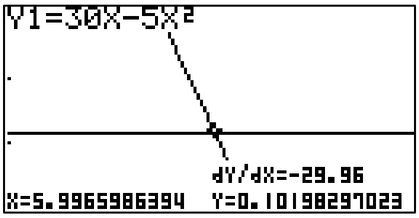


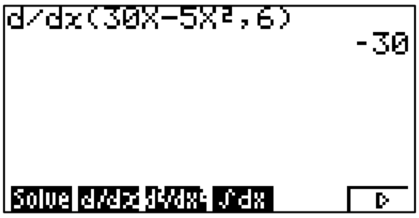
La elección de la escala de los ejes puede dar lugar a que no obtengamos el valor de la derivada con la exactitud deseada. Cambiemos la escala de los ejes y hagamos Xmax = 10 y comprobémoslo:



Para una mejor precisión podemos ampliar la zona donde queremos calcular la derivada con la opción SHIFT F2 (**ZOOM**) F1 (**BOX**) y *a continuación* F1 (**Trace**)





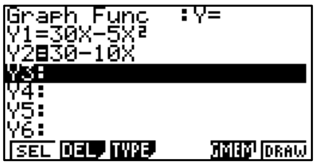


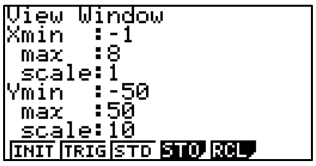
Si queremos un resultado más preciso debemos ir al menú RUN:

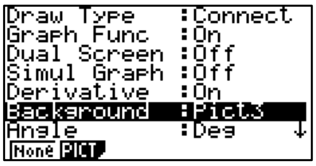
Escogemos OPTN F4 (**CALC**) F2 (**d/dx**) y *escribimos:*

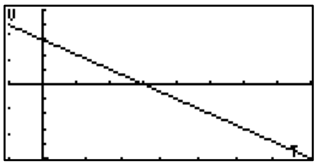
d/dx(30x – 5x^2 , 6) EXE *obteniendo el valor de* –30m/s

11. Dibuja el gráfico v(t) del ejercicio 16, y a partir del mismo, calcula:

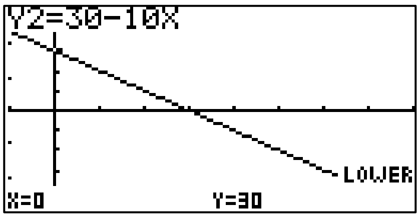


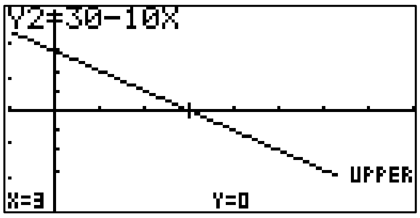


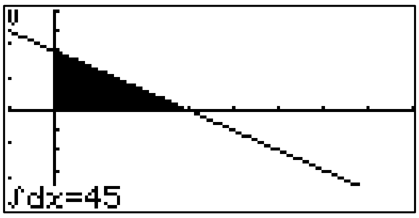




a) la altura máxima $h_{max} = y(3) = y(0) + \int_0^3 30 - 10t\,dt = 0 + \int_0^3 30 - 10t\,dt$

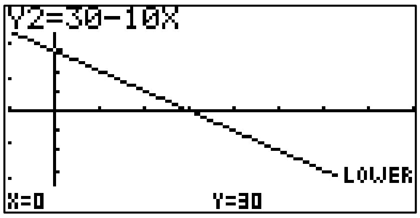


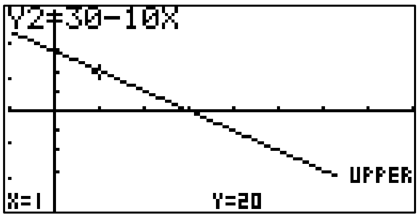


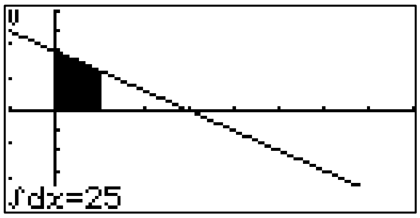


h_{max} = 45 metros

b) la posición 1 segundo después del lanzamiento $y(1) = y(0) + \int_0^1 30 - 10t\,dt$

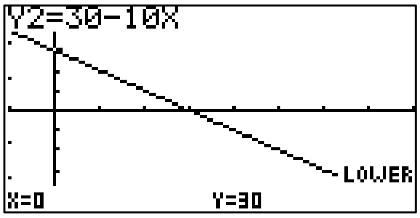


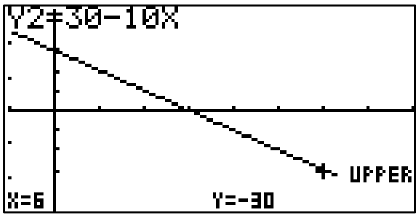


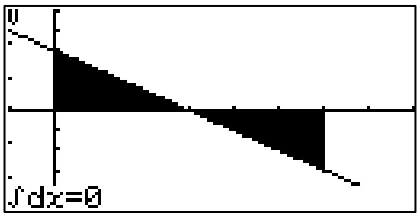


y(1) = 25 metros

c) Comprueba que al llegar al suelo (t=6) y(6) = 0. $y(6) = y(0) + \int_0^6 30 - 10t\,dt$







12. A partir del gráfico a(t) del ejercicio 16 calcular:

a) la velocidad al llegar al suelo. $v(6) = v(0) + \int_0^6 -10dt = 30 + \int_0^6 -10dt$

b) la velocidad para t = 1 y para a t = 4 segundos.

13. Desde una ventana situada a 20 m del suelo se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad de 10 m/s. Calcula:

a) La altura máxima que alcanza y el tiempo que tarda en alcanzar dicha altura.
b) El tiempo total que la piedra permanece en el aire.
c) La velocidad con que llega al suelo.

14. Desde la ventana de un quinto piso, se lanza una piedra verticalmente hacia abajo con una velocidad de 5m/s. Al mismo tiempo se lanza otra piedra desde el segundo piso en la misma vertical y hacia arriba con una velocidad de 15 m/s. Si cada piso tiene una altura de 3 m, calcula:

a) En qué instante y a qué altura colisionan las dos piedras.
b) La velocidad de las dos piedras en el momento de colisionar.
c) En el momento de la colisión, la segunda piedra, ¿subía o bajaba?

15. Se deja caer una bola desde una altura de 200 m. Calcula:

a) El tiempo que tarda en llegar al suelo.
b) La velocidad en ese instante.
c) La velocidad a los dos segundos de soltar la bola.

16. Desde el suelo se lanza una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad de 30 m/s. En el mismo instante, se deja caer otra piedra desde una altura de 20 m. Determina a qué altura y en que instante se encontrarán.

17. Desde un puente lanzamos verticalmente y hacia arriba una piedra con una velocidad inicial vertical de 9m/s. Calcula la altura máxima de la piedra y el tiempo que tardará en pasar por delante de nosotros. Si la piedra llega al río 2,3 segundos después de ser lanzada, ¿a qué altura está el puente sobre el río?

Tiro parabólico

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \qquad v_x(t) = v_{0x}$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}g\,t^2 \qquad v_y(t) = v_{0y} + gt \qquad g = 10\ m/s^2$$

Para simplificar escogemos $t_0 = 0$

18. Se lanza una pelota desde una torre de 50 m de altitud a una velocidad de 100 m/s que forma un ángulo de 30º con la horizontal. Calcula:

a) La gráfica de la trayectoria: *y(x)*
b) La altura máxima alcanzada.
c) El tiempo del movimiento y el alcance.
d) La velocidad cuando llega al suelo.

Ecuaciones del movimiento:

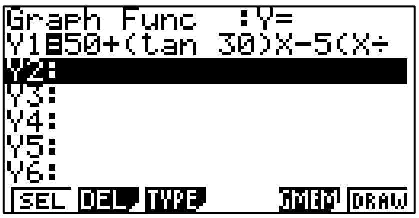
$$x(t) = 0 + (100\cos 30^\circ)\,t$$
$$y(t) = 50 + (100\,sin30^\circ)\,t - 5t^2$$

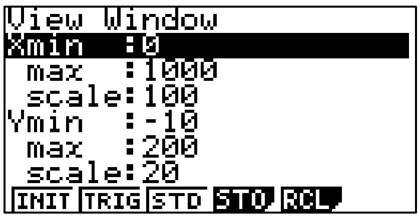
*De la primera ecuación aislamos **t**:* $t = \dfrac{x}{100\cos 30^\circ}$

Sustituimos en la segunda y ya tenemos la ecuación de la trayectoria:

$$y(x) = 50 + \frac{100\,sin30^\circ}{100\cos 30^\circ}x - 5\left(\frac{x}{100\cos 30^\circ}\right)^2 = 50 + tan30^\circ\,x - 5\left(\frac{x}{100\cos 30^\circ}\right)^2$$

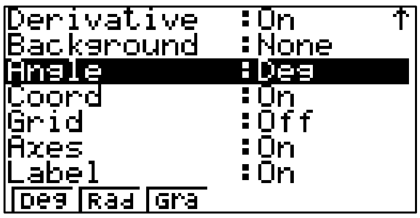
Desde el menú GRAPH *dibujamos la función:* Y1 = 50+(tan 30) x – 5 (x+(100 cos 30))^2
Escogemos la escala de ejes siguiente:



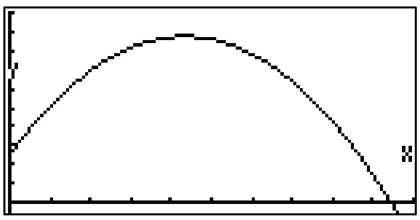


Trabajamos con grados sexagesimales y etiquetamos los ejes:

SHIFT MENU (**Set Up**) *Angle : Deg*
Label : On
Background: None

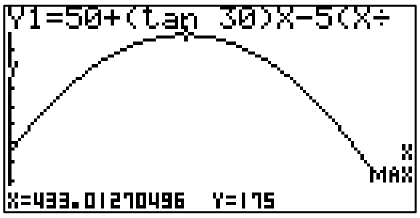


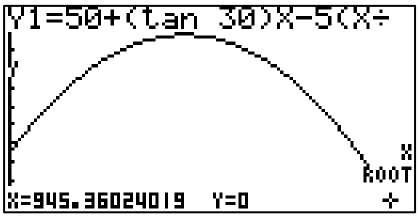
Pulsamos F6 (**DRAW**) *y obtenemos la gráfica deseada.*



Para hallar la máxima altura hacemos F5 (**G-Solv**) F2 (**MAX**) *obteniendo:*

$h_{max} = 175\ m$



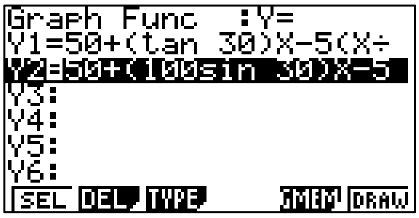


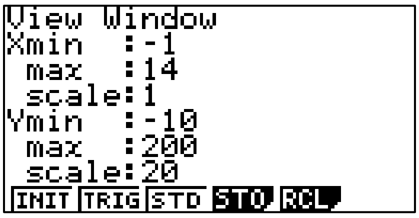
Para calcular el alcance del movimiento pulsamos F5 (**G-Solv**) F1 (**ROOT**) *obteniendo:*

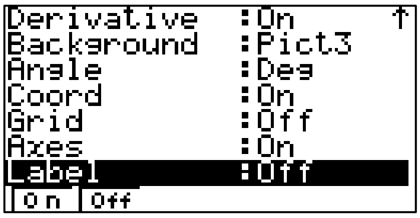
$d = 945{,}36\ m$

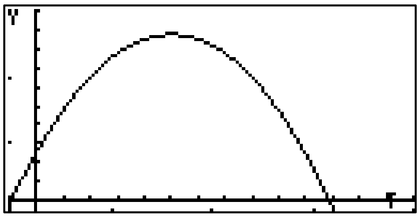
Para determinar el tiempo total del movimiento y la velocidad en el momento de llegar al suelo, no podemos usar esta representación, ya que no aparece explícitamente la variable tiempo.

Representemos pues y(t): Y2 = 50+(100 sin 30) x – 5 x^2



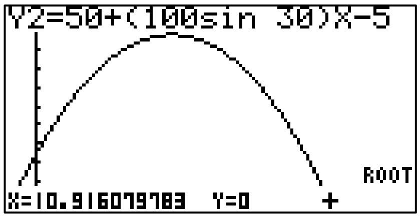




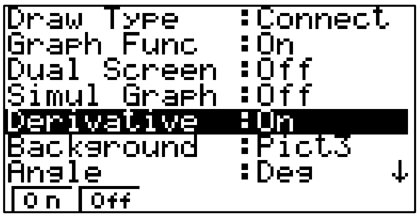


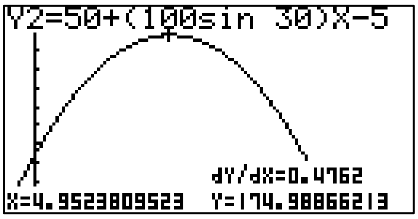
Para hallar la duración del movimiento pulsar F5 (**G-Solv**) F1 (**ROOT**) *obteniendo:*

x = t = 10,92 s.

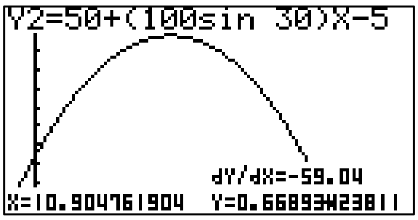


Para calcular la velocidad de llegada al suelo, utilizar la opción de F1 (**Trace**) *activando previamente* SHIFT MENU (**Set Up**) *la opción* **Derivative : On**





Si desplazamos el cursor por la gráfica, primero obtenemos otra vez el máximo de la función a y = 175 dY/dX=0 x = t = 5 s.



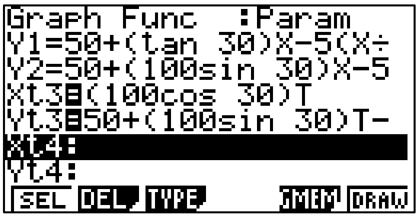
Finalmente obtenemos el valor de la velocidad vertical en el instante de llegar al suelo $v_y = -59\ m/s$

La velocidad de llegada al suelo será $v = (100 \cos 30º, -59)\ m/s = (86'6\ ,\ -59)\ m/s$

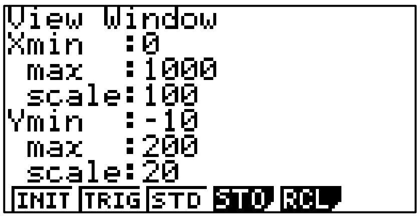
Resolución del problema con gráficos paramétricos:

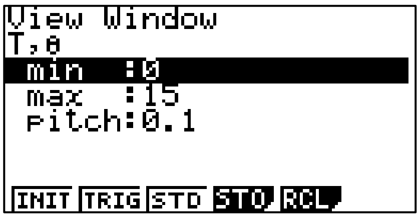
Desde el menú GRAPH *seleccionamos el gráfico Y3 con el cursor, pulsamos* F3 (**TYPE**), y *escogemos la opción* F3 (**Parm**):

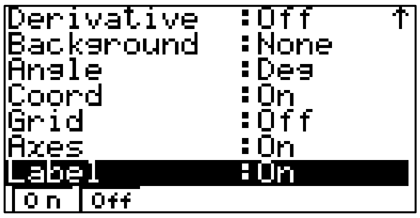
Escribimos: Xt3 = (100 cos 30) T
Yt3 = 50 + (100 sin 30) T – 5 T^2



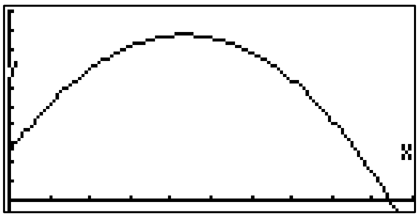
Escogemos la escala de los ejes adecuada:

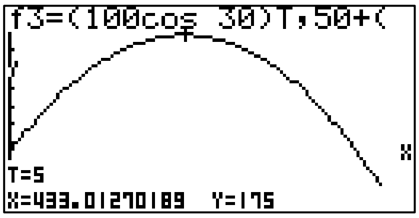






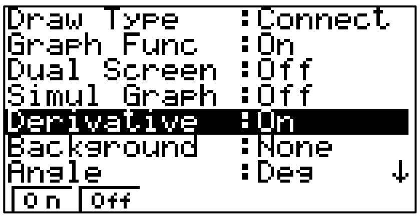
Pulsamos F6 (**DRAW**) *para obtener la gráfica deseada:*

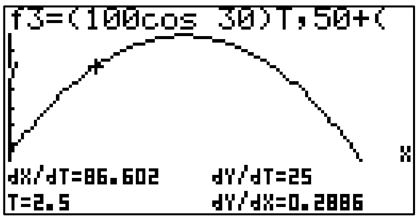


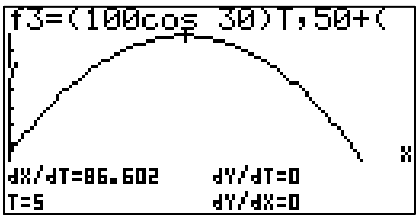


La opción F1 (**Trace**) *nos permite desplazarnos por la gráfica obteniendo los valores deseados.*

Si activamos previamente en SHIFT MENU **(Set Up)** *la opción* **Derivative : On**, *podemos conocer en cualquier instante la velocidad del objeto, así como el ángulo de inclinación* (α = arc tan dy/dx)







19. Se lanza una pelota desde una terraza situada a 20 m de altura con una velocidad de 10 m/s, formando un ángulo de 45º con la horizontal. Determina:

a) El tiempo que tarda en llegar al suelo.
b) La ecuación y la gráfica de su trayectoria.
c) ¿Chocará con una pared de 10 m de altura situada a 20 m de la vertical de la terraza?