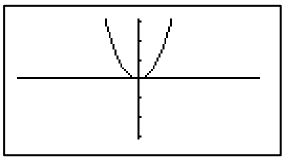
Estudio de la función derivada con calculadora gráfica

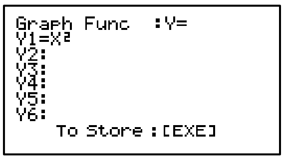
El siguiente estudio se ha realizado con el modelo fx-9750G Plus de Casio, los demás modelos de calculadora gráfica Casio funcionan de manera similar al anterior.

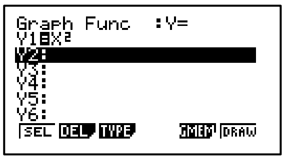
Muchas calculadoras son útiles para introducir la derivada de una función en un punto y la función derivada, porque con pocos conocimientos tecnológicos la calculadora nos:

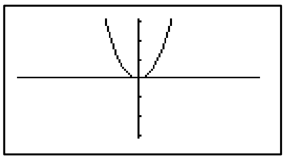
a) representa funciones, por ejemplo $y = x^2$



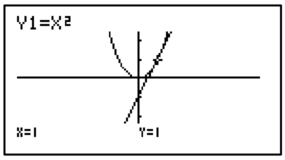
Escogiendo la opción GRAPH del MENU principal, la fórmula de la función, EXE F6 (**DRAW**).



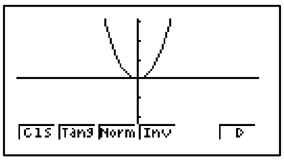


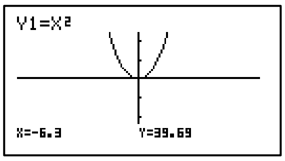


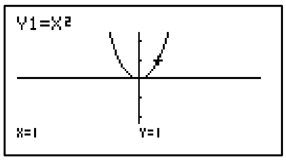
b) representa la recta tangente en un punto

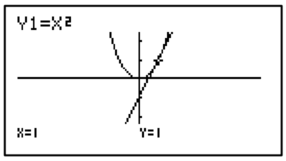


Para dibujar la recta tangente en un punto pulsaremos F4 (**Sketch**), F2 (**TANG**). Con el cursor nos desplazamos hasta la *x* que nos interesa, por ejemplo 1 y pulsamos EXE.



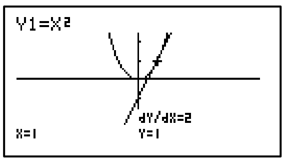


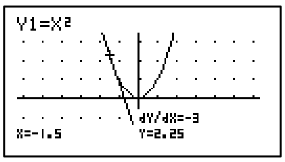


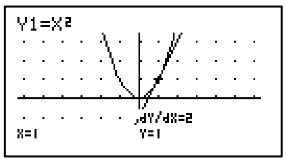


Podemos encontrar la derivada en un punto con la calculadora de diversas formas:

c) proporciona el valor numérico de la pendiente.

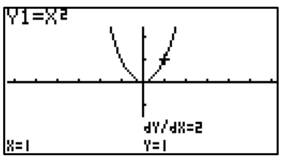






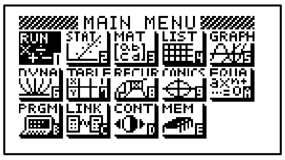
Para visualizar el valor de la derivada en un punto hemos de activar en el **SET UP** (SHIFT MENU) la opción: *Derivative : On*

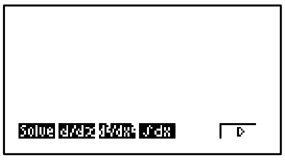
Pulsamos F6 (**DRAW**) y a continuación F1 (**Trace**). Con el cursor nos desplazamos hasta la *x* que nos interesa, por ejemplo 1

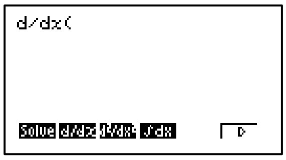


d) calcula el valor de la derivada en un punto

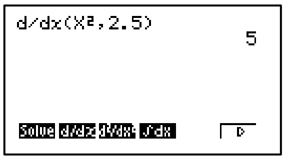
A partir de RUN del MENU principal de la calculadora: OPTN F4 (**CALC**) F2 (**d/dx**)





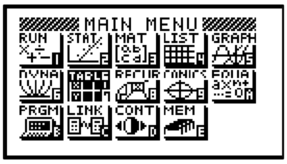


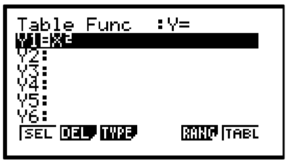
Para conocer la derivada de la función x^2 en el punto de abscisa 2.5 escribiremos: x^2 , 2.5) y pulsaremos EXE.

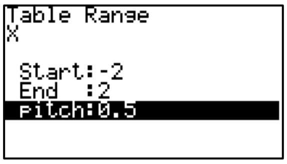


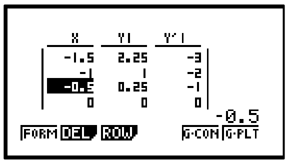
e) proporciona tablas de la derivada en un punto

Escogemos la opción TABLE del menú principal, y seleccionamos la fórmula $y = x^2$. Pulsamos F5 (**RANG**), para indicar los valores inicial, final, y el incremento de la variable independiente *x*. A continuación F6 (**TABL**)





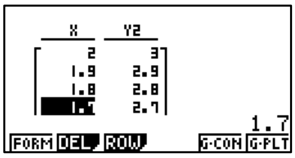
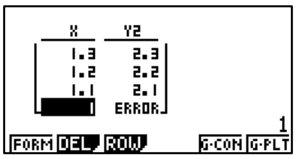
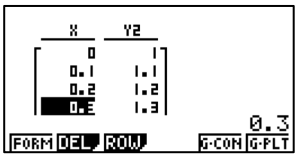
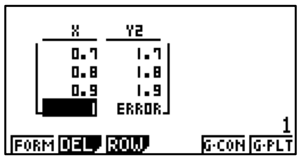




A partir de los gráficos o de la tabla observamos que la función derivada es f'(*x*) = 2*x*

f) permite realizar tablas de pendientes de secantes.

De $f(x) = x^2$ hacemos la siguiente tabla: (x, $\dfrac{x^2 - 1^2}{x-1}$), dando a *x* (por la derecha y por la izquierda) valores cada vez más próximos a 1.

Con la calculadora evitamos las dificultades de dibujar el gráfico de la función, de trazar las tangentes y de medir las pendientes. Estas dificultades también han de trabajarse, pero es útil tener un instrumento que nos permita evitarlas y poder dedicar más tiempo a introducir y avanzar las derivadas sin que las actividades colaterales nos desvíen del objetivo.

ACTIVIDADES

Utilizando las tablas de la calculadora con la opción *Derivative : On*.

1. De la función $y = x^2$, halla:

a) La derivada (dy/dx) en los puntos de abscisa x: -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5 y 2.
b) La relación entre la abscisa, x, y la derivada, dy/dx.

2. De la función $y = x^2 - 1$, halla:

a) La derivada (dy/dx) en los puntos de abscisa x: -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5 y 2.
b) La relación entre la abscisa, x, y la derivada, dy/dx.

3. De la función $y = x^2 + 0.75$, halla:

a) La derivada (dy/dx) en los puntos de abscisa x: -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5 y 2.
b) La relación entre la abscisa, x, y la derivada, dy/dx.

4. A partir de los ejercicios 1, 2 y 3 halla la función derivada de la función $y = x^2 + a$, donde a es un número constante.

5. De la función $y = \frac{1}{3}x^3$, halla:

a) La derivada (dy/dx) en los puntos de abscisa x: -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5 y 2.
b) La relación entre la abscisa, x, y la derivada, dy/dx.

6. De la función $y = x^3$, utilizando el ejercicio anterior, halla:

a) La derivada (dy/dx) en los puntos de abscisa x: -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5 y 2.
b) La relación entre la abscisa, x, y la derivada, dy/dx.

7. De la función $y = \frac{1}{4}x^4$, halla:

a) La derivada (dy/dx) en los puntos de abscisa *x*: -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5 y 2.
b) La relación entre la abscisa, *x*, y la derivada, *dy/dx*.

8. De la función $y = x^4$, utilizando el ejercicio anterior, halla:

a) La derivada (dy/dx) en los puntos de abscisa *x*: -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5 y 2.
b) La relación entre la abscisa, *x*, y la derivada, *dy/dx*.

9. Encuentra, a partir de los ejercicios anteriores, cuál es la función derivada de $y = x^n$.

10. Comprueba si la respuesta anterior funciona para valores de *n* diferentes a los que hemos trabajado en los ejercicios anteriores.

a) *n* naturales: 0, 1.
b) *n* racionales: 1/2, 3/4
c) *n* enteros: -2, -1.

11. A partir de l'ejercicio anterior encuentra las funciones derivadas de las funciones:

a) $y = a$, donde *a* es una constante.
b) $y = x$
c) $y = \sqrt{x}$
d) $y = \frac{1}{x}$

12. De la función $y = 4x$

a) La derivada (dy/dx) en los puntos de abscisa *x*: -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5 y 2.
b) La relación entre la abscisa, *x*, y la derivada, *dy/dx*.

13. Justifica que la derivada de la función $y = a\,x$, donde *a* es un número cualquiera, es *a*.

14. Haz la tabla de las derivadas de las funciones:

$$y1 = x^2 \qquad\qquad y2 = 3x^2$$

en los puntos de abscisa x: -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5 y 2, y encuentra:

a) La función derivada de $y2$.
b) La relación entre la función $y2$ y la función $y1$.
c) La relación entre la función derivada de $y2$ y la función derivada de $y1$.

15. Realiza la tabla de las derivadas de las funciones:

$$y1 = x^2 \qquad\qquad y2 = \tfrac{1}{2}\, x^2$$

en los puntos de abscisa x: -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5 y 2, y encuentra:

a) La función derivada de $y2$.
b) La relación entre la función $y2$ y la función $y1$.
c) La relación entre la función derivada de $y2$ y la función derivada de $y1$.

16. Halla, a partir de los ejercicios anteriores, cuál es la función derivada de la función $y = a\, x^n$, donde a y n son números constantes.

17. Encuentra la relación entre las funciones derivadas de dos funciones que siguen el modelo: $y1 = f(x)$ y $y2 = a\, f(x)$. Donde $f(x)$ es una función cualquiera y a un número cualquiera.

18. Realiza la tabla de las derivadas de las funciones:

$$y1 = x^3 \qquad\qquad y2 = x^2 \qquad\qquad y3 = x^3 + x^2$$

en los puntos de abscisa x: -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5 y 2, y encuentra:

a) La función derivada de la función $y3$.
b) La relación de la función $y3$ con las funciones $y1$ e $y2$.
c) La relación de la función derivada de $y3$ y las funciones derivadas de $y1$ e $y2$.

19. Realiza la tabla de las derivadas de las funciones:

$$y1 = -2x^3 \qquad\qquad y2 = 3x^2 \qquad\qquad y3 = -2\, x^3 + 3\, x^2$$

en los puntos de abscisa x: -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5 y 2, y encuentra:

a) La función derivada de la función $y3$.
b) La relación de la función $y3$ con las funciones $y1$ e $y2$.
c) La relación de la función derivada de $y3$ y las funciones derivadas de $y1$ e $y2$.

20. Realiza la tabla de las derivadas de las funciones:

$$y1 = x^3 \qquad y2 = 3x^2 \qquad y3 = x^3 - 3x^2$$

en los puntos de abscisa x: -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5 y 2, y encuentra:

a) La función derivada de la función $y3$.
b) La relación de la función $y3$ con las funciones $y1$ e $y2$.
c) La relación de la función derivada de $y3$ y las funciones derivadas de $y1$ e $y2$.

21. Halla la función derivada de una función que es suma de dos funciones. Compruébalo con dos funciones cualesquiera $f(x)$ y $g(x)$ de acuerdo con la notación siguiente: $y1 = f(x)$, $y2 = g(x)$ e $y3 = y1 + y2$.

22. Halla y comprueba con los ejemplos que quieras la función derivada de la función: $y = a x^2 + b x + c$, donde a, b y c son números constantes.

23. Estudia la función derivada de la función exponencial: $y = a^x$, donde a es una constante positiva ($a>0$). Realiza la tabla de las derivadas de las funciones:

$y1 = 1.5^x$

$y2 = 2^x$

$y3 = 2.5^x$

$y4 = 3^x$

$y5 = 3.5^x$

en los puntos de abscisa: -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5 y 2.

Averigua cuál sería el valor de a de la función $y = a^x$ que haría igual la función a la función derivada.

24. De la función $y = \ln x$, encuentra:

a) La derivada (dy/dx) en los puntos de abscisa x: -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5 y 2.
b) La relación entre la abscisa, x, y la derivada, dy/dx.

25. De la función $y = \ln|x|$, encuentra:

a) La derivada (dy/dx) en los puntos de abscisa x: -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5 y 2.
b) La relación entre la abscisa, x, y la derivada, dy/dx.

26. De la función $y = x^3 - 2x^2$, encuentra:

a) El gráfico.
b) Las coordenadas del máximo relativo. (a partir de **G-Solv**)
c) Leas coordenadas del mínimo relativo.
d) La tabla de comportamiento de la función. (Crecimiento y decrecimiento)
e) La derivada en los puntos máximos y mínimos relativos.
f) El gráfico de la función derivada.
g) La tabla de signos de la función derivada.
h) La relación entre la tabla de comportamiento de la función y la tabla de los signos de la función derivada.

27. De la función $y = -2x^3 + 3x^2$, encuentra:

a) El gráfico.
b) Las coordenadas del máximo relativo. (a partir de la opción **G-Solv**)
c) Las coordenadas del mínimo relativo.
d) La tabla de comportamiento de la función. (Crecimiento y decrecimiento)
e) La derivada en los puntos máximos y mínimos relativos.
f) El gráfico de la función derivada.
g) La tabla de signos de la función derivada.
h) La relación entre la tabla de comportamiento de la función y la tabla de los signos de la función derivada.

28. Averigua si es cierta la afirmación: “un cero de la derivada es siempre un máximo o un mínimo de la función”.

a) Realiza el gráfico de $y = x^3$.
b) Halla los ceros de la función derivada.
c) Responde a la pregunta inicial.

29. Halla y representa la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función $y = x^3 - 4$, en el punto de abscisa $x = 2$. (La calculadora nos representa la recta tangente en un punto a partir de la opción **Sketch**).

30. Halla la ecuación de la recta normal al gráfico de la función $y = \sin x$ en el punto de abscisa $x = 0$. (La calculadora nos representa la recta tangente en un punto a partir de la opción **Sketch**).

31. Halla un punto de la curva de ecuación $y = \sin x$ en el cual la normal sea paralela al eje de ordenadas.

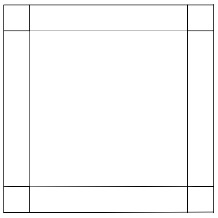
32. Calcula el ángulo que determina el eje de abscisas con la recta tangente al gráfico de la función $y = (x - 1)^3$ en el punto de abscisa $x = 1$.

33. Estudia los extremos relativos de la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.

34. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^3 - x^2 - 8x - 8$.

35. Determina los intervalos de monotonía de $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x}$

36. En una tintorería necesitan unos depósitos donde guardar el tinte, y para construirlos quieren aprovechar unes chapas cuadradas de 60 cm de lado. Estudia la posibilidad de construir con estas chapas, depósitos de volumen máximo, por el procedimiento de recortar las puntas de las planchas en la forma indicada en la figura, doblegar y después soldar.



37. Determina las dimensiones de una ventana rectangular que permita la máxima cantidad de luz, sabiendo que su marco debe medir 6 m.

38. Calcula las dimensiones de un bidón cilíndrico con una capacidad de 150 litros, si utilizamos la mínima chapa posible para fabricarlo.

39. Calcula un número positivo que sumado a 16 veces el su inverso da un valor mínimo.

40. Determina el cilindro de mayor volumen que se puede inscribir en una esfera de radio 9 cm.

41. Actualmente la población de una ciudad es de 50 000 habitantes y evoluciona de acuerdo con la expresión $f(x) = 50000 + 500x - 25x^2$, donde la variable x viene dada en años. Analiza si en el futuro la población aumentará o disminuirá.

42. De entre todos los triángulos isósceles de perímetro 18 m, hallar las dimensiones de aquel que tiene área máxima.

43. Un espejo rectangular de 2 m de largo i 1 m de alto se ha roto por uno de sus vértices, en un pedazo en forma de triángulo rectángulo de 30 cm de largo i 20 cm de altura. ¿Cómo deberemos cortar otro espejo de lados paralelos al inicial de forma que el área del nuevo espejo sea máxima?

44. Calcula el punto de la gráfica de función $f(x)=e^{-x^2}$ cuya recta tangente tenga la máxima pendiente.

45. La cotización de las acciones en bolsa de cierta empresa durante el año 2003, va a evolucionar aproximadamente de la manera siguiente: $f(x)=342+39x-3x^2$, donde x es el tiempo en meses $(0 \le x \le 12)$. Calcula el porcentaje de beneficio que obtendría un individuo que comprara sus acciones en el momento de mínima cotización y que las vendiera en el de máxima cotización.

46. Halla la recta que pasa por el punto P = (2, 3) que forma con los semiejes positivos de coordenadas un triángulo de área mínima.

47. De entre todos los conos inscritos en una esfera de radio 3 m, halla las dimensiones del que tiene un volumen máximo.

48. Halla las dimensiones del cilindro más grande que se puede inscribir en un cono recto de 6 cm de radio de la base y 10 cm de altura.

49. Dividir un alambre de 2 m de largo en dos trozos, de manera que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo, formados con los dos trozos, sea mínima.