Sistemas de Ecuaciones

La siguiente introducción se ha realizado con el modelo fx-9750G Plus de Casio, los demás modelos de calculadora gráfica Casio funcionan de manera similar al anterior. En consecuencia es posible que las imágenes, menús o secuencias de teclas empleados por este modelo puedan variar respecto a los demás, sin que por ello pierda el documento su sentido básico de introducción al uso de la calculadora gráfica para estudiar los sistemas de ecuaciones.

1. Resolución gráfica de Sistemas de Ecuaciones.

Empecemos solucionando gráficamente sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas.

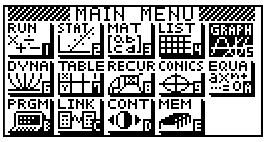
Resolvamos el s.e.l. : $$\left.\begin{array}{l} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{array}\right\}$$

Para solucionar gráficamente el sistema, representamos las dos ecuaciones en unos mismos ejes de coordenadas cartesianas.

Para representar las ecuaciones con la calculadora es necesario despejar la "*y*" de cada ecuación:

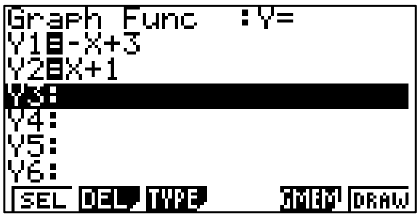
$$\left.\begin{array}{l} y=-x+3 \\ y=x+1 \end{array}\right\}$$

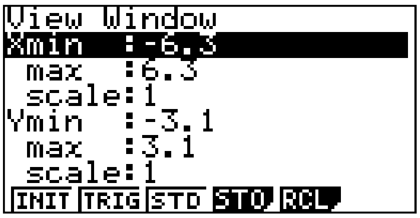
Escogemos la opción GRAPH del [MENU] principal de la calculadora. Introducimos las dos funciones.



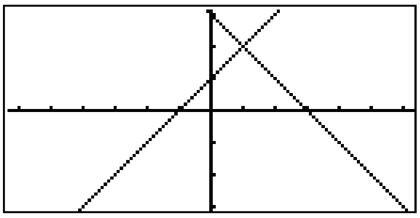
y1 = -*x* + 3 y2 = *x* + 1	Para introducir la variable ***x***, pulsar la tecla [X,θ,T]. Cuidado con el signo **-** Se introduce con la tecla [(−)].

Con [SHIFT] [F3] (**V-Window**) definimos la escala de los ejes que nos convenga.





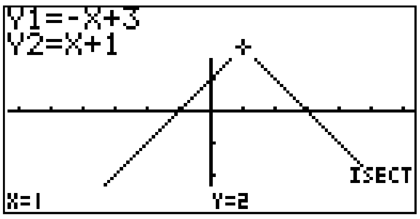
Volvemos al editor de ecuaciones con [EXE].



Pulsamos [F6] (**DRAW**) y obtenemos la representación gráfica de las dos ecuaciones.

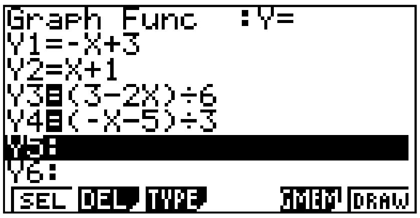
Gráficamente observamos que la solución es ***x*=1** y ***y*=2**

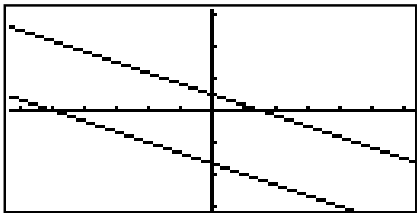
Para encontrar las coordenadas del punto de intersección hemos de escoger **ISCT** del menú [F5] (**G-Solv**) [F5] (**ISCT**).



Pulsamos EXIT.

Los s.e.l. no siempre tienen solución, por ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 2x+6y=3 \\ -x-3y=5 \end{array}\right\}$ (rectas paralelas)



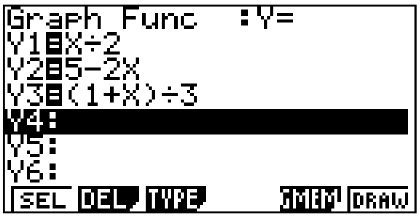


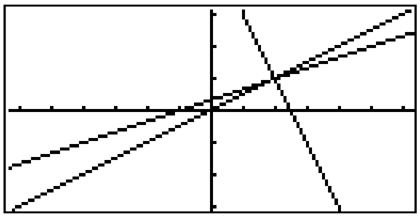
*Para representar las funciones que nos interesen es necesario seleccionar o no seleccionar oportunamente las funciones del editor de ecuaciones (Situarse sobre la función y pulsar F1 (**SEL**).*

Debemos tener presente la prioridad de las operaciones con la calculadora, cuando escribimos 1/2x, la calculadora realiza 1/(2x), podemos evitarlo escribiendo (1/2)x.

Con este procedimiento podemos discutir y resolver cualquier sistema lineal de dos incógnitas, el número de ecuaciones no tiene porque ser dos, por ejemplo:

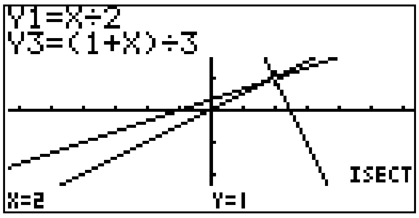
$$\left.\begin{array}{r} x-2y=0 \\ 2x+y=5 \\ -x+3y=1 \end{array}\right\}$$





Observamos que este sistema tiene solución:

$x = 2$ y $y = 1$

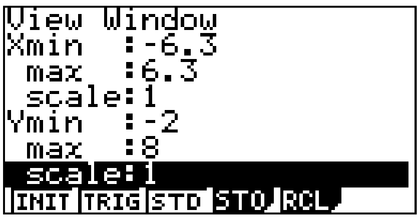


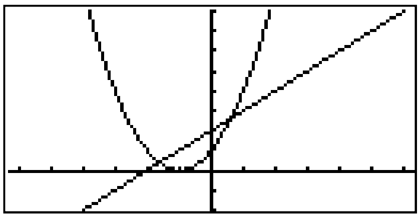
Con la ayuda de las teclas de cursor y EXE, escogemos las funciones las cuales queremos conocer su intersección.

También es posible tratar algunos sistemas no lineales de dos incógnitas, por ejemplo:

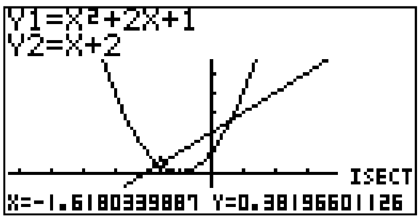
$$\left.\begin{array}{r} y=x^2+2x+1 \\ y=x+2 \end{array}\right\}$$

Para una representación adecuada hay que variar el eje vertical:

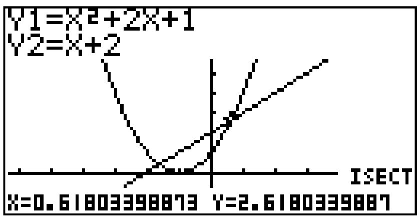




Soluciones:



Una vez encontrado el primer punto de intersección, debemos pulsar la tecla del cursor hacia la derecha para obtener el segundo punto.



EJERCICIOS:

Resolver con la opción GRAPH de la calculadora, los s.e.l. siguientes:

1. $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 3 \\ 3x - 8 = 2y \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 0 \\ 2x - 3y = 25 \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 1 \\ -4x + 6y = 5 \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{r} 4x - 3y = 2 \\ 8x - 6y = 4 \end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 4 \\ 6x - y = 0 \\ y - x = 1 \end{array}\right\}$

6. $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 9 \\ 2x - y = -1 \\ 5x + y = 8 \\ 6x + 4y = 18 \end{array}\right\}$

Para representar gráficamente una ecuación que no tiene "*y*" hemos de escoger el tipo de gráfica x = constante. Para ello pulsar F3 (**TYPE**) del menú GRAPH y escoger la opción F4 (**X= C**)

7. $\left.\begin{array}{r} x = -2 \\ x - 2y = 4 \end{array}\right\}$

8. $\left.\begin{array}{r} y - 2x = 8 \\ 2x = 5 \end{array}\right\}$

Para encontrar las coordenadas del punto de intersección no es posible a partir de **ISCT** *del menú* **G-Solv**. *Es necesario usar la opción* **Y-CAL** *del menú* **G-Solv**.

Resolver con la opción GRAPH de la calculadora, los siguientes sistemas no lineales:

9. $\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ xy = 20 \end{array}\right\}$ x = 5, y = 4 x = -4, y = -5

10. $\left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{array}\right\}$ x = 2, y = 1 x = 1, y = 2

11. $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 0 \\ xy + x - y - 36 = 0 \end{array}\right\}$ x = 8, y = 4 x = -9, y = -9/2

12. $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 1 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{array}\right\}$ ejes **V-Window STD** x = 2, y = 1 x = -14/5, y = -11/5

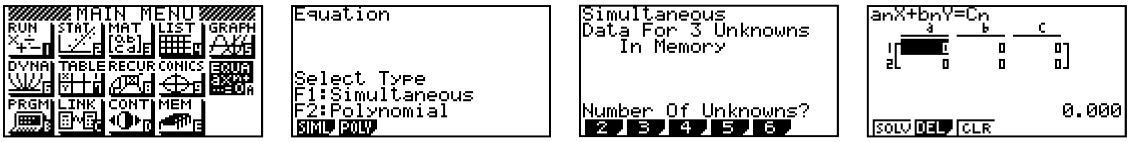
13. $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 74 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \end{array}\right\}$ x = -7, y = 5 x = 7, y = 5 x = -7, y = -5 x = 7, y = -5

2. Resolución de s.e.l. con el menú EQUA.

Podemos solucionar directamente los s.e.l. con la opción EQUA del MENU principal. Para ello escogeremos MENU EQUA, F1 (**SIML**) (sist's de eq's lineales).

Esta opción funciona solamente cuando el s.e.l. es compatible determinado y el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

Pulsar **2** como número de incógnitas y resolver los siguientes sistemas:



14. $\left.\begin{array}{r} 2x+y=3 \\ 3x-8=2y \end{array}\right\}$ $x=2$ $y=-1$

16. $\left.\begin{array}{r} x=-2 \\ x-2y=4 \end{array}\right\}$ $x=-2$ $y=-3$

15. $\left.\begin{array}{r} 3x-2y=0 \\ 2x-3y=5 \end{array}\right\}$ $x=-2$ $y=-3$

17. $\left.\begin{array}{r} y-2x=8 \\ 2x=5 \end{array}\right\}$ $x=5/2$ $y=13$

Las teclas $a\frac{b}{c}$ F↔D ($a\frac{b}{c} \leftrightarrow \frac{d}{c}$) nos facilitan la respuesta en forma de fracción.

18. $\left.\begin{array}{r} 3x-2y=0 \\ 6x-4y=5 \end{array}\right\}$

19. $\left.\begin{array}{r} 2x-3y=2 \\ 6x-9y=6 \end{array}\right\}$

20. $\left.\begin{array}{r} x+y+z=4 \\ x-2y+3z=13 \\ x+3y+4z=11 \end{array}\right\}$

21. $\left.\begin{array}{r} 4x-2y=2 \\ 6y-3z=1 \\ -4x+3z=1 \end{array}\right\}$

22. $\left.\begin{array}{r} x-3y=1 \\ 9y-z=1 \\ 2x-z=1 \end{array}\right\}$

23. $\left.\begin{array}{r} 2x-5y-3z+2t=7 \\ 3x+2y-z-t=10 \\ x+y-2z-3t=-1 \\ -2x+3y-z+2t=-7 \end{array}\right\}$

¿Cómo borrar las funciones del menú GRAPH?
Se pueden borrar las funciones una a una situándose sobre y con la opción DEL.
También podemos ir a MENU MEM (o SYSTEM) escoger **Memory Usage** y hacer **DEL** a **Y=.**
Si se quiere borrar todo debemos escoger **Reset** .

3. Resolución de s.e.l. con el método de Gauss.

Ejemplo 1:

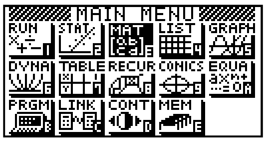
Solucionemos analíticamente el siguiente sistema:

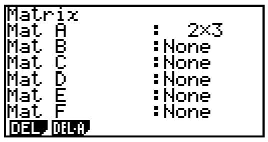
$$\left.\begin{array}{r} x+y=\ \ 5 \\ x-y=-1 \end{array}\right\} \xrightarrow[eq2=eq2-eq1]{} \left.\begin{array}{r} x+y=\ \ 5 \\ -2y=-6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow x=2 \\ \to y=3 \end{array}$$

Con la calculadora gráfica podemos visualizar las transformaciones que hagamos a los sistemas de dos incógnitas para encontrar la solución con el método de Gauss.

Utilicemos el cálculo matricial de la calculadora:

Opción [MAT] del [MENU] principal:
Con el cursor seleccionamos la matriz A y pulsamos: [2] [EXE] [3] [EXE]

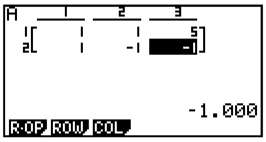




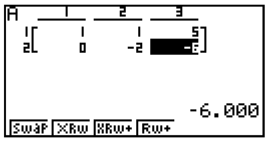
Introducimos los coeficientes de la matriz ampliada del sistema:

[1] [EXE] [1] [EXE] [5] [EXE] [1] [EXE] [(−)] [1] [EXE] [(−)] [1] [EXE]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$



Triangulizamos la matriz:



[F1] **(R·OP)** [F3] **(XRw+)** [(−)] [1] [EXE] [1] [EXE] [2] [EXE]

La matriz transformada es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ y la solución: $y=\dfrac{-6}{-2}=3$

$x+3=5 \to x=2$

Ejemplo 2:

Resolver el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{r} x-2y=0 \\ 2x+\ \ y=5 \\ -x+3y=1 \end{array}\right\}$

<table>
<tr><td>Matriz ampliada del sistema:</td><td>$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{array}\right)$</td><td>Editamos la matriz con la opción [MAT] del [MENU] principal. Pulsamos R·OP</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Aplicamos el método de Gauss:</td><td>F2 = F2 – 2 F1
F3 = F3 + F1</td><td>XRw+ k = -2 m = 1 n = 2
Rw+ m = 1 n = 3</td><td>$\Rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$</td></tr>
<tr><td>F2 = F2 -5 F3</td><td>XRw+ k = -5 m = 3 n = 2</td><td>$\Rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$</td></tr>
<tr><td></td><td>Eliminamos la segunda ecuación (fila) porque todos los coeficientes son 0</td><td>Pulsamos [EXIT] ROW
Situamos el cursor en la segunda fila y pulsamos DEL</td><td>$\Rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$</td></tr>
</table>

La matriz transformada corresponde al sistema: $\left.\begin{aligned} x-2y&=0 \\ y&=1 \end{aligned}\right\}$

El sistema es compatible determinado. La solución es $\boldsymbol{x = 2}$, $\boldsymbol{y = 1}$.

<u>Ejemplo 3:</u>

Sea el sistema: $\left.\begin{aligned} x+4y-z&=2 \\ 3x-2y+z&=4 \\ 5x+6y-z&=8 \end{aligned}\right\}.$

Matriz ampliada del sistema:	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & -1 & 8 \end{array}\right)$	Editamos la matriz con la opción MAT del MENU principal. Pulsamos **R·OP**	
Aplicamos el método de Gauss:	F2 = F2 -3 F1 F3 = F3 -5 F1	**XRw+** k = -3 m = 1 n = 2 **XRw+** k = -5 m = 1 n = 3	$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -14 & 4 & -2 \\ 0 & -14 & 4 & -2 \end{array}\right)$
	F3 = F3 -F2	**XRw+** k = -1 m = 2 n = 3	$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -14 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Podemos ver que el sistema es compatible indeterminado. Lo solucionamos analíticamente:

$\left.\begin{aligned} x+4y-z&=\ \ 2 \\ -14y+4z&=-2 \end{aligned}\right\}$ Escogemos $\boldsymbol{y}$ como parámetro, de esta manera:

Despejamos **z** de la segunda ecuación: $z=\frac{-1}{2}+\frac{7}{2}y$

Substituyendo el valor de **z** en la primera ecuación y despejando ***x***: $x=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}y$

La solución general del sistema es: $(x,y,z)=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}y,\ \ y,\frac{-1}{2}+\frac{7}{2}y\right)$

Separamos los parámetros: $(x,y,z)=\left(\frac{3}{2},0,\frac{-1}{2}\right)+\left(\frac{-1}{2},1,\frac{7}{2}\right)y$

La solución es la suma de dos términos. El primero es una solución particular. El segundo es la solución general del s.e.l. homogéneo asociado al sistema inicial.

4. Resolución de s.e.l. con el método de Gauss-Jordan.

Ejemplo:

Resolver el sistema: $\left.\begin{array}{r} x-4y+\ z=-4 \\ 3x-\ y+2z=\ 9 \\ 2x+4y-3z=11 \end{array}\right\}$

Matriz ampliada del sistema:	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -4 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 11 \end{array}\right)$	Editamos la matriz con la opción MAT del MENU principal. Pulsamos **R·OP**	
	F2 = F2 -3 F1 F3 = F3 -2 F1	**XRw+** k = -3 m = 1 n = 2 **XRw+** k = -2 m = 1 n = 3	$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 11 & -1 & 21 \\ 0 & 12 & -5 & 19 \end{array}\right)$
	F2 = 1/11 F2 F3 = 1/12 F3	**XRw** k = 1 ⌟ 11 m = 2 **XRw** k = 1 ⌟ 12 m = 3	$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{11} & \frac{21}{11} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{12} & \frac{19}{12} \end{array}\right)$
Aplicamos el método de Gauss-Jordan:	F1 = F1 +4 F2 F3 = F3 – F2	**XRw+** k = 4 m = 2 n = 1 **XRw+** k = -1 m = 2 n = 3	$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & \frac{7}{11} & \frac{40}{11} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{11} & \frac{21}{11} \\ 0 & 0 & \frac{-43}{132} & \frac{-43}{132} \end{array}\right)$
	F3 = -132/43 F3	**XRw** k = -132 ⌟ 43 m = 3	$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & \frac{7}{11} & \frac{40}{11} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{11} & \frac{21}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$
	F1 = F1 –7/11 F3 F2 = F2 + 1/11 F3	**XRw+** k = -7 ⌟ 11 m = 3 n =1 **XRw+** k = 1 ⌟ 11 m = 3 n = 2	$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

La solución del sistema es ***x* = 3**; ***y* = 2**; ***z* = 1**.

5. Resolución de s.e.l. con el método de la matriz inversa.

Solucionar el sistema: $\left.\begin{aligned} 3x+5y+2z&=1\\ x-\ y-\ z&=0\\ 2x+3y+4z&=2\end{aligned}\right\}$

Escribimos el sistema en forma matricial: $\begin{pmatrix}3&5&2\\1&-1&-1\\2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

Solucionamos la ecuación matricial:

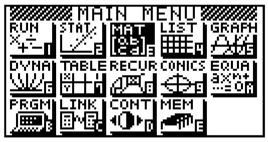
$$\begin{pmatrix}3&5&2\\1&-1&-1\\2&3&4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&5&2\\1&-1&-1\\2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5&2\\1&-1&-1\\2&3&4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5&2\\1&-1&-1\\2&3&4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

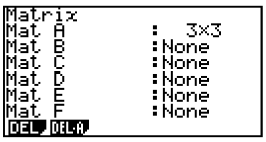
Encontremos la solución con la calculadora:

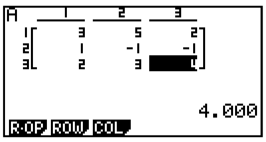
Opción MAT del MENU principal:

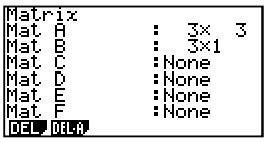
Editamos la matriz del sistema y la matriz de los términos independientes:

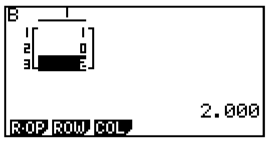


$$A=\begin{pmatrix}3&5&2\\1&-1&-1\\2&3&4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

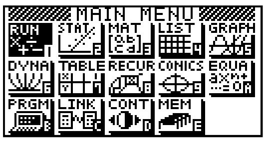








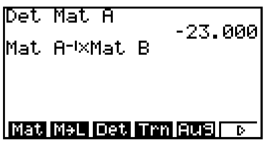
Opción RUN del MENU principal:

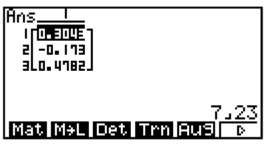


OPTN F2 **(MAT)**
F3 **(Det)** F1 **(Mat)** ALPHA X,θ,T **(A)** EXE

Comprobamos que det (A) = -23 ≠ 0, y por lo tanto la matriz del sistema es regular, existe A^{-1}.

Mat A SHIFT (**(x^{-1})** × **Mat B** EXE





El resultado obtenido es: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7/23\\-4/23\\11/23\end{pmatrix}$

EJERCICIOS

Resolver con el método de Gauss o con el de Gauss-Jordan:

24. $\left.\begin{array}{r} 3x-2y=0 \\ 6x-2y=5 \end{array}\right\}$

25. $\left.\begin{array}{r} 2x-3y=2 \\ 6x-9y=6 \end{array}\right\}$

26. $\left.\begin{array}{r} 3x+2y=9 \\ 2x-y=-1 \\ 5x+y=8 \\ 6x+4y=18 \end{array}\right\}$

27. $\left.\begin{array}{r} 2x-3y=6 \\ 4x+y=-2 \\ 6x-2y=3 \end{array}\right\}$

28. $\left.\begin{array}{r} x+y-z=3 \\ x+y+z=4 \\ x-y-z=1 \end{array}\right\}$

29. $\left.\begin{array}{r} 2x-5y-3z+2t=7 \\ 3x+2y-z-t=10 \\ x+y-2z-3t=-1 \\ -2x+3y-z+2t=-7 \end{array}\right\}$

30. $\left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=4 \\ x+4y-z=2 \\ 5x+6y-z=8 \\ x-10y+3z=0 \end{array}\right\}$

31. $\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=0 \\ 3x+2y-z=0 \\ x+5y-2z=0 \end{array}\right\}$

32. $\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=2 \\ 3x+2y-z=3 \\ x+5y-2z=2 \end{array}\right\}$

Resolver, si es posible, con el método de la matriz inversa los siguientes sistemas:

33. $\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=2 \\ 3x-y+z=1 \\ x+3y+z=1 \end{array}\right\}$

34. $\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=3 \\ x+3y+2z=-1 \\ 2x-y+5z=7 \end{array}\right\}$

35. $\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ 3x-y+2z=7 \\ 2x+3y-z=5 \end{array}\right\}$

36. $\left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=4 \\ 5x+6y-z=8 \\ x-10y+3z=0 \end{array}\right\}$

37. $\left.\begin{array}{r} 2x+4y+5z=1 \\ x+3y+3z=-1 \\ 3x+3y+2z=2 \end{array}\right\}$

38. $\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ x+2y-3z=8 \\ 2x-2y+2z=-4 \end{array}\right\}$

Soluciones de los ejercicios:

1.	$x = 2$; $y = -1$.
2.	$x = -10$; $y = -15$.
3.	Sistema Incompatible.
4.	Sistema Compatible Indeterminado.
5.	Sistema Incompatible.
6.	Sistema Compatible Indeterminado.
7.	$x = -2$; $y = -3$.
8.	$x = 5/2$; $y =13$.
18.	Sistema Incompatible.
19.	Sistema Compatible Indeterminado.
20.	$x = 2$; $y = -1$; $z = 3$.
21.	$x = 1$; $y = 1$; $z = 5/3$.
22.	$x = 3$; $y = 2/3$; $z = 5$.
23.	$x = 4$; $y = 0$; $z = 1$; $t = 1$.
24.	$x = 5/3$; $y = 5/2$.
25.	Sistema Compatible Indeterminado.
26.	Sistema Compatible Indeterminado.
27.	Sistema Incompatible.
28.	$x = 5/2$; $y = 1$; $z = 1/2$.
29.	$x = 4$; $y = 0$; $z = 1$; $t = 1$.
30.	Sistema Compatible Indeterminado.
31.	Sistema Compatible Indeterminado.
32.	Sistema Incompatible.
33.	$x = -1$; $y = -1/2$; z = 7/2.
34.	$x = 9/4$; $y = -5/4$; z = 1/4.
35.	$x = 1$; $y = 2$; $z = 3$.
36.	Sistema Compatible Indeterminado.
37.	$x = 2$; $y = -2$; $z = 1$.
38.	$x = 7/2$; $y = 0$; $z = -3/2$.