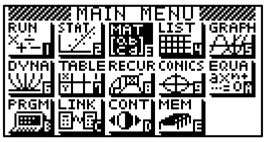
Matrices

La siguiente introducción se ha realizado con el modelo fx-9750G Plus de Casio, los demás modelos de calculadora gráfica Casio funcionan de manera similar al anterior. En consecuencia es posible que las imágenes, menús o secuencias de teclas empleados por este modelo puedan variar respecto a los demás, sin que por ello pierda el documento validez para el estudio de matrices con calculadora gráfica

1. Edición de matrices

- Introducimos la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$

Opción MAT del MENU principal:



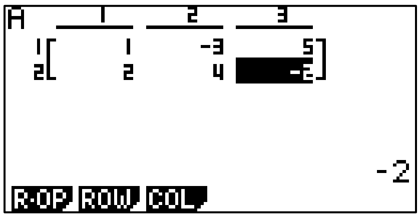
Nos encontramos en el menú **Matriz** *MAT donde podemos definir hasta 26 matrices (A - Z) además de disponer de una matriz respuesta (Mat Ans) donde se almacena la última matriz, resultado de las operaciones con matrices realizadas desde el menú RUN. Las opciones F1 (DEL) y F2 (DEL A) borran la matriz seleccionada o bien todas las matrices de la lista respectivamente.*

Definimos la dimensión de la matriz A (2 filas x 3 columnas):

Con el cursor seleccionamos la matriz A y pulsamos: 2 EXE 3 EXE

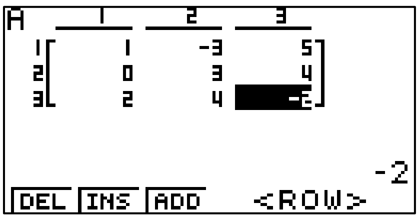
Introducimos los coeficientes de la matriz A: 1 EXE –3 EXE 5 EXE
2 EXE 4 EXE –2 EXE

Si nos equivocamos podemos cambiar el elemento de la matriz que hayamos introducido erróneamente, con la ayuda de las teclas de cursor, nos colocamos sobre el elemento a cambiar, introducimos el nuevo valor y pulsamos EXE.



La opción F2 (**ROW**) nos permite: F1 (**DEL**): eliminar la fila donde está situado el cursor.
F2 (**INS**): insertar una fila entre la fila donde está situado el cursor y la anterior.
F3 (**ADD**): añadir una fila a continuación de la que está situado el cursor.

Insertamos una nueva fila entre las filas 1 y 2 de la matriz A de manera que obtengamos:



Cursor en la segunda fila, F2 (**INS**) *e introducimos los valores de los elementos.*

Pulsando EXIT EXIT podemos comprobar que la matriz A ha sido redefinida como una matriz 3 x 3.

Análogamente para el tratamiento con columnas la opción F3 (**COL**) nos permite:

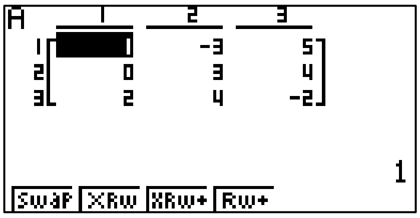
F1 (**DEL**): eliminar la columna donde está situado el cursor.

F2 (**INS**): insertar una columna entre la columna donde está situado el cursor y la anterior.

F3 (**ADD**): añadir una columna a continuación de la que está situado el cursor.

- **Cálculos con filas:**

Seleccionemos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ y pulsamos la opción F1 (**R·OP**):



F1 (**Swap**): Permite intercambiar dos filas entre ellas.

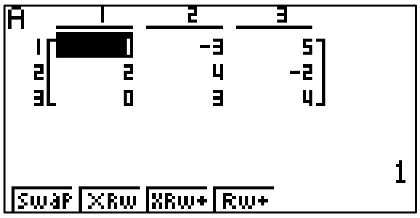
F2 (**X Rw**): Multiplica por un escalar los elementos de una fila.

F3 (**X Rw+**): Multiplica por un escalar los elementos de una fila y le suma el resultado a otra fila.

F4 (**Rw+**): Suma los elementos de una fila a otra fila.

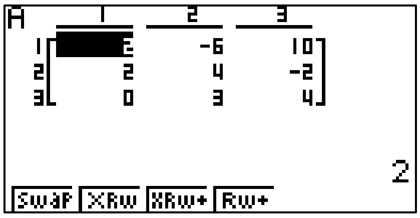
Intercambiemos las filas 2 y 3:

F1 (**Swap**) m? 2 EXE n? 3 EXE



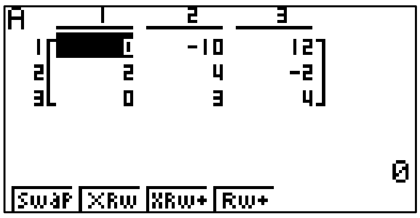
Multipliquemos la primera fila por 2:

F2 (**X Rw**) k? 2 EXE m? 1 EXE



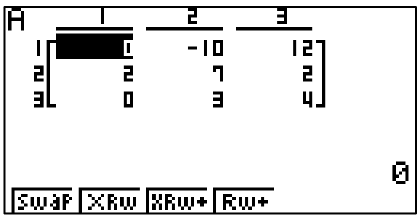
Restemos a la fila 1 la fila 2:

F3 (**X Rw+**) k? –1 EXE m? 2 EXE n? 1 EXE



Sumemos la fila 3 a la fila 2:

F4 (**Rw+**) m? 3 EXE n? 2 EXE



Si bien la calculadora no admite el tratamiento por columnas, siempre pero podemos transponer la matriz y operar con filas(antes columnas) y finalmente volver a transponer. Resulta pero demasiado engorroso para a trabajar con los alumnos.

2. Cálculo matricial

Para realizar operaciones con matrices con la calculadora:

1r. Introducir las matrices con la opción MAT del menú principal.

2n. Hacer los cálculos con la opción RUN del menú principal, pulsar la tecla [OPTN] y escoger [F2] **MAT**.

Introducimos las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Opción MAT del [MENU] principal.
Informamos a la máquina de la dimensión de la matriz A.
Introducimos los coeficientes de la matriz.

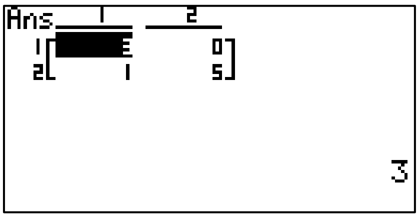
Pulsamos [EXIT] para introducir la matriz B
Informamos a la máquina de la dimensión de la matriz B e introducimos los coeficientes de la matriz.

Pulsamos [EXIT] e introducimos la matriz C

Para efectuar el cálculo matricial debemos escoger la opción RUN del [MENU] principal:

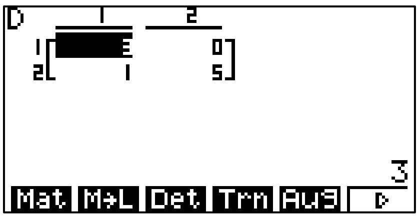
Para encontrar la matriz A + B debemos hacer:

RUN del [MENU]
[OPTN] [F2] **(MAT)**
[F1] **(Mat)** [ALPHA] **A** [+] [F1] **(Mat)** [ALPHA] **B** [EXE]



Si queremos que A + B sea la matriz D hemos de hacer :

RUN del [MENU]
[OPTN] [F2] **(MAT)**
Mat A [+] **Mat B** [→] **Mat D** [EXE]

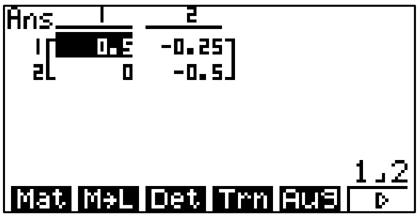


Para encontrar el determinante de la matriz C:

RUN del [MENU]
[OPTN] [F2] **(MAT)**
[F3] **(Det)** **Mat C** [EXE]

Para encontrar la matriz inversa C^{-1}:

[RUN] del [MENU]
[OPTN] [F2] **(MAT)**
Mat C [SHIFT] [)] ($\mathbf{x^{-1}}$) [EXE]



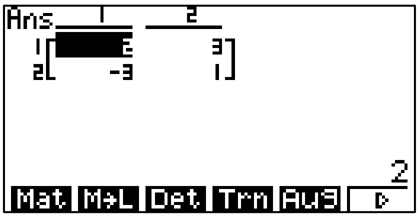
Para hacer $D = C^{-1}$, hemos de pulsar:

Mat C $\mathbf{x^{-1}}$ [→] **Mat D** [EXE]

Si no hemos asignado el resultado al principio siempre podemos hacer **Mat Ans** [→] **Mat D.**

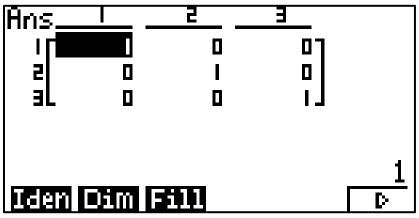
Para encontrar la matriz transpuesta A^t:

[RUN] del [MENU]
[OPTN] [F2] **(MAT)**
[F4] **(Trn) Mat A** [EXE]



Matriz identidad I_3:

[RUN] del [MENU]
[OPTN] [F2] **(MAT)**
[F6] [F1] **(Iden) 3** [EXE]



Análogamente podemos multiplicar matrices siempre y cuando las dimensiones de las mismas lo permitan.

EJERCICIOS

1. Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, calcula:

a) A + B
b) B – C
c) A – B + C
d) 2 A
e) 3A + 5B
f) Comprueba que (A + B) + C = A + (B + C)
g) Comprueba que A + B = B + A
h) Comprueba que 3(A + B) = 3 A + 3 B
i) Comprueba que (2 + 3) A = 2 A + 3 A
j) Comprueba que 3(4A) = 12A
k) A · B
l) B · A
m) (A · B) · C
n) A · (B · C)
o) Comprueba que A · (B + C) = A · B + A · C
p) Comprueba que (A + B) · C = A · C + B · C

2. Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 7\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$ *i* $B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, calcula:

a) A · B
b) B · A
c) A^2
d) Comprueba que det (A · B) = det A · det B
e) Comprueba que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

3. Definimos $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, *i* $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Calcula los productos que se pueden hacer con estas cuatro matrices y escribe las respuestas en una tabla de doble entrada como esta:

	I	***A***	***B***	***C***
I				
A				
B				
C				

4. Calcula todos los productos de dos factores que sean posibles entre las matrices:

$A=\begin{pmatrix}2 & -3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5\\ 0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 7 & -2\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}5 & -1 & 6\end{pmatrix}$ $E=\begin{pmatrix}-2\\ 7\\ 8\end{pmatrix}$

$F=\begin{pmatrix}3 & 2 & -5\\ 0 & -4 & 7\end{pmatrix}$ $G=\begin{pmatrix}-7 & 8\\ 6 & -2\\ 3 & 9\end{pmatrix}$ $H=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\\ 0 & 4 & 8\\ 2 & -3 & -5\end{pmatrix}$

5. Siendo la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, calcula: A^2, A^3, A^4 y A^n.

6. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$ calcula: A^t, AA^t y A^tA.

3. Cálculo de la matriz inversa con el método de Gauss-Jordan

Ejemplo 1

Calcular la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Se trata de encontrar una matriz $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tal que: $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Es equivalente a: $\begin{pmatrix} 5x+4z & 5y+4t \\ 4x+3z & 4y+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

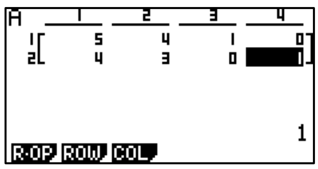
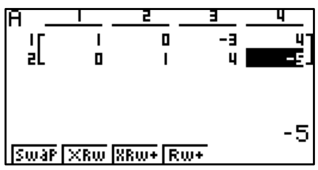
Es equivalente a resolver: $\left.\begin{matrix} 5x+4z=1 \\ 4x+3z=0 \end{matrix}\right\}$ $\quad$ $\left.\begin{matrix} 5y+4t=0 \\ 4y+3t=1 \end{matrix}\right\}$

Estos dos sistemas de ecuaciones lineales no siempre tienen solución, cuando alguno de ellos sea incompatible diremos que la matriz no tiene inversa.

Las matrices de los dos sistemas son: $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{array}\right)$ y $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{array}\right)$

Observamos que las matrices de los sistemas son iguales, sólo cambia la columna de los términos independientes.

Podemos resolver simultáneamente los dos sistemas con el método de Gauss-Jordan:

Matriz conjunta de los dos sistemas:	$\left(\begin{array}{cc\|cc} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$	Editamos la matriz con la opción MAT del MENU principal. Pulsamos F1 (**R·OP**)	
Aplicamos el método de Gauss-Jordan:	F1 = F1 – F2 F2 = F2 – 4 F1 F2 = - F2 F1 = F1 – F2	**XRw+** k = -1 m = 2 n = 1 **XRw+** k = -4 m = 1 n = 2 **XRw** k = -1 m = 2 **XRw+** k = -1 m = 2 n = 1	

La matriz inversa $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

Ejemplo 2

Calcular la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Veamos una manera alternativa de editar una matriz desde el menú **RUN**:

RUN del MENU
OPTN F2 (**MAT**)
Escribimos: **[[2, 0, 6] [-1, 4, 4] [1, -1, 2]]** → F1 (**Mat**) ALPHA **A**

De manera que obtenemos la matriz deseada.

Ampliamos la matriz de la manera siguiente: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

RUN del MENU
OPTN F2 (**MAT**)
F5 (**Aug**) **Mat A** , F6 F1 (**Iden**) **3** EXE → **Mat B**

Con la opción MAT del MENU principal aplicamos a la matriz B el método de Gauss-Jordan:

F1←→F3	F1 (**R·OP**) **Swap** m = 1 n = 3	$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$
F2 = F2 + F1 F3 = F3 –2 F1	**Rw+** m = 1 n = 2 **XRw+** k = -2 m = 1 n = 3	$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$
F2 = 1/3 F2	**XRw** k = 1 ⌟ 3 m = 2	$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$
F1 = F1 + F2 F3 = F3 –2 F2	**Rw+** m = 2 n = 1 **XRw+** k = -2 m = 2 n = 3	$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2/3 & -8/3 \end{array}\right)$
F3 = -1/2 F3	**XRw** k = -1 ⌟ 2 m = 3	$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/3 & 4/3 \end{array}\right)$
F1 = F1 –4 F3 F2 = F2 –2 F3	**XRw+** k = -4 m = 3 n = 1 **XRw+** k = -2 m = 3 n = 2	$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/3 & 4/3 \end{array}\right)$

La matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -1/3 & -7/3 \\ -1/2 & 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$

Podemos ver la respuesta en forma de fracción. las teclas [a b/c] [SHIFT] [a b/c] [F↔D] [SHIFT] [F↔D] $\left(a\frac{b}{c} \leftrightarrow \frac{d}{c}\right)$ nos lo facilitan.

Si bien es posible introducir k = 1/3 *en vez de* k = 1⌟3 *no nos será posible apreciar el resultado en forma de fracción.*

7. Buscar la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Busca con la calculadora una matriz de orden 3 con todos sus coeficientes diferentes de cero y enteros y que su matriz inversa también tenga todos sus coeficientes enteros.

9. Busca con la calculadora una matriz de orden 4 con todos sus coeficientes diferentes de cero y enteros y que su matriz inversa también tenga todos sus coeficientes enteros.

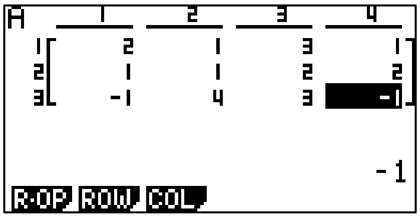
4. Cálculo del rango de una matriz

Rango de una matriz: número de filas o columnas linealmente independientes.

Un método para conocer el rango de una matriz es convertirla, por medio de transformaciones elementales, en una matriz escalonada, de esta manera el rango de la matriz es el número de filas no nulas de la matriz escalonada equivalente.

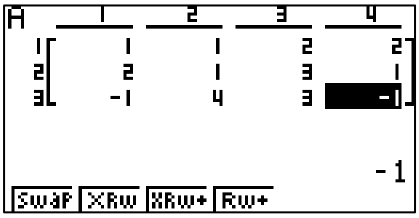
Ejemplo:

Calculamos el rango de la matriz: $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

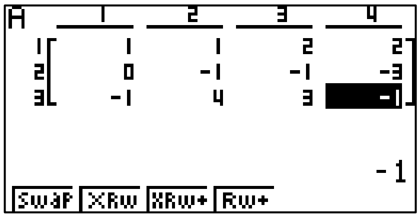


Hacemos las siguientes transformaciones elementales:

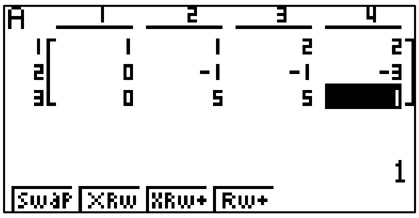
F1 ←→ F2



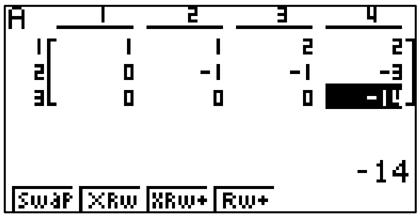
F2 = F2 –2 F1



F3 = F3 + F1



F3 = F3 + 5 F2



Obtenemos así la matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$ con tres filas no nulas.

Así pues, **rang (A) = 3**

10. Verificar que rang (B) = 1, siendo $B=\begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 3 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix}$

11. Calcular el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

5. Resolución de ecuaciones matriciales

Ejemplo:

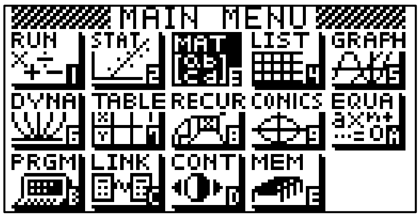
Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Calculemos la matriz X tal que:

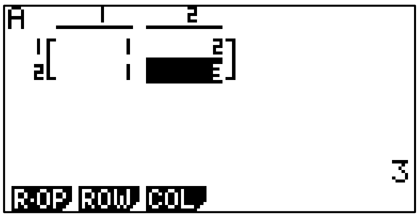
$$A \cdot X = B$$

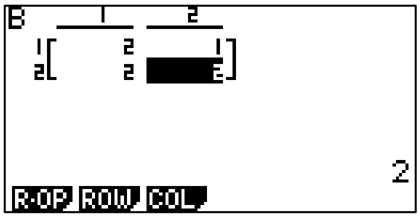
Despejamos la matriz incógnita. Debemos recordar que la multiplicación de matrices no es conmutativa, por lo tanto es necesario vigilar si multiplicamos por la derecha o por la izquierda:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
$$X = A^{-1} \cdot B$$

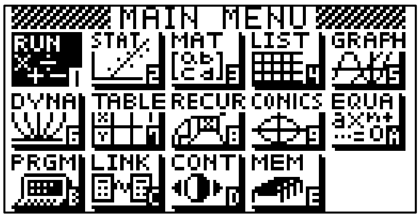
Ahora solamente hay que introducir las matrices A y B en la calculadora:

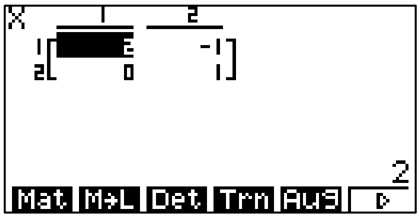






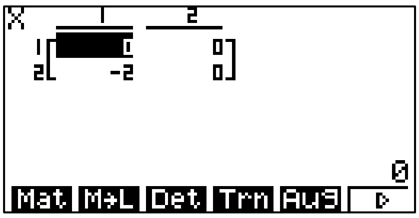
Realizamos los cálculos pertinentes:





Así pues, la matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

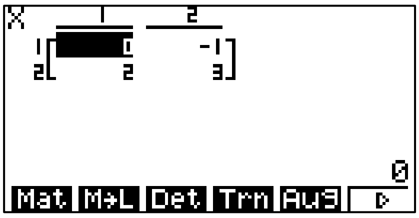
12. Encuentra una matriz X tal que A + X = A^2 siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.



13. Considera las matrices siguientes:

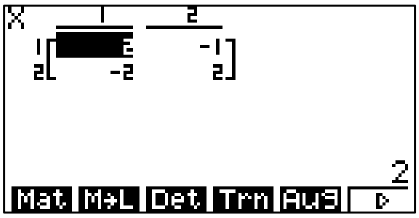
$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -4\end{pmatrix}$$

Calcula X para que se cumpla: $A \cdot X \cdot B = 4C$.



14. Considera las matrices siguientes: $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -10 & 4\end{pmatrix}$

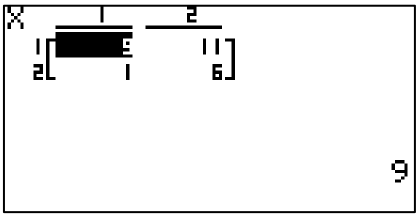
Calcula X para que se cumpla: $A^2 \cdot X + B = 0_2$



15. Considera las matrices siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}3 & -12\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

Calcula X para que se cumpla: $A^2 \cdot X - B = C$.



Soluciones: